MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 7/1977

Funktionentheorie

13.2. bis 19.2.1977

Die Funktionentheorietagung, in deren Mittelpunkt Funktionen einer Veränderlichen stehen, fand in diesem Jahr vom 13. bis 19. Februar im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Die Leitung hatten D. Gaier (Gießen), K. Strebel (Zürich) und H. Wittich (Karlsruhe) übernommen. Der Tagung wohnten 45 Teilnehmer, darunter 11 aus dem Ausland, bei.

Die diesjährige Tagung hatte den Charakter einer Arbeitstagung. Im Mittelpunkt standen drei Vortragsserien (jeweils 5 mal 1 Stunde), die insbesondere jüngeren Mathematikern Überblick über spezielle Forschungegebiete geben sollten. Für diese Vortragsserien hatten sich dankenswerterweise zur Verfügung gestellt:

J. Becker: Quasikonforme Fortsetzung konformer Abbildungen

D. Gaier: Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete

H. Shapiro: Functional Analysis and Analytic Functions

Neben den Vortragsserien wurden noch 9 Kurzvorträge aus verschiedenen Gebieten der Funktionentheorie von 30 - 45 Minuten Dauer gehalten.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

J. Becker, Berlin
D. Bishouty, Zürich
R.-O. Buchweitz, Hannover
C. Constantinescu, Hannover
K. Doppel, Berlin
H. Epheser, Hannover
G. Frank, Hagen
F. Gackstatter, Aachen
D. Gaier, Gießen
D. Gronau, Graz
H. Grunsky, Würzburg
K. Habetha, Aachen
A. Huber, Zürich
F. Huckemann, Berlin
K.-H. Indlekofer, Paderborn
S. Jaenisch, Gießen
G. Jank, Aachen
O. Knab, Karlsruhe
H. Köditz, Hannover
H. Kuhn, Karlsruhe
W. Luh, Darmstadt
K. Menke, Dortmund
E. Mues, Karlsruhe
R. Nevanlinna, Helsinki
J. Nikolaus, Siegen
E. Peschl, Bonn
A. Pfluger, Zürich
Ch. Pommerenke, Berlin
L. Reich, Graz
H.M. Reimann, Bern
M.von Renteln, Gießen
Schlosser-Haupt, Dortmund
H. Shapiro, Stockholm
A. Steiner, Zürich
K. Strebel, Zürich
H. Tietz, Hannover
H. Tietz, Stuttgart
St. Timmann, Hannover
R. Trautner, Ulm
K. Umgeher, Wien
L. Volkmann, Berlin
J. Winkler, Berlin
H. Wittich, Karlsruhe
D. Wrase, Karlsruhe
R. Zavodnik, Berlin

Vortragsauszüge

J.BECKER: Quasikonforme Fortsetzung konformer Abbildungen

Die Vortragsreihe gliederte sich in drei Teile.

I. Teil: Abschätzungen für quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen

II. Teil: Geometrische und analytische Charakterisierung

III. Teil: Weitere hinreichende Bedingungen.
Der universelle Teichmüllerraum

Im ersten Teil werden die Majorantenmethode von Lehto und die Variationsmethode behandelt. Am Beispiel der Klasse Σ der im Äußeren des Einheitskreises schlichten normierten Funktionen wird gezeigt, wie man mit Hilfe dieser Methoden bekannte Abschätzungen schlichter Funktionen im Falle der quasikonformen Fortsetzbarkeit verschärfen kann.

Im zweiten Teil werden die Randkurven der Bildgebiete quasikonform fortsetzbarer schlichter Funktionen geometrisch als Kurven von "beschränkter Schwenkung" charakterisiert. Im Zusammenhang damit steht die analytische Charakterisierung mit Hilfe der (verschärften) Grunskyschen bzw. Golusinschen Ungleichung.

Im dritten Teil werden zunächst weitere analytische Bedingungen aufgestellt, die hinreichend dafür sind, daß eine im Äußeren des Einheitskreises meromorphe Funktion zur Klasse Σ gehört und eine quasikonforme Fortsetzung besitzt. Schließlich werden noch der universelle Teichmüllerraum und der Offenheitssatz von Ahlfors behandelt.

D. GAIER: Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete

In einer Serie von fünf Vorträgen wurde versucht, einen Überblick über dieses schon klassische Teilgebiet der konformen Abbildung zu geben. Zentrale Ergebnisse wurden bewiesen, andere nur skizziert und die wesentlichen Gedanken dargestellt. Es folgt die Inhaltsangabe.

§1. Parallelschlitzabbildung.
Abbildungssatz; Extremalproblem; Zusammenhang verschiedener Schlitzabbildungen; Span von G; Gemischtschlitzabbildung.

§2. Kreisbogen- und Radialschlitzabbildung.
Ungleichung von Rengel; Einschließungssatz für Moduln; Kreisbogenschlitzabbildung; Extremalproblem.

§3. Geometrische Extremalprobleme.
Zusammenstellung wichtiger geometrischer Extremalprobleme; Verschiebungsprobelm; Verzerrungsproblem; Doppelverhältnis; Flächeninhaltsprobleme; Durchmesserproblem.

§4. Konstruktive Gesichtspunkte.
Komatu-Verfahren; 8-er Satz; Konvergenzgeschwindigkeit des Komatu-Verfahrens; Vollkreisabbildung; iterierendes Verfahren; Faktorisierungssatz; Schlitzabbildungen iterativ; Selbstabbildungen n-fach zusammenhängender Gebiete.

§5. Gebiete unendlichen Zusammenhangs.
Parallelschlitz-Abbildung; Koebes Beispiel und seine Korrektur durch Reich; Minimalschlitz-Bereich (3 Definitionen); Kreisbogenschlitzabbildung nach Reich-Warschawski; Kreisnormierungsproblem, Ergebnisse von Strebel u.a.; Existenz schlichter Funktionen in E^c; Nullmengen von Ahlfors und Beurling.

H.SHAPIRO: <u>Functional Analysis and Analytic Functions</u>

This was a series of five one-hour lectures devoted to the above theme. The only background assumed, beyond basic courses in analytic functions and elementary Hilbert space theory, were a few facts about H^p spaces, Herglotz' theorem on positive definite sequences, and (at one place) standard results about signed measures; otherwise, complete proofs were given of all theorems.

<u>Topic 1: Von Neumann's inequality.</u>

J. von Neumann (Math. Nachr. <u>4</u> (1951)258-281) proved that if T is a bounded linear operator on a Hilbert space, of norm ≤ 1, and p a polynomial, then p(T) has norm at most equal to $\max_{|z|\leq 1} |p(z)|$. Von Neumann's proof was presented, the central feature of which was the use of a lemma due to Schur (1917), that any function analytic and bounded by 1 on $D:\{|z| < 1\}$ is the limit, uniformly on compact subsets of D, of a sequence of finite Blaschke products. An application due to Rabindranathan (Indiana Univ. Math. J. <u>22</u> (1972)523-529) was given of the von Neumann inequality. This states that if $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ belongs to H^2 and ϕ is an inner function, and $F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots$ is defined by: $F(e^{i\theta})$ = orthogonal projection on $H^2(T)$ of $\overline{\phi(e^{i\theta})}f(e^{i\theta})$ (Toeplitz operator), then

$$\sum_0^\infty p_n |A_n|^2 \leq \sum_0^\infty p_n |a_n|^2$$

holds for every sequence of numbers $0 \leq p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots$. This implies that whenever $f \in H^2$ and F is the outer factor of f, then

$$|a_0|^2 + \ldots |a_n|^2 \leq |A_0|^2 + \ldots |A_n|^2, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

inequalities due to E. Robinson in the analogous half-plane situation (reference in H.Dym and H.McKean, <u>Fourier Series And Integrals</u>, p.175). During the lectures Professor Pommerenke pointed out that the Rabindranathan theorem could be proved in an extremely elementary way, even in generalized form, using a device due to Robertson (see p.37 of Pommerenke, <u>Univalent Functions</u>).

<u>Topic 2: Beurling's Invariant Suspace Theorem.</u>

This celebrated theorem states that every closed subspace of H^2 mapped into itself under multiplication by z, is of the form ϕH^2 where ϕ is a uniquely determined (up to a constant factor) inner function. (Conversely, if ϕ is inner, ϕH^2 is a closed subspace of H^2 stable under multiplication by z; this is a simple verification.) This theorem is of interest in operator theory because it allows a fairly explicit description of the (closed) invariant subspaces of the forward shift operator on singly-infinite square-summable sequences, perhaps the simples of all non-normal operators, and illustrates the complexity that any general spectral theory must face. The proof given was the "abstract" proof due to Helson and Lowdenslager.

Topic 3: Hardy. Spaces and Prediction theory.

A weakly stationary stochastic process (WSSP) with discrete time is by definition a sequence $\{x_n\}$, $n = \ldots,-1,0,1,2,\ldots$ of vectors in a Hilbert space H which span H and satisfy the requirement of stationarity: $\langle x_m, x_m \rangle$ depends only on m-n (hence may be denoted by r_{m-n}). Various questions inspired by prediction theory, concerning how certain probabilistic aspects of the WSSP are reflected in the sequence $\{r_n\}_{-\infty}^{\infty}$, lead to function-theoretic problems concerning functions in Hardy spaces. Moreover, methods originating in mathematical statistics actually lead to new and elegant proofs of some function-theoretic results. This theme (due to Helson and Lowdenslager: references in Hoffman, Banach Spaces Of Analytic Functions) was illustrated by proving a theorem of Kolmogorov characterizing the spectral measures of those WSSP which are called "purely non-deterministic" (references for these concepts: Urbanik, Lectures On Prediction Theory, Springer Lecture Notes in Math. vol. 44; Grenander and Szegö, Toeplitz Forms And Their Applications). The Kolmogorov theorem was then used to deduce the F. and M.Riesz theorem on analytic measures, and from this was deduced the theorem of those authors that a conformal map of the unit circle onto a domain bounded by a rectifiable Jordan curve Γ carries sets of measure zero on the circle onto sets of linear measure zero on Γ. Thus the theme was illustrated that classical function theory can be applied to functional analysis and conversely.

R.-O.BUCHWEITZ: Weierstraßpunkte und Deformationen unverzweigter Kurvensingularitäten

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Sei $x \in X$ ein Weierstraßpunkt und

$$H(x) = \{n \in \mathbb{N}: \text{ Es gibt } f \in \mathfrak{M}(X) \text{ mit } \operatorname{ord}_x f = -n, \; f|_{X-\{x\}} \text{ holomorph}\}.$$

Es ist eine auf Hurwitz zurückgehende Frage, welche Unterhalbgruppen von $\mathbb{N}$ als $H(x)$ auftreten können.

Es sollen in diesem Vortrag einige neuere Ergebnisse dargestellt werden. Diese Ergebnisse beruhen auf einer Konstruktion von Pinkham, die einen Zusammenhang zwischen den Moduln platter Deformationen des Halbgruppenringes $k[H]$ und den Moduln Riemannscher Flächen mit einem Weierstraßpunkt der Halbgruppe H herstellt.

Dieser Ansatz eignet sich darüber hinaus zur Untersuchung von Automorphismen punktierter Riemannscher Flächen.

H.GRUNSKY: Funktionen mit positivem Realteil in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet

Ergebnisse von Carathéodory aus dem Jahre 1908 betr. die Koeffizienten einer Potenzreihe, die im Einheitskreis eine Funktion mit positivem Realteil darstellt, werden unter Benutzung einer Methode von Nehari aus dem Jahre 1948 auf Funktionen in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet übertragen.

K.-H.INDLEKOFER: Permanenz von Summierungsverfahren und äquivalente Potenzreihen

Die Matrix $A = (a_{n\nu})$, $a_{n\nu} \in \mathbb{C}$ $(n,\nu = 0,1,2,\ldots)$, definiere eine Abbildung $A: \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\{a_\nu\} \mapsto \{b_n\}$, durch $b_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} a_\nu$

$(n = 0,1,2,\ldots)$. Im Vortrag wird zunächst eine Beziehung zwischen den "Zeilennormen" und den "Spaltennormen" der Matrix A gegeben. Es gilt

Satz 1. Es existiere ein $K > 0$, so daß $\sum\limits_{\nu \leq Kn} |a_{n\nu}| \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. Dann ist

$$\sup_{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = \infty .$$

Als Anwendungen dieses Satzes läßt sich zeigen

Satz 2. Sei f eine Funktion mit den Eigenschaften

(i) f ist holomorph für $|z| < R$, $R > 1$;

(ii) $|f(z)| < 1$ für $|z| \leq 1$, $z \neq 1$;

(iii) $f(1) = 1$.

Dann ist das durch f erzeugte Euler-Summierungsverfahren genau dann permanent, wenn gilt:

(iv) In der Reihenentwicklung $(\alpha := f'(1))$

$$f(z) - z^{\alpha} = ai^{p}(z-1)^{p} + o((z-1)^{p}) \quad \text{für } z \to 1$$

ist $\mathrm{Re}\, a \neq 0$.

Satz 3. Es sei $|\phi_0| < 1$. Im $\phi_0 \neq 0$ und $(z) = \frac{1-\bar{\phi}_0}{1-\phi_0} \; \frac{z-\phi_0}{1-\bar{\phi}_0 z}$. Dann existiert eine Funktion F,

(a) die holomorph für $|z| < 1$ ist,

(b) die analytisch fortsetzbar über $|z| = 1$, $z \neq 1$, ist,

(c) deren Maclaurinreihe $F(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ bei $z = 1$ konvergiert,

(d) deren äquivalente Potenzreihe

$$F(\phi(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

bei $z = 1$ divergiert.

Mit Ergebnissen von Aronszajn läßt sich Satz 3 noch verschärfen.

(Der Vortrag gibt zum großen Teil Resultate wieder, die gemeinsam mit Herrn R. Trautner gefunden wurden.)

G.JANK: Ein Analogon zum Satz von Hadamard bei Funktionen mit unendlicher Wachstumsordnung

Für Funktionen mit endlicher iterierter Wachstumsordnung (vgl. A. Schönhage, Math. Z. 73, 22-44) wird eine Faktorisierung analog zum Satz von Hadamard bei Funktionen endlicher Ordnung angegeben. Dabei wird für die Folge der Nullstellen ein verallgemeinerter Konvergenzexponent über die bekannte Reihenvergleichsskala so definiert, daß dieser gleich dem Wachstum eines bestimmten Weierstraß-Produktes ist. Weiter wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß das Wachstum einer ganzen Funktion durch das entsprechende Weierstraß-Produkt bestimmt wird.

W.LUH: Über cluster sets analytischer Funktionen

Die Funktion f sei analytisch im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, es sei $z_0 \in \partial G$ und $B \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge. Als (verallgemeinertes) cluster set der Funktion f bzgl. G, z_0 und B wird folgende Funktionenmenge bezeichnet:

$$S(f,G,z_0,B) := \{\phi : B \to C : \exists \{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty},\ g_n(z) \text{ analytisch auf } B,\ g_n(z) \in G,\ g_n(z) \to z_0 \text{ für } z \in B,\ f(g_n(z)) \underset{B}{\Rightarrow} \phi(z)\} .$$

Diese Menge ist stets eine Teilmenge der Klasse A(B) aller auf B stetigen, im Innern von B analytischen Funktionen. Wir stellen die Frage nach Funktionen mit "großen" cluster sets. Bezeichnen wir mit M die Klasse aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$, deren Komplement zusammenhängend ist, so gelten die beiden folgenden Sätze.

Satz 1. Es gibt eine ganze Funktion f mit der Eigenschaft, daß für jede Menge $B \in M$ gilt: $S(f,C,\infty,B) = A(B)$.

Satz 2. Es gibt eine in $E := \{z: |z| < 1\}$ analytische Funktion f mit der Eigenschaft, daß für jedes $z_0 \in \partial E$ und jede Menge $B \in M$ gilt: $S(f,E,z_0,B) = A(B)$.

A.STEINER: Eine Integralgleichung für Randfunktionen

Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Funktion $f \in L^2(-a,a)$ Abschnitt der Randfunktion einer Hardyklassfunktion $f(z) \in H^2$ der oberen Halbebene sei, ist das Erfülltsein der Integralgleichung

$$(1) \qquad r(x) := f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{iux} \int_{-a}^{a} e^{-iut} f(t)\, dt\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|>a} f_1(t) \frac{1}{t-x}\, dt$$

etwa für $x \in (0,a)$ durch die Fortsetzung f_1. Durch geeignete Variablentransformation geht (1) mit beliebiger quadratisch integrierbarer linker Seite $r \in L^2(0,a)$ über in die Stieltjessche Integralgleichung

$$(2) \qquad \rho(\xi) = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \phi(\tau) \frac{1}{\xi+\tau}\, d\tau \,, \qquad \phi = 0 \quad \text{auf } (2,\infty)\,,$$

die man durch Anwendung der Mellintransformation auflöst. Eine geometrische Deutung ist möglich.

St.TIMMANN: Die Einheitskugel im Raum der Schottky-Differentiale

Sei $\bar{X}$ eine endliche Riemann-Fläche vom Geschlecht g mit r Randkomponenten. Γ sei der Rand von $\bar{X}$. Die Schottky-Differentiale von $\bar{X}$ sind genau die auf $\bar{X}$ holomorphen und auf Γ reellen Differentiale. Sie bilden einen reellen Vektorraum $\Sigma(\bar{X})$ der Dimension $\hat{g} = 2g+r-1$. Als Norm auf $\Sigma(\bar{X})$ betrachtet man: $\|\omega\| := \int_\Gamma |\omega|$.

Es wurde gezeigt, daß die Einheitskugel $B = \{\|\omega\| \leq 1\}$ keine isolierten Extremalpunkte besitzt und daß zwei maximale konvexe Teilmengen der Einheitssphäre $S = \{\|\omega\| = 1\}$ entweder disjunkt oder identisch sind.

Unter Benutzung einer speziellen Fassung des Satzes von Riemann-Roch (für endliche Riemann-Flächen) wurde ferner ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der Nullstellen eines Schottky-Differentials $\omega \in S$ auf Γ und der Dimension der Kanten von S aufgezeigt, auf denen ω liegen kann.

Aus dem Vorhandensein bestimmter Kanten von S folgt die Existenz gewisser reeller Schlitzabbildungen von $\bar{X}$.

Diese Resultate verschärfen bzw. verallgemeinern Ergebnisse von P.R. Ahern ("On the geometry of the unit ball in the space of real annihilating measures", Pacific J. Math. 28 (1969), 1-7).

R.TRAUTNER: Glättung analytischer Funktionen (Moment-Multiplikatoren für Potenzreihen)

Sei G ein sternförmiges Gebiet mit $\tilde{\delta}(z) \leq K\cdot\delta(z)$, wobei $\delta(z)$ bzw. $\tilde{\delta}(z)$ den Abstand bzw. den radialen Abstand von $z \in G$ zu ∂G bezeichne. Sei $P(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ analytisch in G mit Mittag-Leffler-Stern $\mathfrak{M}_P$. Als Verallgemeinerung des Riemann-Liouvilleschen Integrationsoperators I^α werden Momentoperatoren T^{μ} eingeführt, die erklärt sind durch $(T^{\mu}P)(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n \mu_n z^n = \int_0^1 P(z\cdot t)\,d\mu(t)$, wobei $\mu_n = \int_0^1 t^n\,d\chi(t)$ Hausdorff-Momente einer Funktion $\chi \in BV[0,1]$ sind. Es wird gezeigt, daß zu P stets ein geeigneter Momentoperator T^{μ} existiert, so daß gilt:

A. $T^{\mu}P$ hat stetige Randwerte in G (oder sogar beliebig differenzierbare Randwerte);

B. $\mathfrak{M}_{T^{\mu}\tilde{P}} = \mathfrak{M}_{\tilde{P}} = \mathfrak{M}_{T^{1/\mu}\tilde{P}}$ für jede beliebige Potenzreihe $\tilde{P}$.

Die Eigenschaft A bedeutet die Glättung von P, die Eigenschaft B heißt, daß die Mittag-Leffler-Sterne unverändert bleiben (T^{μ} zerstört keine Singularitäten, $T^{1/\mu}$ führt keine neuen Singularitäten ein, $(T^{1/\mu}P)(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n} z^n$).

<u>Anwendungen</u>

1. Beweisvereinfachung bei Sätzen aus der Theorie der analytischen Fortsetzung (Bsp. Steinhaus-Boerner, Pringsheim, Interpolationssätze);

2. Erweiterung des Begriffs der Hadamardschen Singularitätenordnung;

3. Neue Beschreibung der Topologie im Raum der in G analytischen Funktionen.

K.UMGEHER: <u>Zur Existenz multivalenter Lösungen von linearen Differentialgleichungen</u>

Es werden Differentialgleichungen der Form

$$w^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i w^{(i)} = 0 \quad \text{in } |z| < 1 \text{ und } \sigma_i \in H^p \quad (p = 1 \text{ bzw. } p = \infty)$$

untersucht. Gezeigt wird, daß im Falle $p = \infty$ alle Lösungen multivalent sind. Im Falle $p = 1$ ist dies mit einer Einschränkung an σ_{n-1} ebenfalls richtig.

Der Beweis beruht auf einer hinreichenden Bedingung für multivalente Funktionen und auf Nullstellenaussagen von W.J. Kim und Z. Nehari.

E. Mues (Karlsruhe)