

Tagungsbericht 50/1976

Didaktik der Mathematik

5.12. bis 11.12.1976

Leitung: Professor Dr. A. Bergmann, Düsseldorf
Professor Dr. H. Kunle, Karlsruhe
Professor Dr. H.J. Vollrath, Würzburg

Auf der Tagung wurden Fragen des Analysisunterrichts behandelt. Außer in Vorträgen und Diskussionen zu diesen wurde das Thema in einer abschließenden Diskussion erörtert. Eine kurze Zusammenfassung darüber befindet sich am Schluß des Berichts.

Teilnehmer

Andelfinger, B. (Düsseldorf)	Koch, A. (Berlin)
Baumgartner, E. (Düsseldorf)	Kroll, W. (Lahntal-Sarnau)
Blum, W. (Kassel)	Kunle, H. (Karlsruhe)
Bürger, H. (Wien)	Möller, H. (Münster)
Drumm, V. (Freiburg)	Nitz, P. (Dortmund)
Eggs, H. (Freiburg)	Pickert, G. (Gießen)
Engel, A. (Frankfurt)	Prade, H. (Freiburg)
Engmann, R. (Frankfurt)	Radbruch, K. (Kaiserslautern)
Flohr, F. (Freiburg)	Reichel, (Wien)
Fritsch, R. (Konstanz)	Rinkens, H.-D. (Paderborn)
Füchte, W. (Freiburg)	Scheid, H. (Wuppertal)
Führer, L. (Wilhelmshaven)	Schmähling, R. (Düsseldorf)
Griesel, H. (Kassel)	Schweiger, F. (Salzburg)
Grözl, W. (Tübingen)	Thode, Th. (Düsseldorf)
Herfort, P. (Freiburg)	Tietz, H. (Hannover)
Hering, F. (Dortmund)	Tischel, G. (Hamburg)
Hischer, H. (Braunschweig)	Törner, G. (Darmstadt)
Karcher, H. (Bonn)	Vollrath, H.J. (Würzburg)
Kießwetter, K. (Bielefeld)	Wille, F. (Kassel)
Kirsch, A. (Kassel)	Winkelmann, B. (Bielefeld)
	Wellstein, H. (Würzburg)

B. Adelfinger

Differenzierter Lernbereich Analysis

Die Fachgruppe Mathematik an der Koordinierungsstelle S II (Düsseldorf) erstellt mit Beratung durch das IDM ein differenziertes Angebot zur Analysis für verschiedene allgemeinbildende, berufsbildende und doppelqualifizierende Ausbildungsgänge der S II.

Grundlage der Planung sind Bedingungsanalysen (allg. Didaktik, Fachdidaktik, tertiärer Bereich sowie spezielle Strukturvorgaben wie Gutachten der DMV, des dt. Bildungsrats etc.)

Vorläufiges Ergebnis der Planung sind 2 verschiedene Leistungskursfolgen und 1 Grundkursfolge zur Analysis.

Diese Kursfolgen lassen sich auch in verschiedener Weise zusammensetzen (linear, spiralförmig etc.) und mit anderen math. Gebieten verknüpfen (z.B. Optimierungsprobleme). Sie beziehen auch fächerübergreifende Aspekte ein (Informatik, Naturwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Technik etc.) und versuchen in unterschiedlicher Weise, den Grundsatz des "Vereinfachens" zu realisieren.

Die erste Erprobung zeigt, daß das Grundprinzip Zustimmung findet, aber weiterhin

- eine Abstimmung mit dem S-I-Lehrplan erfolgen muß,
- der algorithmische Aspekt noch stärker berücksichtigt werden muß,
- das Problem der Anwendungsorientierung und des Vereinfachens nur ansatzweise gelöst ist,
- eine Revision bestimmter Lehrpläne im beruflichen Schulwesen durchgeführt werden muß.

W. Blum, A. Kirsch

Bemerkungen zu unserer Analysis-Grundkurs-Konzeption

Mit Bezugnahme auf die als bekannt vorausgesetzten Arbeiten W. Blum, Ein Grundkurs ... [DdM 3,1975] A. Kirsch, ... Integral ... [DdM 2,1976] werden einige Punkte zur Vorbereitung der Diskussion hervorgehoben.

1. Ziele: Adäquate Vorstellungen von den grundlegenden Begriffen und Methoden; verständige Handhabung des einfachsten Handwerkszeugs der Differential- und Integralrechnung; Anwendungsbezug;

Fähigkeit zum Argumentieren (zumindest lokales Deduzieren).

2. Inhalte: Ableitung und Integral für ganzrationale Funktionen, einfache gebrochen-rationale Funktionen sowie $\sqrt{\quad}$, \exp , \sin , \cos . Verzicht auf Folgen (diese jedoch erwünscht im Vorkurs); Stetigkeit nur als Hilfsbegriff, erst bei Bedarf thematisiert (etwa beim Beweis des Hauptsatzes).

3. Methodische Grundvorstellungen: Berücksichtigung des Spiralprinzips; Stufung der Strenge; Vereinfachen ohne zu verfälschen.

Beispiele hierfür:

- a) Grenzwertbegriff (etwa wie bei S. Lang, A first Course in Calculus),
- b) Einführung der Ableitung über Differenzquotienten;
- c) Ableitung der genannten Funktionen, Ableitungsregel (Begründung auch mittels geometrischer bzw. plausibler Argumente);
- d) Verzicht auf Beweise bei anschaulich evidenten Sätzen, die auf Vollständigkeit von \mathbb{R} beruhen;
- e) Integral Einführung (Hauptproblem: Bestimmung von Integralen; Existenzfragen werden zurückgestellt).

4. Schlußbemerkungen: Ablehnung des "Alles oder nichts-Standpunkts" (z.B. Beweisen versus bloßes Mitteilen; abschließende Begriffsdefinition versus völligen Verzicht auf den Begriff).

Abgrenzung einerseits gegen Orientierung an Universitätskursen, andererseits gegen Rezeptvermittlung oder rein anschauliches Vorgehen. Befürwortung eines der Schule angemessenen Argumentationsniveaus, das im Unterricht durchgehalten, bei Bedarf gesteigert, aber nicht nach einigen Alibi-Stunden wieder preisgegeben wird.

H. Bürger

Zur Rolle des Supremums bei der Exaktifizierung des Analysis-Unterrichts.

Die Antwort auf die Frage, wie weit im Analysisunterricht Begriffe präzisiert und Beweise bzw. Begründungen exaktifiziert werden sollen, hängt wesentlich von den allgemeinen Zielen der Schulform, in der dieser Unterricht stattfindet, ab. Ein Begriff, der relativ leicht

exakt definiert und daher frühzeitig im Unterricht eingeführt werden kann, ist der des Supremums einer Zahlenmenge. An diesem Begriff kann u.a. der Umgang mit Quantoren und deren Negation geübt werden. Wesentlich ist aber, daß das Supremum in vielen Teilgebieten zu einer relativ exakten Behandlung dieser Gebiete herangezogen werden kann: Charakterisierung der Vollständigkeit des Körpers der reellen Zahlen; Rechenoperationen bei der konstruktiven Einführung der reellen Zahlen; Nachweis der Existenz von Wurzeln und Logarithmen; Definition und Eigenschaften des bestimmten Integrals, des Flächeninhaltes und des Volumens; Herleitung des Zusammenhanges zwischen Kreisumfang und Kreisinhalt.

V. Drumm, W. Füchte

Die Wachstums- und die Schwingungsdifferentialgleichung in der Sekundarstufe II.

Die Wachstums- und die Schwingungsdifferentialgleichung sollten möglichst frühzeitig im Analysisunterricht behandelt werden. Dies erfordert eine Abkehr vom üblichen Ablauf des Analysisunterrichts in der Sekundarstufe II, wo meist nach der Einführung des Differenzierbarkeitsbegriffes eine lange Phase der Herleitung allgemeiner Sätze folgt.

Die benötigten Sätze, wie Differentiationsregeln und Schrankensatz können im Verlauf der Untersuchung der Wachstumsdifferentialgleichung entwickelt werden. Mit ihrer Hilfe werden einige elementare Näherungsverfahren zur Ermittlung des qualitativen Verlaufs der gesuchten Lösungsfunktionen behandelt. Dabei sollten die Schüler ein gutes Verständnis des Differenzierbarkeitsbegriffes erreichen. Der Zusammenhang der Lösungsfunktionen mit den auf der Mittelstufe behandelten Exponential- bzw. Kreisfunktionen wird durch die Herleitung der bekannten Eigenschaften aus den Differentialgleichungen heraus hergestellt.

H. Eggs

Eine Einführung des Integrales ohne Summendefinition ?

Teil 1: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, es gelte $f(t) \geq 0$ f.a. $t \in I$, die durch $\{(t/y) \mid a \leq t \leq x \text{ und } 0 \leq y \leq f(t)\}$, $a, x \in I$ und $a < x$ gegebene Punktmenge besitze einen eindeutig bestimmten Flächeninhalt $f_a(x)$. Damit existiert zu jedem $a \in I$ eine "Flächeninhaltsfunktion" $x \mapsto F_a(x)$, $x \in I$ und $a \leq x$.

Aus der Anschauung werden hierfür die Intervalladditivität und Abschätzbarkeit durch Rechtecke entnommen. Hieraus folgt leicht der Hauptsatz für die zulässigen Funktionen.

Teil 2: Die Einschränkungen aus Teil 1 werden aufgegeben. Die Einführung des orientierten Inhaltes und damit des Integrales liegt nahe (Grundkurs), man kann aber auch die in Teil 1 aufgestellten Grundeigenschaften zur Definition der Integralfunktionen benutzen, woraus uneingeschränkt der Hauptsatz folgt. Die meisten schulüblichen Probleme der Integralrechnung lassen sich jetzt lösen.

Ausblick: Der aufgezeigte Weg läßt sich am Ende durch eine Summendefinition sinnvoll abschließen.

P.S. Dieser Weg entspricht einer Empfehlung des Mathematikplanes von Baden-Württemberg.

L.Führer

Empirische Funktionen in Klasse 10,

Bericht über eine anwendungsbezogene Unterrichtsreihe.

In zwei Parallelklassen wurde Anfang der 10. Klasse der Themenkreis "Potenzrechnung-Exponentialfunktion-Logarithmus" anwendungsbezogen unterrichtet. Dabei wurden zunächst ganzrationale Funktionen aus empirischen Daten über Newtonsche Approximation erstellt (incl. Nullstellenbehandlung), dann wurden Wachstums- und Zinseszinsvorgänge (vorwiegend mit Abschätzungen) erörtert, schließlich wurden Exponentialfunktionen und Logarithmen an den Problemen Bevölkerungskatastrophe bzw. Codierung untersucht. Eine Schlüsselrolle kam

dabei der Abschätzung $72/p$ für die Verdopplungszeit bei gegebenem Wachstum von p % zu. Die gesammelten Erfahrungen mit der Unterrichtsreihe zeigen die Leistungsfähigkeit heuristisch, d.h. ohne ernsthafte Grenzwertbetrachtung gewonnener Funktionen und könnten daher nützliche Hinweise für die Konzeption problemorientierter Grundkurse geben.

H. Griesel

Grundkurs Analysis - Vorgaben und Ergebnisse eines Schulversuchs.

Im Vortrag wurde über einen Schulversuch berichtet, der in über 30 Klassen durchgeführt worden ist. Ziel war u.a. zu prüfen, ob es möglich ist, ohne lange Vorbereitung und ohne langes Lernen auf Vorrat möglichst schnell zum zentralen Begriff der Ableitung vorzustoßen. Den Lehrern wurde zu Beginn eine Lernsequenz, die dieser Hauptforderung genügte, vorgegeben. Die Lehrer hatten allerdings nicht den Auftrag, sich sklavisch an diese Vorgabe zu halten, sondern die Freiheit, im Rahmen dieses Konzeptes auch eigene Wege zu gehen. Bei dem Versuch konnte auch das Lernverhalten studiert werden.

Wesentliche Ergebnisse waren:

- Es ist günstiger, einen Hilfsbegriff (z.B. Grenzwert einer Folge, Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit) vorab zur Verfügung zu haben, wenn man den Begriff der Ableitung präzisieren will.
- Nennenswerter Zeitgewinn wird nur erzielt, wenn der Begriff der Ableitung nicht voll präzisiert wird und anstelle der Beweise der Ableitungsregeln Plausibilitätsargumente treten.
- Es bestand nur geringe Neigung, Plausibilitätsargumente zu verwenden.

Eine ausführliche Darstellung der vorgegebenen Lernsequenz und des Ablaufs der Curriculumentwicklung findet sich in H. Griesel Grundkurs Analysis, die Beschreibung des Ablaufs einer Curriculumentwicklung, Der Mathematikunterricht 1976, Heft 5 S. 25-46.

W. Grölz

Der Schrankensatz im Analysisunterricht

Sollen im Analysisunterricht die anwendbaren zentralen Begriffsbildungen des Gebiets ohne zu lange formale Vorbereitung unter Wahrung eines strengen Aufbaus angestrebt werden, so empfiehlt sich die Verwendung des Schrankensatzes ($m \leq f' \leq M \Rightarrow m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$). Gegenüber dem Mittelwertsatz, aus dem er trivial folgt, ist er zwar etwas umständlicher zu handhaben, reicht jedoch für die Begründung der üblichen Kurvendiskussion völlig aus und hat den Vorteil der besseren Anschaulichkeit und vor allem den der direkteren Beweisbarkeit unmittelbar aus dem Limesbegriff und der Vollständigkeit. Selbst die Potenzreihenentwicklung bestimmter elementar transzendenter Funktionen, etwa der Exponentialfunktion, erhält man mit verhältnismäßig geringem Aufwand.

H. Hischer

Eine "Herleitung" der (Lipschitz-)Differenzierbarkeitsdefinition.

Es wird eine curriculare Skizze zur Behandlung des Differenzierbarkeitsbegriffs entworfen, die von der Hypothese ausgeht, daß nicht die Existenz der Tangente, sondern die Berechnung ihrer Steigung zunächst das Tangenten-"Problem" ausmacht. Über einen ersten empirischen Zugang bei konkreten Funktionen entwickelt man Vermutungen, die z.T. sogar elementar beweisbar sind und schon auf dieser Stufe d. Begr. "Ableitungsfunktion" erklärbar machen. Eine Analyse der so nicht lösbaren Fälle führt zu der Erkenntnis, daß Tangentenexistenz (lokal) gleichbedeutend mit "Knickfreiheit" (lokal) des Graphen ist. Eine Untersuchung der Sekantensteigungsfunktion $s_{f,a}$ von f an der Stelle a sichert die Knickfreiheit, falls $s_{f,a}$ an der Stelle a "sprungfrei" ist. Für die Sprungfreiheit wird die lokale Lipschitz-Stetigkeit als hinreichende Voraussetzung erkannt, so daß der Begriff "Differenzierbarkeit" durch eine hinreichende Voraussetzung beschreibbar ist.

K. Kießwetter

Differentiation ohne Grenzwert und Stetigkeit.

Ausgangspunkte der Überlegungen sind die Schwierigkeiten von Schülern bei der üblichen Einführung von Ableitung und Tangente. Eine Analyse ergibt, daß für die gesuchte Approximation der vorgegebenen Funktion in einem heuristischen Durchgang ein Approximationsprozeß benutzt wird (Sekantenfolgen usw.). Es werden also zwei ineinander verquickte Approximationen vorgeführt.

Um die Schwierigkeitsdichte an dieser Stelle herabzusetzen, wird vorgeschlagen, den zentralen Gesichtspunkt der linearen Approximation "statisch" zu benutzen: Auf der Menge der für die Approximation zur Konkurrenz zugelassenen linearen Polynomfunktionen wird eine Relation "... approximiert besser als ..." definiert und eine in diesem Sinne "beste Approximierende" als Tangentenfunktion festgelegt.

Es wird angedeutet, welche auf diesen Begriffsbildungen aufbauende Unterrichtsgänge auf verschiedenen Niveaus durchgeführt werden können und welche Mittel zum Beweis zentraler Sätze benötigt werden.

A. Koch

Zur genetischen Behandlung der Integralrechnung.

Die Behandlung komplexer Anwendungsaufgaben führt zur Einführung des orientierten Flächeninhalts, wobei die Existenz des Flächeninhalts als anschaulich gegeben angesehen wird.

Dieser an verschiedenen Anwendungsgebieten als wesentlich erkannte orientierte Flächeninhalt an Funktionen wird als bestimmtes Integral bezeichnet.

Mit Polygonzügen und Treppenfunktionen bei gleichmäßiger und ungleichmäßiger Teilung werden Integrale numerisch bestimmt.

Dabei werden graphisch gegebene Funktionen wie auch durch Tabellen oder durch Terme gegebene Funktionen behandelt.

Präzise Werte werden durch Exhaustion ermittelt.

Durch die Einbeziehung der Anwendungen werden wesentliche Methoden

und Gesichtspunkte für die weitere Präzisierung motiviert und schrittweise eingeführt.

Die Existenz nicht stückweise monotoner Funktionen und Überlegungen an problematischen Flächen erzwingen die weitere Präzisierung.

W. Kroll

Eine unterrichtliche Realisierung des Konzepts
"Differentialrechnung als lineare Approximation".

Zur Konkretisierung des in dem Aufsatz "Ein Vorschlag zur Behandlung der Analysis in der zukünftigen Kollegstufe" (MNU 27(74) und 28(75) dargestellten theoretischen Konzepts wurde auf Grund eigener Unterrichtserfahrungen ausgeführt, wie der Differenzierbarkeitsbegriff unter voller Wahrung der Anschauung so gefaßt werden kann, daß er eine für den Aufbau der Analysis zugleich logisch und intuitiv einleuchtende Basis abgeben kann. Es wurde gezeigt, daß sich auf diesem Wege der Kalkül mit seinen Anwendungen herleiten läßt, und zum Schluß eine im gleichen Rahmen stattfindende elementare Behandlung der Exponential- und Logarithmusfunktion- ausgehend von der Differentialgleichung $f' = f$ - vorgeschlagen.

H. Möller

Einige neue Aspekte der "Vereinfachten Analysis".

Es wird über ein Konzept berichtet, das es ermöglicht, die Schulanalysis durch Einschränkung auf die wirklich benötigten Folgen- und Funktionsmengen erheblich einfacher, durchsichtiger und anwendungsnäher zu gestalten. Grundlegend ist das Prinzip der "Approximation mit expliziten Resten".

Zugleich mit der konstruktiven Präzisierung der reellen Zahlen als "Dezimalfolgen" wird der wichtige Begriff der "g-Fundamentalfolge" mit zahlreichen Anwendungen erschlossen. Die Behandlung der Stetigkeit, Differentiation und Integration von Funktionen im Anschluß an H. Karcher wird ergänzt durch Zwischenwertsatz und

sowie durch einen Fixpunktsatz. Die wichtigen transzendenten Funktionen werden frühzeitig mit Hilfe einer elementaren Potenzreihentheorie gewonnen.

P. Nitz

Grenzwertbegriff auf der Grundlage der Fehlerrechnung.

Ein Kernproblem eines Grundkurses Analysis ist die Einführung des Grenzwertbegriffs. Veranschaulichungen sind unzulänglich und verstellen oft sogar ein richtiges Verständnis; die Häufung der Quantoren ist prinzipiell nicht reduzierbar und macht den meisten Schülern ein echtes Verstehen unmöglich.

Will man trotzdem nicht auf den Grenzwertbegriff in der Analysis verzichten, so könnte nach meinen Erfahrungen eine schrittweise Einführung auf dem Hintergrund einer Behandlung von Fehlerabschätzungen (in der Mittelstufe) die Schwierigkeiten entzerren: Eine Funktion f kann in $U(x_0)$ eine Genauigkeit $\varepsilon > 0$ bzgl. eines Idealwertes G einhalten, wenn x eine Abweichung $\delta > 0$ nicht überschreitet. Vorteile:

1. Konkreter Begriffshintergrund
2. Zahlenbeispiele für ε und δ sind sinnvoll und führen ohne Schwierigkeiten zur Grenzwertdefinition.

Anm.: Der Ansatz ist natürlich nicht neu; ich würde - wenn gewünscht - den Schwerpunkt auf eigene unterrichtliche Erfahrungen legen.

G. Pickert

Vorschlag für einen Grundkurs "Analysis" in der Kollegstufe.

Die Ableitung wird mittels $f(x) = f(a) + (x - a)f_1(x)$, $f'(a) = f_1(a)$ eingeführt, zuerst für ganz-rationale, dann rationale Fkt. und (allgemein, durch Hinzunahme der $\sqrt{\quad}$ -RW-Fkt. (jeweils f und f_1 in der betreffenden Fkt.-Klasse). Bei \exp , \ln , \sin , \cos ist f_1 zwischen elementare Funktion f^* , f^* mit $f^*(a) = f^*(a)$ einzuschließen.

Als Ersatz für den Stetigkeitsbegriff dient die aus der Rechenpraxis bekannte "näherungsweise Berechenbarkeit" der elementaren Funktionen. Auch der Satz vom lokalen Fkt.-Verhalten beruht darauf. Der Satz vom globalen Fkt.-Verhalten (anschauliche Begründung) führt zum Schrankensatz (statt Mittelwertsatz verwendet). Suche nach Stammfkt. (motiviert z.B. durch Suche nach Flächeninhaltsfkt.) führt zum Integralbegriff. (Siehe MNU 22, Heft 5, S.64-81; auf S.71, 4. Zeile v. unten "zu C_a des Definitionsbereiches" streichen u. die Zeichen $>$, $<$ vertauschen.)

H.-Chr. Reichel

Einige Bemerkungen zur Integralrechnung.

Einige Gedanken zum genetisch-axiomatischen Weg; das Integral als Muster einer "Begriffsbildung", d.h. Konkretisierung einer zunächst nur intuitiv vorhandenen "Allgemeinvorstellung" (Probleme der Exaktifizierung). - Einfache Konstruktion einer nicht-meßbaren Menge unter ausschließlicher Verwendung von Methoden, welche in der Sekundarstufe zur Verfügung stehen. (Auch als Beispiel in der Wahrscheinlichkeitstheorie). Kurze Diskussion folgender Fragestellungen: Welchen Platz könnte die Erwähnung oder Konstruktion einer nicht-meßbaren Menge etwa im genetischen Aufbau der Integralrechnung einnehmen? Welcher didaktische Wert wäre damit erzielbar? (Grundkurs-Leistungskurs). -

Damit im Zusammenhang (und als Hintergrundwissen) einiges über Grundlagenfragen: Verbindungen des Integralbegriffes mit der Mengenlehre; die Rolle des Auswahlaxiomes. Kurzbericht über die bekannte (und teilweise mißverständene) Arbeit von Solovay [1964, bzw. 1970].

H.-D. Rinkens

Zur Behandlung der Stetigkeit: ein breiterer Zugang.

Der vorliegende Vorschlag besitzt zwei Anknüpfungspunkte in der didaktischen Diskussion über den Analysisunterricht. Zum einen

plädiert er für einen "breiteren Anlauf zur Stetigkeit - im Sinne von Freudenthals Anregungen zur Differential- und Integralrechnung. Zum anderen greift er Papys Vorschläge in vereinfachter Form auf. Anschauliche topologische Begriffsbildungen (vor allem der Umgebungsbegriff) sollen in einer präzisierbaren Form zu Hilfe genommen werden. Eine besondere Bedeutung kommt dabei der Ebene zu: als Anschauungsebene, die analytisch beschrieben werden kann, und als topologisches Produkt.

Ansatzpunkt sind die Vorerfahrungen der Schüler im numerischen Bereich (die 4 Grundrechenarten sind stetig), sowie im Bereich der messenden und konstruktiven Geometrie (Ungenauigkeiten beim Messen und Zeichnen). Über die Betrachtung der lokalen Unstetigkeit erfolgt die Präzisierung der lokalen Stetigkeit. Beim Testen der Brauchbarkeit der Definition ergeben sich die Stetigkeitssätze.

Die Ausführungen sollen zeigen, daß dieses Vorgehen nicht nur prägnantere Formulierungen erlaubt, sondern an einigen Stellen auch einsichtigere Beweise der "klassischen" Sätze.

H. Scheid

Vorschläge zur Konzeption einer Vorlesung "Didaktik der Analysis".

Es werden inhaltliche Vorschläge zur Gestaltung einer Vorlesung über Didaktik der Analysis zur Diskussion gestellt. Neben einer allgemeinen Beschreibung von Zielen und Inhalten einer solchen Lehrveranstaltung wird eine detaillierte Gliederung angegeben, welche den Verlauf der bisher (zweimal an der Gesamthochschule Wuppertal) abgehaltenen Veranstaltungen beschreibt. An einigen konkreten Beispielen werden Inhalt und Arbeitsweise erläutert.

R. Schmähling

Optimale lineare Approximation - ein Zugang zur Differentialrechnung.

Die Grundidee der Differentialrechnung, komplizierte Funktionen möglichst gut durch affine Funktionen zu approximieren, führt zu der folgenden allgemeinen Definition:

D sei eine Teilmenge von \mathbb{R} , x_0 ein Häufungspunkt von D , \mathcal{G} eine Klasse reellwertiger Funktionen mit Definitionsbereich D . Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in x_0 durch \mathcal{G} optimal approximierbar, wenn es eine Funktion $g_0 \in \mathcal{G}$ gibt mit der folgenden Eigenschaft:

Für alle $g \in \mathcal{G}$ gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ mit

$$|f(x) - g_0(x)| \leq |f(x) - g(x)| \text{ für alle } x \in U(x_0).$$

Im ersten Teil des Vortrags werden Zusammenhänge zwischen \mathcal{G} und der Menge der in x_0 durch \mathcal{G} optimal approximierbaren Funktionen diskutiert, im zweiten Teil, insbesondere für \mathcal{G} die Menge der Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$ gewählt. Die Menge der in x_0 durch die konstanten Funktionen optimal approximierbaren Funktionen ist die Menge der stetigen Funktionen, die Menge der in x_0 durch lineare Funktionen optimal approximierbaren Funktionen ist die Menge der in x_0 differenzierbaren Funktionen. Für $n \geq 2$ ist die Menge der durch Polynome vom Grad $\leq n$ in x_0 optimal approximierbaren Funktionen eine echte Obermenge der in x_0 n -mal differenzierbaren Funktionen, für die sich jedoch ein Analogon zu den Taylorpolynomen angeben läßt.

Im dritten Teil des Vortrags wird ein Weg aufgezeigt, mit dem im Analysisunterricht die Tangente direkt als optimale lineare Approximationsfunktion im obigen Sinn (ohne vorherige Betrachtung der Differenzierbarkeit) eingeführt werden kann. Dadurch wird ein besseres Verständnis des Tangentenbegriffs angestrebt.

Literatur: R.Schmähling u.Th.Thode: Optimale Approximation- ein Zugang zur Analysis, Math.Phys.Sem.Ber.,

R.Schmähling u.Th.Thode: Ein Vorschlag zur Behandlung des Tangentenproblems im Analysisunterricht, Didaktik der Mathem.

G. Tischel

Aufbau der Differentialrechnung im Schulunterricht
ein Vergleich verschiedener Möglichkeiten.

Jeder Unterrichtsgang zur Differentialrechnung umfaßt folgende Inhalte: Ableitungsbegriff, Ableitungskalkül und Sätze, die von f'

auf f schließen lassen. Die Einführung des Ableitungsbegriffes kann über Vorbegriffe (Folgen, Grenzwert für Funktionen, Stetigkeit, abgeänderte Stetigkeit) erfolgen oder auch direkt. Die verschiedenen bekannten Ansätze werden kommentiert und in Beziehung zueinander gesetzt. Vor- und Nachteile werden skizziert. Gesichtspunkte zur Beurteilung sind: Länge des Anlaufweges, Motivation und Veranschaulichung der Definition, Gewinnung des Kalküls, Beziehung zu den Anwendungen, Zugang zu zentralen Sätzen, Linearisierungsaspekt.

G. Törner

Bemerkungen zum Grenzwert im Analysisunterricht.

Die letzten Jahre waren durch eine rege Reformdiskussion über Inhalte und Methoden des Analysisunterrichts gekennzeichnet. Vielerorts wurde eine starke Thematisierung des Stetigkeitsbegriffes betrieben, der "zum Schaden des Unterrichts zu wuchern begann" (Pickert). Auf der anderen Seite scheint für einige Konzeptionen von Grundkursen in Analysis die Verwendung von Grenzwertbetrachtungen zwangsläufig und durch die Erfahrungen gerechtfertigt. Im Vortrag wurden für die Unterrichtspraxis einige propädeutische Hinweise gegeben. Es scheint dabei sinnvoll zu sein, den Cauchy-Konvergenzbegriff als zu beobachtendes Phänomen bei (konvergenten) Folgen dadurch zu motivieren, in dem man das Verhalten von k -stabilen Folgen (für geeignet großes n sind schließlich die ersten k -Dezimalen stabil) diskutiert. Von hier aus erklärt man durch plausible Argumente den Satz: Jede Cauchy-konvergente Folge besitzt einen Grenzwert. Das Vollständigkeitsaxiom tritt dabei in der Form auf: Jeder (unendliche) Dezimalbruch ist eine Zahl. Auf die Weiterführung zur formalisierten Definition wurde hingewiesen.

F. Wille

Bemerkungen zur Hochschuldidaktik mathematischer Anfängervorlesungen.

Zur Analysis: Häufungen von Quantoren (Quantorentürme), die bei der Einführung der Konvergenz, Stetigkeit und Differenzierbarkeit den Studienanfängern Schwierigkeiten machen, sollen vermieden werden. Dies wird erreicht, wenn man mit monoton fallenden Nullfolgen beginnt, bzw. mit monotonen Nullfunktionen (s. Wille: Analysis, 1976).

Ferner wird ein anwendungsbezogenes Analysiskonzept vorgeschlagen, bei dem das Lösen von Gleichungen als wesentliche Motivation verwendet wird (Newton-Verf. usw.).

Zur Lernpsychologie: Es werden einige wichtige Prinzipien erläutert: Assoziationen und Neugier wecken, Zusammenhänge zuerst, Begleitinformationen, Interferenz und Erfolg-Verstärkung. Ferner Arbeitsstil, Lernplateau, Gedächtnis usw. Ansätze für Lehren und Lernen von Mathematik werden durchaus hergeleitet: Zu Aufmerksamkeit, Sprache, Verständnis usw.

Schlußdiskussion

In der abschließenden Diskussion bestand Einmütigkeit darüber, daß ein überwiegender Teil der mathematischen Ausbildung in der Sekundarstufe II (Kollegstufe) der Analysis gewidmet sein sollte. Gründe dafür waren u.a.: 1. Die Stellung der Analysis innerhalb der Mathematik.

2. Die Möglichkeit, auf natürliche Weise verschiedene andere Gebiete oder Methoden, die oft isoliert auftreten (z.B. Analytische Geometrie, numerische und algorithmische Methoden, Stochstik) gut anbinden zu können, so daß der Aufsplitterung der Mathematik entgegengewirkt werden kann.

3. Die Analysis spielt in den Anwendungen eine besonders große Rolle. Sie wird daher sowohl in der Ausbildung als im späteren Beruf der Schüler vielfach gebraucht.

Zum Inhalt und Aufbau von Analysiskursen, sowohl für Grund- als für Leistungskurse, wurden besonders betont:

1. Elementare Funktionen sollten in ausreichender Breite behandelt werden.

2. Man sollte - möglichst ohne zeitaufwendigen Vorspann formaler Art - zu den zentralen Inhalten der Analysis in der Schule gelangen, d.h. möglichst bald auch zu den Ergebnissen über das globale Verhalten differenzierbarer Funktionen und den damit verbundenen Denkweisen und Anwendungsmöglichkeiten.

Ein in verschiedenen Ländern üblicher Vorkurs sollte bereits für die Analysis bzw. deren Vorbereitung ausgenutzt werden.

A. Bergmann (Düsseldorf)

