MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 9/ 1977

Partielle Differentialgleichungen

27.2. - 5.3.1977

Tagungsleiter: E. Heinz (Göttingen), G. Hellwig (Aachen)

An dieser neunten Tagung über partielle Differentialgleichungen nahmen 55 Gäste teil. Es wurden aus den verschiedensten Teilgebieten der partiellen Differentialgleichungen, z.B. über Regularitätsfragen für die Navier-Stokesschen Gleichungen, für die Maxwellschen Gleichungen, für Minimalflächen und über Themen aus der Störungstheorie insgesamt 37 Vorträge gehalten.

Nicht zuletzt durch die vorbildliche Betreuung durch das Institut hatte die Tagung einen sehr harmonischen Verlauf.

Teilnehmer

Acker, A.F. (Karlsruhe)
Alt, H.W. (Heidelberg)
Alt, W. (Heidelberg)
Bazley, N.W. (Köln)
Bemelmans, J. (Bonn)
Böhme, R. (Erlangen)
Brelot, M. (Paris)
Brenner, P. (Göteborg)
Brüning, J. (Marburg)
Bureau, F. (Liège)
Dziuk, G. (Aachen)
Eckardt, K.-J. (München)
Fichera, G. (Rom)
Friedrich, N. (Saarbrücken)
Gerhardt, C. (Heidelberg)
Glassey, R. (Bloomington)
Goelden, H.-W. (Aachen)
Grabmüller, H. (Darmstadt)
Haack, W. (Berlin)
Hainzl, J. (Kassel)

Heinz, E. (Göttingen)
Hellwig, G. (Aachen)
Hess, P. (Zürich)
Hildebrandt, St. (Bonn)
Hölder, E. (Mainz)
Illner, R. (Kaiserslautern)
Jäger, W. (Heidelberg)
Kaul, H. (Bonn)
Kielhöfer, H. (Stuttgart)
König, M. (München)
Landes, R. (Bochum)
Lewerenz, F. (Göttingen)
Lvov, V. (z.Zt. Bonn)
Müller, Cl. (Aachen)
Müller, D. (Göttingen)
Nitsche, J.C.C. (Minneapolis)
Pao, C.V. (z.Zt. Graz)
Pecher, H. (Wuppertal)
Schneider, M. (Berlin)
Simader, C.G. (Bayreuth)
Smyrnelis, E. (Paris)
Sperner, E. (Bochum)
Tomi, F. (Saarbrücken)
Vesellič, K. (Dortmund)
Vogelsang, V. (Clausthal-Zellerfeld)
von Wahl, W. (Bochum)
Walter, J. (Aachen)
Walter, W. (Karlsruhe)
Weidmann, J. (Frankfurt)
Weinacht, R.J. (z.Zt. Darmstadt)
Widmann, K.-O. (Linköping)
Werner, P. (Stuttgart)
Wiegner, M. (Bochum)
Wienholtz, E. (München)
Wüst, R. (Berlin)

Vortragsauszüge

Andrew F. Acker: Freie Randoptimierungsaufgaben bei elliptischen Differentialgleichungen

We prove isoperimetric inequalities involving capacitance (or heat flow) on doubly-connected regions whose inner boundary component is fixed. For any doubly-connected region $R(\Gamma_*,\Gamma)$ in R^2 (whose inner and outer boundary components are the Jordan curves Γ_* and Γ), let $A(\Gamma_*,\Gamma)$ be the area weighted by $a^2(p)$ (with $a(p) > 0$ continuous on R^2), let $U(\Gamma_*,\Gamma;p)$ be the harmonic measure on $R(\Gamma_*,\Gamma)$, and let the heat flow across $R(\Gamma_*,\Gamma)$ be defined by $H(\Gamma_*,\Gamma) := \int_\gamma \frac{\partial}{\partial n} U(\Gamma_*,\Gamma;p)\cdot|dp| > 0$,

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$\gamma \subset R\ (\Gamma_*, \Gamma)$ any smooth curve encircling Γ_*.

Theorem: Assume Γ_* is the graph in polar coordinates about $p_o \in R^2$ of a continuous function $r_*(\theta) > 0$ and that $\lambda \cdot a(p_o + \lambda \cdot p)$ is monotone increasing in λ on $(0,\infty)$ for each $p \in R^2$. Then: (a) For any constant $c > 0$, there exists a unique region $R(\Gamma_*, \Gamma_c)$ such that for each $p \in \Gamma_c$ (and for $p' \in R(\Gamma_*, \Gamma_c)$) we have: $\lim_{p' \to p} |\nabla U(\Gamma_*, \Gamma_c; p)| = c \cdot a(p)$. (b) For any constant $A > 0$ there is a $c > 0$ such that $A(\Gamma_*, \Gamma_c) = A$. If $R(\Gamma_*, \overline{\Gamma})$ is any other region (with the same inner boundary Γ_*) such that $A(\Gamma_*, \overline{\Gamma}) \leq A$ and $\overline{\Gamma} \neq \Gamma_c$, then $H(\Gamma_*, \overline{\Gamma}) > H(\Gamma_*, \Gamma_c)$. Thus, Γ_c is uniquely heat flow minimizing at the weighted area A.

H.W. Alt: Regularitätssätze für ein Problem mit freiem Rand

Es wird ein stationäres Problem für die Strömung in homogenen porösen Medien betrachtet. Das Filtergesetz von Darcy führt zur Gleichung

$$(*) \quad \int_\Omega (\nabla u + I(A)\, e)\, \nabla \zeta = 0 \quad \text{für} \quad \zeta \in C_0^\infty (\mathbb{R}^n \setminus \overline{S}).$$

Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit gewissen Bedingungen, e der vertikale Einheitsvektor und S der für die Flüssigkeit durchlässige Teil des Randes, sowie

$$u \in H^{1,2}(\Omega)\ ,\ u = u^o \ \text{auf}\ S\ ,\ u = 0 \ \text{auf}\ \Omega \setminus A,$$

wobei A den durchströmten Bereich kennzeichnet. Es gilt der Existenzsatz: Es gibt genau ein minimales Lösungspaar (u,A) von $(*)$.

Dann gibt es eine Funktion $g: \Omega^* \to \mathbb{R}$ mit einer offenen Menge $\Omega^* \subset \mathbb{R}^{n-1}$, so daß

$$A = \{(y,h) \in \Omega \; / \; h \leq g(y)\}$$

ist. Im allgemeinen ist g nur eine meßbare Funktion. Der Regularitätsbeweis für den freien Rand $\Omega \cap \partial A$ zerlegt sich in folgende Schritte:

1) Das Lebesgue-Maß von $\Omega \cap \partial A$ ist Null. Diese Aussage ist auch schon mit dem Existenzbeweis verbunden.

2) g hat gewisse Stetigkeitseigenschaften. Zum Beweis dieser Tatsache nutzt man aus, daß sich das Problem lokal auf eine Variationsungleichung zurückführen läßt.

3) g ist Lipschitz stetig. Dies beweist man mit Hilfe von Maximumprinzipien.

4) g ist reell analytisch. Dies folgt dann nach Arbeiten von Caffarelli, Kinderlehrer und Nirenberg.

N.W. Bazley: Faedo-Galerkin Approximations for Evolution Equations with Reproducing Nonlinearities

We consider an evolution equation of the form $\frac{du}{dt} + Au + N(u) = f$, $u(0) = g$, in a Hilbert space $\mathcal{H}$. Here A is an unbounded linear self-adjoint operator and N is a nonlinear operator which is "reproducing relative to a complete ortho-normal sequence $\{u_i\}$"; that is,

$N(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i$, where the β_i's are assumed to be explicitly known functions of the α_j's given by

$\beta_i = \beta_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ for $i=1,\ldots,m$.

We show that the true solution can be approximated by the solutions of a coupled system of explicitly known ordinary nonlinear differential equations. The method can be extended to separate variables in nonlinear oscillation problems, including the well known equation of Fermi, Pasta, and Ulam.

J. Bemelmans: Instationäre Navier-Stokes-Gleichungen

Das Problem, die Strömung einer zähen Flüssigkeit um einen Körper zu beschreiben, besteht darin, die Navier-Stokes-Gleichungen in einem Außenraum $\mathfrak{E}$ zu lösen unter der Bedingung, daß die Geschwindigkeit im Unendlichen gegen einen vorgegebenen, nicht verschwindenden Wert strebt. Im stationären Fall ist dies der Gegenstand der von R. Finn gelieferten Theorie der PR-Lösungen. Will man nun solche Eigenschaften dieser Lösungen untersuchen, die das Studium der instationären Gleichungen erforderlich machen (z.B. Erreichbarkeit der Lösung, Stabilität), so zeigen Energieabschätzungen, daß die von E. Hopf initiierte Existenztheorie i.a. nicht zum Ziel führt, da die Endlichkeit der $L_2(\mathfrak{E})$ - Norm der Lösungen vorausgesetzt wird. Wir beweisen daher einen Existenzsatz für das instationäre Problem, ohne eine Bedingung an die $L_2(\mathfrak{E})$ - Norm zu stellen, indem wir zeigen, daß die Oseen-Linearisierung eine Halbgruppe im Raum $C^{0+\alpha}(\bar{\mathfrak{E}})$ erzeugt, wie sie W. von Wahl eingeführt hat. Geeignete Abschätzungen lassen dann zu, daß der Existenzsatz von H. Kielhöfer angewendet werden kann.

R. Böhme: Generische Endlichkeit der Lösungen des Klassischen Plateauproblems

Sei $g: S^1 \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve, B der offene Kreis $\subset \mathbb{R}^2$,
$m(g) := \{x: \bar{B} \to \mathbb{R}^3 \mid$ zu x existiert ein
$u: \partial B = S^1 \to S^1$ topologisch, so daß $x = g \circ u$,

$\Delta x = 0$ in B, $|x_u| = |x_v|$ in B, $x_u \cdot x_v = 0$ in B,

x normiert}.

Wann ist $m(g)$ endlich? Es gilt Theorem (A.J. Tromba, R. Böhme): Sei $M > 2\pi$,

$$n > 4M, \text{ sei } \mathscr{C}^n := \{g: S \to \mathbb{R}^3 \mid g \in H^{n-\frac{1}{2}}(S^1), \; |g'| \equiv 1 \text{ auf } S^1\}$$

$$\mathscr{C}^n_M := \{g \in \mathscr{C}^n \mid \text{Totalkrümmung} < M\}.$$

Dann existiert eine offene und dichte Teilmenge $\mathscr{C}^n_{M,*}$ in $\mathscr{C}^n_M$, so daß gilt:

$$m(g) \text{ ist endlich für alle } g \in \mathscr{C}^n_{M,*}.$$

Marcel Brelot: <u>Weinstein Partielle Differentialgleichung und Marcel Riesz Potentiale</u>

Die Gleichung $\Delta u + \frac{k}{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$ in dem Halbraum $(x_n > 0)$, die sehr wichtig in der Mechanik ist, wird mit Hilfe der Axiomatik der Potentialtheorie studiert: Integraldarstellung der Lösungen, Verhalten am Rande (Fatou Typ Sätze); was früher nicht möglich war, es werden unerwartete Beziehungen mit den M. Riesz Potentialen hergeleitet.

Philip Brenner: <u>L_p-L_p'-estimates for hyperbolic equations</u>

Local and semi-global L_p-L_p'-estimates of some Fourier Integral Operators are discussed, and a method of proof is scetched. Applications to semi-linear hyperbolic equations and Finiteelement approximations, using B-splines, of such equations are discussed. Finally, the possibility of having an extension to global estimates is mentioned.

J. Brüning: Knoten von Eigenfunktionen des Laplaceoperators

Es sei M eine kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Dimension 2 mit oder ohne Rand. Es seien $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ bzw. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die Eigenwerte des Laplace-Beltramioperators Δ (zum Dirichletproblem, falls $\partial M \neq \emptyset$). Es wird zunächst gezeigt, daß die Nullstellen (= Knoten) von φ_n aus endlich vielen C^∞ Kurven bestehen, die entweder geschlossen sind oder Randpunkte verbinden und sich stets unter gleichen Winkeln schneiden (im wesentlichen wohlbekannt). Bezeichnet L_n die Länge der Knoten von φ_n, so wird dann gezeigt, daß es eine Konstante $c > 0$ gibt derart, daß

$$L_n \geq c\sqrt{\lambda_n}\ , \ n \in \mathbb{N} .$$

Der Beweis benutzt das Variationsprinzip von Courant und die Ungleichung von Faber-Krahn.

G. Dziuk: Das asymptotische Verhalten der Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme an Ecken eines Gebietes

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, das lokal von zwei regulären Bögen Γ_1, Γ_2 der Klasse C^3 berandet wird, die im Ursprung einen inneren Winkel $0 < \alpha\pi \leq 2\pi$ bilden. Dann gilt der Satz:

$x(u,v) \in (C^0(\bar{D}) \cap C^2(D))^n$ erfülle in D das System

$$\Delta x = f(u,v,x,\nabla x) \quad \text{mit} \quad x\big|_{\Gamma_1} = x\big|_{\Gamma_2} = 0.$$

Es sei $|f(u,v,x,p)| \le a\,|p|^2 + b$

für $(u,v) \in \bar{D}$, $|x| \le \max\limits_{\bar{D}} |x|$, $p \in \mathbb{R}^{2n}$.

Dann ist $x \in C^{0,\frac{1}{\alpha}}(\bar{U})$, falls $1 \le \alpha \le 2$ ist und

$x \in C^{1,\mu}(\bar{U})$, falls $0 < \alpha < 1$ ist

und zwar mit $\mu = \frac{1}{\alpha} - 1$, falls $\frac{1}{2}<\alpha<1$;

$\mu \in (0,1)$ beliebig,

falls $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ ist.

$\bar{U} = \bar{D} \cap \{|(u,v)| \le \varrho\}$, $\varrho > 0$ geeignet.

Klaus-Jürgen Eckardt: <u>Zur Streutheorie für die Klein-Gordon-Gleichung</u>

Für die Klein-Gordon-Gleichung

$$\partial_t^2 u - \Delta u + \mu^2 u + 2iq_o\partial_t u - q_o^2 u + q_s u = 0$$

werden die Existenz der Wellenoperatoren

$$W_\pm = \operatorname*{s-lim}_t e^{itB}\, J\, e^{-itA}$$

und deren Vollständigkeit durch Anwendung der stationären Methode bewiesen. Dabei bezeichnet A den ungestörten und B den gestörten Hamilton-Operator. Die Bedingungen an das elektrostatische Potential q_o und das Potential q_s sind so, daß mittels der Lippmann-Schwinger-Gleichung verallgemeinerte Eigenfunktionen gefunden werden können, mit deren Hilfe wiederum partielle Isometrien $F^\pm$ konstruiert werden, die schließlich die unitäre Äquivalenz von A und B_{ac} und die Wellenoperatoren liefern.

Gaetano Fichera: <u>C^1 solutions of the Dirichlet problem in a domain with conical points</u>

Let A be a bounded domain of the r-dimensional cartesian space. Let x^o be a conical point of ∂A. Consider the Dirichlet problem: $\Delta_2 u = f$ in A, $u = 0$ on ∂A. Necessary conditions and sufficient conditions are given for f in order the variational solution u of the above problem to be C^1 in $\bar{A} \cap B_R(x_o)$ where $B_R(x_o)$ is the ball of center x_o and radius R (suitably small).

Norbert Friedrich: <u>Lösung einer 2-ten Randwertaufgabe für die Schwingungsgleichung beim halbunendlichen Ringkanal</u>

Man betrachte 2 koaxial angeordnete Zylinder, wobei der innere sich beidseitig ins Unendliche erstreckt und der äußere nur einseitig unendlich ausgedehnt ist. Auf den Zylinderwänden wird das Verschwinden der Normalableitungen gefordert. Im Abstand $L > 0$ von der Mündung des Ringkanals befinde sich transversal eine mit Normalgeschwindigkeit belegte Fläche. Gesucht wird eine Lösung der Schwingungsgleichung $(\Delta + k^2)\varphi = 0$, die zusätzlich der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt. Das Problem wird mit Fouriertransformation für temperierte Distributionen und der Wiener-Hopf-Methode angegangen. Die Lösbarkeitsfrage wird schließlich abgewälzt auf die Diskussion eines unendlichen Gleichungssystems für die Entwicklungskoeffizienten der Lösung nach den Eigenfunktionen in dem halboffenen Ringkanalresonator. Bis auf höchstens abzählbar viele isolierte Werte $L > 0$ besitzt das Problem stets eine eindeutig bestimmte Lösung. Wenn L genügend groß ist, läßt sich eine gute Näherung angeben.

Physikalischer Hintergrund: Triebwerksbau, Lasertheorie.

Claus Gerhardt: Randwertprobleme für H-Flächen

Wir beweisen, daß das Variationsproblem

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Dv|^2}\, dx + \int_\Omega \int_0^v H(x,t)\, dtdx + \int_{\partial\Omega} |v-\varphi|\, dH_{n-1}$$

$$\to \min \quad \forall\, v \in H^{1,1}(\Omega)$$

global Hölderstetige Lösungen besitzt, falls H der Bedingung $\frac{\partial H}{\partial t} \geq K > 0$ genügt.

Robert Glassey: Über Lösungen nichtlinearer Schrödinger Gleichungen

Das Anfangswertproblem für die Gleichung

$$i\, \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^{p-1}u \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

wird betrachtet. Es wird bewiesen, daß es Lösungen gibt, die im Großen nicht existieren, vorausgesetzt, daß $p > 1 + \frac{4}{n}$ ist. Das asymptotische Verhalten der Lösungen der Hartree Gleichung wird auch betrachtet.

Hans Grabmüller: Singuläre Störungstheorie für eine lineare Integrodifferentialgleichung vom Faltungstyp

Der Prozeß der verallgemeinerten Wärmeleitung in Medien mit Gedächtnis wird gemäß J. NUNZIATO durch den linearen partiellen Integro-Differentialoperator M_ε erfaßt:

$$M_\varepsilon[u] \equiv (k+D_t)u(x,t) + \varepsilon\{c\Delta u + \int_0^\infty [k_0(t-s)\Delta + k_1(t-s)(k+D_s)]u(x,s)ds\}.$$

Hierbei ist ε^{-1} der Koeffizient der Wärmekapazität; $k > 0$ und $c \neq 0$ sind gegebene Konstanten. Ziel unserer Untersuchungen ist die Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} M_\varepsilon[u] = \varepsilon r(x,t) & \text{für } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ , \\ u(j,t) = g_j(t) & \text{für } t \geq 0;\ j = 0,1 , \\ u(x,0) = h(x) & \text{für } x \in (0,1) , \end{cases}$$

unter der Annahme $0 < \varepsilon << 1$. Mit Methoden der singulären Störungstheorie zeigen wir, daß das Problem (P_ε) eine eindeutig bestimmte klassische Lösung u besitzt, die in der Form

$$u(x,t;\varepsilon) = \bar{u}(x,t;\varepsilon) + Z(x,t;\varepsilon)$$

darstellbar ist. Die Näherungslösung $\bar{u}$ läßt sich hierbei explizit angeben. Die Restfunktion Z strebt für $\varepsilon \to 0+$ von der Ordnung ε^m gegen Null, und zwar gleichmäßig in $x \in [0,1]$ und in $t \geq 0$. Der Exponent m wird durch Differenzierbarkeitseigenschaften der Vorgaben h und r bestimmt.

Heinz-Willi Goelden: Über die Nichtentartung des Grundzustandes bei Schrödinger-Operatoren

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$ geeignet) ein Gebiet, $V: G \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, $\mathcal{L}$ der formale Schrödinger-Operator $\mathcal{L} := -\Delta + V$ und T_0 die Friedrichs-Fortsetzung von $(-\Delta)\restriction C_0^\infty(G)$ im Hilbertraum $H := L^2(G)$.

1975 haben W.G. Faris und B. Simon auf die Frage, ob für gewisse ausgezeichnete selbstadjungierte und nach unten halbbeschränkte Realisierungen L von $\mathcal{L}$ die Aussage

(*) Ist $\lambda_0 :=$ inf spectrum (L) ein Eigenwert von L, so ist λ_0 ein einfacher Eigenwert, und jedes zugehörige reelle Eigenelement ist strikt positiv oder strikt negativ.

gilt, durch den

Satz: Sei $V \in L^1_{loc}(G)$ reellwertig, wobei $\pm V_- \leq aT_o + bE$ mit geeigneten $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < 1$ ist. Dann besteht für die Formsumme $T_o \dotplus V$ die Aussage (*).

eine Antwort gegeben. Mittels einer abstrakten Kato'schen Ungleichung kann man auch folgendes beweisen.

Satz: Sei $V \in L^2_{loc}(G)$ reellwertig und $T := (T_o + V) \upharpoonright C_o^\infty(G)$ halbbeschränkt nach unten. Dann besteht für die Friedrichs-Fortsetzung T_F von T die Aussage (*).

Peter Hess: Nichtlineare Störungen linearer elliptischer und parabolischer Probleme im Resonanzfall

Es wird die Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen der Form (*) $Lu + g(u) = f$ in einem geeigneten Hilbertraum H diskutiert. Dabei bezeichnet L entweder einen linearen, gleichmäßig elliptischen selbstadjungierten Differentialoperator 2ter Ordnung (definiert im beschränkten Gebiet $\Omega \subset R^N$), oder einen entsprechenden parabolischen Operator mit Periodizitätsbedingung $u(O) = u(T)$ $(T > O$ gegeben). Bekanntlich hat L kompakte Resolvente; es wird vorausgesetzt, daß L nichttrivialen Kern $N(L)$ hat. Ferner sei $g: R \to R$ eine stetige beschränkte Funktion. Falls die Grenzwerte $g_\pm := \lim_{s\to\pm\infty} g(s)$ existieren mit $g_- \neq g_+$, geben Landesman-Lazer eine sowohl hinreichende als auch "fast notwendige" Bedingung an $f \in H$ für Lösbarkeit von (*) an. Ihr Resultat liefert jedoch keine Aussage für $g_- = g_+$ (= O oBdA). Wir studieren hier die Lösbarkeit von (*) in diesem letzteren Fall. Unter der Voraussetzung $\liminf_{s\to\pm\infty} s\,g(s) > O$ wird gezeigt, daß (*) eine Lösung besitzt für solche f, deren Komponente $\in N(L)$ "genügend klein" ist. Diese Untersuchung ist durch Arbeiten von Kazdan-Warner, Rabinowitz und Fučik-Krbec angeregt worden.

S. Hildebrandt: Der Lochfüller ist wieder da

Der "Lochfüller" ist eine von Widman (Manuscripta Math. 5, 299 - 308, (1971)) gefundene Technik, mit der man in gewissen Fällen a priori Schranken für (schwache) Lösungen elliptischer Gleichungssysteme oder zumindest Regularität beweisen kann. In Math. Z. 142, 67 - 86 (1975) haben Widman und Hildebrandt die Lochfülltechnik zum Nachweis der Hölderstetigkeit schwacher Lösungen $u \in H_2^1 \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ von Gleichungen

$$Lu := -D_\beta\{a^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u\} = f(x,u,\nabla u)$$

benutzt, wobei

$$\lambda|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad a^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega) \;,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, und

$$|f(x,u,p)| \leq a(M)|p|^2 + b(M) \quad \text{für} \quad |u| \leq M$$

vorausgesetzt wurde. Diese Ergebnisse wurden publiziert von Wiegner (Manuscripta Math. 15, 364 - 384, (1975) sowie 18, 279 - 297 (1976), und Math. Z. 147, 21 - 28 (1976)) sowie Widman-Hildebrandt (erscheint in Annali Scuola Norm.Sup.Pisa). Von Widman-Kaul-Hildebrandt (erscheint in Acta Math.) wurde ferner ein optimaler Regularitätssatz für "schwach" harmonische Abbildungen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten gefunden, der hier angegeben werden soll:

Sei $U: \mathcal{X} \to \mathcal{M}$ eine schwach harmonische Abbildung einer n - dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{X}$ in eine N - dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, deren Schnittkrümmung nach oben durch eine Konstante $\varkappa \geq 0$ abschätzbar ist. Sei ferner $U(\mathcal{X})$ in einer Kugel vom Radius M in $\mathcal{M}$ enthalten derart, daß $M < \pi/2\sqrt{\varkappa}$ ist. Dann ist U regulär und im klassischen Sinne harmonisch. Ein Beispiel zeigt, daß dieses Ergebnis für $n \geq 3$ optimal ist.

(Eine Abbildung $U: \mathcal{X} \to \mathcal{M}$ heißt schwach harmonisch, wenn sie die Gleichungen

$$\Delta_{\mathcal{X}} u^l + \Gamma^l_{ik}(u)\, \gamma^{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha u^i\, D_\beta u^k = 0\ , \quad 1 \le l \le N\ ,$$

im schwachen Sinn erfüllt, wobei $u = u(x)$ eine Darstellung von U in lokalen Koordinaten x bzw. u auf $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{M}$ bedeutet).

Reinhard Illner: <u>Eine Algebra von Pseudodifferentialoperatoren in $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit Symbol</u>

In $L^p(\mathbb{R}^n)$ wird die Algebra von L^p - beschränkten Pseudodifferentialoperatoren $\mathfrak{A}$ untersucht, die von L^p-Fouriermultipliers mit Symbol in

$$M^o := \{b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\ ;\ (1+|x|)^{|\alpha|} D^\alpha b(x) = O(1),\ |\alpha| \le [\tfrac{n}{2}] + 1\}\ ,$$

von Multiplikationsoperatoren mit Symbol in

$$A_\infty = \{a \in C^\infty \cap L^\infty\ ;\ \lim_{|x|\to\infty} |D^\alpha a(x)| = 0 \quad \forall\ \alpha \neq 0\}$$

und den kompakten Operatoren $\mathfrak{K}$ erzeugt wird. Es zeigt sich, daß $\mathfrak{A}$ eine Operator-Algebra mit Symbol mod $\mathfrak{K}$ <u>ist</u>, und es wird der Symbolraum $\mathbb{M}$ von $\mathfrak{A}$ bestimmt. Ist $A_o = \overline{M^o}$ und $A_1 = \overline{A}_\infty$ (bezüglich der sup-Norm), so sind A_o und A_1 kommutative B-Algebren mit Gelfandräumen $\mathbb{M}_2$ bzw. $\mathbb{M}_1$. Damit folgt $\mathbb{M} = \partial\,(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$.

Anwendung: Ist $A \in \mathfrak{A}$ und bezeichnet σ_A das Symbol von A, so ist A fredholmsch in L^p genau dann, wenn σ_A auf $\mathbb{M}$ nirgends verschwindet. Ist beispielsweise

$L = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ mit $a_\alpha \in A_\infty$, so folgt: $L: W_{p,m} \to L^p(\mathbb{R}^n)$ ist fredholmsch, wenn a) $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \eta^\alpha \neq 0$ $\forall\ x \in \mathbb{M}_1$ und $\forall\ \eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| = 1$,

und b) $\liminf_{|x|\to\infty} \left| \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\cdot \xi^\alpha / (1+\xi^2)^{\frac{m}{2}} \right| > 0\ , \quad \forall\ \xi \in \mathbb{M}_2$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Willi Jäger: Das Randverhalten von Flächen beschränkter mittlerer Krümmung bei $C^{1,\alpha}$ - Rändern

Sei K_1 der offene Einheitskreis und $x \in C^2(K_1,\mathbb{R}^n) \cap C^0(\bar{K}_1,\mathbb{R}^n)$ sei Lösung des Systems

$$|\Delta x| \le c\ |\nabla x|^2 ,$$

$$|\partial_1 x| = |\partial_2 x| , \quad \partial_1 x \cdot \partial_2 x = 0 \quad \text{in} \quad K_1 .$$

Γ sei ein abgeschlossenes reguläres Kurvenstück der Klasse $C^{1,\alpha}$ und $\partial^* K_1$ ein offenes Teilstück von ∂K_1. Die Abbildung x bilde $\partial^* K_1$ in Γ ab. Es wird folgende Frage behandelt: Ist x bis zum Rand $\partial^* K_1$ in der Klasse $C^{1,\alpha}$ und läßt sich die $C^{1,\alpha}$ - Norm abschätzen?

Dies gelingt unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß x quadratisch integrierbare Ableitungen besitzt.

Flächen beschränkter mittlerer Krümmung in $\mathbb{R}^3$ genügen dem angegebenen System, falls die Parametrisierung konform ist.

Das erzielte Theorem verallgemeinert Regularitätssätze von Hildebrandt, Heinz und Tomi. Für Minimalflächen wurde es von J.C.C. Nitsche bewiesen. In seiner Arbeit über das Randverhalten von Lösungen elliptischer Systeme in isothermen Parametern konnte Heinz die entsprechende Aussage für $C^{2,\alpha}$ - Kurven beweisen, allerdings ohne die genannte zusätzliche Voraussetzung.

Manfred König: Eine kritische Bemerkung zur Schauderschen Beweistheorie

$\Gamma^{2,\alpha}$ sei die Klasse der im $\mathbb{R}_n$ beschränkten Gebiete S, deren Rand ∂S aus $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, ist.

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\, u_{x_i x_k}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i}(x) + a(x)u(x) \quad \text{mit} \quad a \le 0$$

sei ein stark elliptischer Operator mit Koeffizienten aus C^{α}. Im ersten Teil des Vortrages wird vorausgesetzt, es sei der folgende Satz bereits bewiesen (Satz von Kellogg): Für beliebiges $G \in \Gamma^{2,\alpha}$ besitzt das Randwertproblem $\Delta u = f,\ u|_{\partial G} = g$ für alle $(f,g) \in C^{0,\alpha}(\bar{G}) \times C^{2,\alpha}(\partial G)$ eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\bar{G})$. Es wird dann bemerkt, daß aus diesem Satz dann die nachfolgenden Aussagen folgen: 1.) Für alle $G \in \Gamma^{2,\alpha}$ existiert ein $C_1(G) > 0$, so daß für alle $u \in C^{2,\alpha}(\bar{G})$ die Ungleichung $\| u \|_{2,\alpha,G} \le C_1(G)\{\| \Delta u\|_{0,\alpha,G} + \| u \|_{2,\alpha,\partial G}\}$ gilt. 2.) Zu $G \in \Gamma^{2,\alpha}$ existiert ein $C_2(G) > 0$, so daß für alle $u \in C^{2,\alpha}(\bar{G})$ und alle $t \in [0,1]$ die Ungleichung $\| u \|_{2,\alpha,\partial G} \le C_2(G)$ $\{\| t\Delta u + (1-t)Lu\|_{0,\alpha,G} + \| u \|_{2,\alpha,\partial G}\}$ gilt. 3.) Es existiert eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\bar{G})$ des Problems $Lu = f,\ u|_{\partial G} = g$.

Im zweiten Teil des Vortrages wird ein neuer Beweis des obigen Satzes skizziert, der gegenüber den bekannten Beweisen nicht von der Schauderschen a priori Abschätzung Gebrauch macht. Die wichtigsten Hilfsmittel in diesem Beweis sind: Die genaue Kenntnis der Lösung des Dirichletproblems für die Halbkugel und das nachfolgende Lemma: Vor.: E sei Banachraum, $T: E \to C^{2,\alpha}(\bar{G})$ linear, $I : C^{2,\alpha}(\bar{G}) \to C^{0,0}(\bar{G})$ die nat. Einbettung. Beh.: Ist $I \circ T : E \to C^{0,0}(\bar{G})$ stetig, dann ist $T : E \to C^{2,\alpha}(\bar{G})$ stetig.

Vitalij Lvov: <u>Über die Störung zäher inkompressibler Flüssigkeiten durch einen Strom kleiner Teilchen</u>

Bei der Untersuchung der Bewegung von Suspensionen fester Teilchen in zähen inkompressiblen Flüssigkeiten entsteht die Aufgabe, das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit zu beschreiben, die von einer großen Anzahl N sich bewegender kleiner Teilchen durchsetzt ist. Da Lage und Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen statistischen Charakter haben, gilt dies auch für die

Lösungen.

Im Grenzübergang $N \to \infty$ leiten wir ein Gleichungssystem her, das sich als "Zweiflüssigkeitenmodell" für die Suspension auffassen läßt.

Claus Müller: Über die Randwerträume der Helmholtzschen Schwingungsgleichung

Zu einem Gebiet G, das zusammenhängend und genügend glatt berandet ist, werden die Paare der Randwerte $(U, \frac{\partial U}{\partial n})$ von Lösungen der Schwingungsgleichung innerhalb und außerhalb G betrachtet. Es werden Eigenschaften dieser mit R_i und R_a bezeichneten Randwerträume erhalten.

Systeme spezieller Lösungen der Schwingungsgleichung liefern Approximationssätze vom "Runge-Typ", die einschließlich des Randes gelten und Ausgang numerischer Verfahren sind.

Johannes C.C. Nitsche: The Higher Regularity of Liquid Edges in Aggregates of Minimal Surfaces

Since the investigations of J.A.F. Plateau and E. Lamarle a century ago and clarifying work by J.E. Taylor (Ann. of Math. 103 (1976), 489 - 539) it is known that aggregates of surfaces of least total area can have two kinds of singularities: (i) Branch lines, or liquid edges, along which exactly three sheets meet under mutually equal angles of 120°. (ii) Vertices in which six surfaces and four liquid edges come together. Any pair of these edges includes the same angle $\alpha = 109{,}47^\circ$ ($\cos\alpha = -1/_3$). Taylor proved that the branch lines are regular curves of class $C^{1,\lambda}$ for some $\lambda \in (0,1)$. Here the following theorem is proved: "The branch lines are, with the possible exception of their endpoints (vertices and points on the boundary), regular curves of class C^{∞}. If one of the minimal surfaces meeting along the branch line is plane, then the branch line is analytic." The proof is based on a refinement of the methods developed by the author for the treatment of related problems (Inventiones math. 8 (1969), 313 - 333; 9 (1970), 270 and Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4), 3 (1976), 139 - 155).

C.V. Pao: Bifurcation Analysis for a Boundary Value Problem of Parabolic Type

A bifurcation analysis on the existence and the non-existence of a global solution for a semilinear parabolic equation and the characterization of the local stability and the instability of the corresponding steady-state solutions will be presented. The bifurcation result can be described either by a parameter λ for a fixed spatial domain Ω or by varying Ω for a fixed λ. The stability analysis gives a result which can be used to determine the stability and instability problem when the system possesses non-intersecting multiple steady-state solutions.

M. Schneider: Über die Eindeutigkeit des Frankl-Morawetz Problems im $\mathbb{R}^3$

Untersucht wird die Gleichung

(1) $L[u] := k(x_3)(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + u_{x_3x_3} + r(x_i)u = f(x_i)$

mit $k(x_3) = \operatorname{sign} x_3 |x_3|^m$, $m > 0$; $r(x_i) \in C^1(\bar{G})$, $f(x_i) \in C^0(\bar{G})$, wobei G berandet wird für

$x_3 > 0$ durch eine stückweise glatte Fläche $\phi^{(0)}(x_i) = 0$, die $x_3 = 0$ in $x_1^2 + x_2^2 = 1$ schneidet und für

$x_3 < 0$ durch die charakteristische Fläche

$$\phi^{(1)}(x_i) := -(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} + \int_{x_3}^{0} (-k(t))^{\frac{1}{2}} dt = 0$$ und eine

stückweise glatte Fläche $\phi^{(3)}(x_i) = 0$, die $x_3 = 0$ in $x_1^2 + x_2^2 = 1$ schneidet und für die gilt

$$k(x_3)\left(\phi^{(3)2}_{x_1} + \phi^{(3)2}_{x_2}\right) + \phi^{(3)2}_{x_3} \geq 0.$$

Es wird gezeigt, daß unter den Voraussetzungen

$$-\frac{4}{m+2} r - \underset{\sim}{a}\cdot\operatorname{grad} r \geq 0 \text{ in } G, \quad \underset{\sim}{a}\cdot\operatorname{grad} \phi^{(0)}\Big|_{\phi^{(0)}=0} > 0,$$

$$\underset{\sim}{a}\cdot\operatorname{grad} \phi^{(3)}\Big|_{\phi^{(3)}=0} \geq 0 \text{ mit } \underset{\sim}{a} = \left(x_1, x_2, \frac{2}{m+2} x_3\right),$$

das Problem $\tilde{L}[u] = f$ mit $u\big|_{\phi^{(0)} \cup \phi^{(3)}} = 0$ höchstens eine quasi-reguläre Lösung besitzt.

E. Smyrnelis: <u>Sur les fonctions hyperharmoniques d'ordre 2</u>

Dans le cadre d'un espace biharmonique fort, on introduit et l'on étudie les fonctions hyperharmoniques d'ordre 2. Ces fonctions sont, dans le cas classique, les fonctions qui satisfont à $\Delta^2 u \geq 0$, où $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ et où Δ est le laplacien. Plus généralement, cette étude s'applique aux inéquations de type $L_2(L_1 u) \geq 0$, où $L_j (j=1,2)$ est un opérateur différentiel linéaire du second ordre elliptique où parabolique.

E. Sperner: Über eine scharfe Schranke in der Regularitätstheorie nichtlinearer elliptischer Systeme

Es wird ein Regularitätssatz bewiesen für eine Klasse von Systemen nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, bei denen in jeder Gleichung zweite Ableitungen aller Komponenten der Lösung auftreten dürfen. Vorausgesetzt werden hierzu geeignete Schranken an die Koeffizienten des Hauptteils und die Inhomogenität. An Hand eines Beispiels wird die Schärfe dieser Voraussetzungen diskutiert und gezeigt, daß das Ergebnis für eine eingeschränkte Klasse von Systemen optimal ist.

F. Tomi: Über die endliche Lösbarkeit des Plateau-Problems

Es wird die Frage untersucht, ob in eine gegebene Jordankurve höchstens endlich viele Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe eingespannt werden können, und durch welche Daten der Randkurve diese Anzahl gegebenenfalls abgeschätzt werden kann. Bei der Untersuchung dieser Frage muß ich mich auf eine bestimmte Klasse von Jordankurven einschränken, welche durch die folgenden Bedingungen festgelegt ist: 1) Die Kurve γ gehört zur Klasse $C^{4+\alpha}$, 2) γ liegt auf dem Rand seiner konvexen Hülle, 3) durch jeden Punkt p aus dem Inneren der konvexen Hülle von γ gibt es eine Ebene, welche γ in höchstens 4 Punkten schneidet. Es kann dann gezeigt werden, daß die Anzahl der lokalen Minima des Flächeninhalts für jede solche Kurve γ endlich ist und durch die $C^{4+\alpha}$ - Norm von γ sowie die Lipschitz-Norm der Umkehrabbildung γ^{-1} abgeschätzt werden kann. Leider beruht der Beweis auf indirekten Schlüssen und liefert daher keine explizite Anzahlabschätzung.

W. von Wahl: Regularitätsfragen für die Navier-Stokesschen Gleichungen

Für die instationären Gleichungen von Navier-Stokes

$$\underline{u}' - \nu\Delta\underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} + \nabla p = \underline{f} ,$$

$$\nabla\cdot\underline{u} = 0$$

$$\underline{u}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\underline{u}(0) = \underline{u}_0$$

in zwei Raumdimensionen werden die aus der linearen Theorie bekannten a-priori Schranken hergeleitet, falls $f \in L^p((0,T), L^p(\Omega))$, $\underline{u}_0 \in H^{2,p}(\Omega) \cap \mathring{H}^{1,p}(\Omega)$ ($\mathring{H}^{1,2}(\Omega)$ für $p = 2$) sind. Derartige Schranken waren bisher nur für $p = 2$ und unter zusätzlichen Regularitätseigenschaften an f bekannt. Die Methode ist Teil einer allgemeineren Methode, die sich auf parabolische Systeme anwenden läßt.

J. Walter: Über eine Anwendung der Vektoranalysis bei der Definition der absoluten Temperatur im Sinne von Carathéodory

"Man wird zugeben müssen, daß die Thermodynamik in ihrer traditionellen Form das logische Ideal der Scheidung des physikalischen Inhaltes von der mathematischen Darstellung noch nicht verwirklicht hat" [M. Born, Phys. Zeitschrift 22 (1921), p. 218]. Daß diese Fragestellung bis heute nicht abschließend geklärt ist, betonen J. Serrin [Foundations of classical thermodynamics, Lecture Notes, Dept. of Math., Univ. of Chicago 1975] und C. Truesdell [Proc. Int. Congr. Math., Vancouver 1974]. In diesem Vortrag wird versucht, eine solche Scheidung vorzunehmen, wobei wir uns nur ""normaler" Mathematik, die jeder gelernt hat" [Born, ibidem p. 219] - nämlich der Anfangsgründe der Vektoranalysis - bedienen.

Sei V das Volumen, t die empirische Temperatur, $p(V,t)$ der Druck, $U(V,t)$ die innere Energie und $\mathfrak{q} := dU + pdV = (U_V+p)dV + U_t dt$ die Wärmeform eines einfachen fluiden Systems Σ.

<u>Satz:</u> Es gibt eine Funktion $T(t)$ so, daß die Differentialform $\frac{\mathfrak{q}}{T}$ exakt ist. (T wird bei geeigneter Normierung als "absolute Temperatur", die Stammfunktion von $\frac{\mathfrak{q}}{T}$ als "Entropie" von Σ bezeichnet!)

Gibt es nun eine Funktion $\varphi(t)$ so, daß $(*)\left(\frac{p_t}{U_V + p}\right)(V,t) = \varphi(t)$,

so ist offenbar jede Lösung von $\frac{T'}{T} = \varphi$ ein integrierender Nenner von $\mathfrak{q}$. Sei $Q := (U_V+p)(V,t)dV + (U_v+p)(v,t)dv + (U_t(V,t) + U_t(v,t))dt$ die Wärmeform des aus zwei Exemplaren von Σ durch thermische Kopplung entstehenden dreidimensionalen Systems und $\mathfrak{w}$ der Koeffizientenvektor von Q. Nach R.J. Finkelstein [Thermodynamics and statistical physics, 1969] ist (*) eine direkte Folge der Integrabilitätsbedingung $\mathfrak{w}\cdot\mathrm{rot}\,\mathfrak{w} = 0$ von Q. Um zur Integrabilität von Q zu kommen, ist eine Anwendung des 2. Hauptsatzes erforderlich. Mathematisch bedeutet dies, daß an dieser Stelle ein Axiom eingefügt werden muß. Ein wesentliches Problem besteht in der Formulierung dieses Axioms: Es muß physikalisch plausibel und mathematisch bequem sein! Die von Carathéodory [Math. Ann. <u>67</u> (1909)] gewählte Formulierung ist in beiderlei Hinsicht kritisiert worden [Zemansky, Am. J. Phys.: <u>34</u> (1966) "Due to the fact that Carathéodory's axiom was not based directly on experience and that the proof of his theorem was longwinded and difficult..."] Unsere Formulierung ähnelt derjenigen von [Jauch, Found. of Phys. <u>2</u> (1972); J. Serrin, loc. cit.].

<u>Axiom:</u> Jede Lösungskurve der Pfaffschen Differentialgleichung $Q = 0$, deren Projektion auf die v,t-Ebene geschlossen ist (eine derartige Kurve wird von Jauch, loc. cit., "geschlossen" genannt), ist selbst geschlossen.

Wir haben somit unsere Frage auf das Mathematische Problem reduziert, aus diesem Axiom die Relation $\mathfrak{w}\cdot\mathrm{rot}\,\mathfrak{w} = 0$ herzuleiten.

Wolfgang Walter: <u>Invariante Mengen für Systeme parabolischer Differentialgleichungen</u>

Im (nicht notwendig zylindrischen) Gebiet $G \subset R^{n+1}$ mit dem parabolischen Rand Γ wird ein parabolisches System der Form

$$u_t^k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j}^k + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)u_{x_i}^k + f^k(t,x,u,u_x) \quad (1)$$

$$k = 1,\ldots,m$$

betrachtet. Eine konvexe Menge $S \subset R^m$ heißt invariant bzgl. (1), wenn aus $u(\Gamma) \subset S$ folgt $u(G) \subset S$. Es werden ohne Benützung einer Existenztheorie sehr allgemeine Invarianzsätze bewiesen (von Weinberger sowie von Bebernes und Schmitt wurden Invarianzsätze unter Zuhilfenahme einer Existenztheorie bewiesen, wobei naturgemäß einschränkende Regularitätsannahmen über G, a_{ij}, b_i und f zu machen sind).

Ferner werden Invarianzsätze für gemischte Randbedingungen aufgestellt, also Sätze vom folgenden Typ:

Ist u Lösung von (1), $u(\Gamma_1) \subset S$ und

$$\partial u/\partial \nu = g(t,x,u) \quad \text{auf } \Gamma_2$$

so gilt $u(G) \subset S$. Dabei ist $\partial/\partial\nu$ die äußere Normalableitung, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Die entscheidende Voraussetzung ist eine "Tangentenbedingung" für f und für g. Sie hat Ähnlichkeit mit der entsprechenden Bedingung bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

J. Weidmann: <u>Streuung im homogenen elektrischen Feld</u>

Für selbstadjungierte Operatoren T, T_1 im Hilbertraum H sind die Wellenoperatoren $W_\pm(T_1,T)$ erklärt durch

$$W_\pm(T_1,T) = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itT_1} e^{-itT} ,$$

falls diese Limiten existieren. Sie heißen vollständig, wenn gilt

$$R(W_+) = R(W_-) = H_{ac}(T) := \{f \in H: \| E_1(\cdot) f \|^2 \text{ absol. stetig}\}.$$

Ist T der Schrödingeroperator eines geladenen Teilchens im homogenen elektrischen Feld, $T = -\Delta + \varepsilon x_1$ mit $\varepsilon \neq 0$, so zeigt eine einfache heuristische Überlegung, daß für $V = T_1 - T$ mit $|V(x)| \leq c\,|x|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ die Existenz der Wellenoperatoren zu erwarten ist.

Tatsächlich kann gezeigt werden (dabei wird auf technische Bedingungen verzichtet): Ist $T = h(\partial) + \varepsilon x_1$ mit $h(\partial) = F\,h(\cdot)F^{-1}$, $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $|h(x)|+1 \geq c_1 |x|^\varkappa$ und $|V(x)| \leq c_2 |x|^{-\theta}$ mit $\theta > \frac{1}{\varkappa}$, so existieren die Wellenoperatoren.

Im 1-dimensionalen Fall kann unter geringen zusätzlichen Bedingungen die Vollständigkeit bewiesen werden.

R. Weinacht: <u>Singular Perturbations for Equations of Mixed Type</u>

Boundary value problems are investigated for a class of equations of the form

$$k(y;\varepsilon)u_{xx} + u_{yy} = 0$$

where ε is a small positive parameter and $yk(y;\varepsilon) > 0$ for $y \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$; $k(y,0)$ vanishes on an interval. For $\varepsilon = 1$ this equation is Chaplygin's equation.

Asymptotic expansions with respect to the parameter ε are obtained for solutions of appropriate boundary value problems (e.g. the problem of TRICOMI) in mixed ellyptic-hyperbolic regions. As in the case of elliptic equations [ECKHAUS and DE JAGER: Arch. Rat. Mech. Anal. <u>23</u> (1966)] and hyperbolic equations [DE JAGER: Nieuw. Archief voor Wiskunde <u>23</u> (1975)] a crucial role is played by the direction of the subcharacteristics on the boundary.

Peter Werner: Regularitätsaussagen für Maxwellsche Randbedingungen

Das Randwertproblem der vollständigen Reflexion für die zeitunabhängigen Maxwellschen Gleichungen läßt sich durch Elimination des magnetischen bzw. elektrischen Feldes auf Randwertprobleme für die vektorielle Helmholtzsche Schwingungsgleichung zurückführen. Hierbei ergeben sich im ersten Fall die elektrischen Randbedingungen $n \times E = 0$, $\nabla \cdot E = 0$, im zweiten Fall die magnetischen Randbedingungen $n \times (\nabla \times H) = 0$, $n \cdot H = 0$. In einem früheren Vortrag wurden schwache Formulierungen für diese Randwertprobleme angegeben. Mit ihrer Hilfe ergaben sich unter Verwendung des Funktionalkalküls für selbstadjungierte Operatoren Existenzsätze und asymptotische Aussagen für die zeitabhängigen Maxwellschen Gleichungen. In diesem Vortrag soll eine Regularitätstheorie für die oben erwähnten Randwertprobleme skizziert werden. Man beachte, daß das elektrische und das magnetische Randwertproblem im statischen Fall nicht äquivalent sind, so daß beide Typen von Randbedingungen zu diskutieren sind.

Kjell-Ove Widman: Littlewood-Paley inequalities for solutions of parabolic equations with sub-Dini continuous coefficients

Parabolic operators of the form

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t) D_{ij}^{2} u(x,t) - D_t u(x,t)$$

are considered in $S_T = \{(x,t) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, \ 0 < t < T\}$, $T \leq \infty$. The coefficients a^{ij} are assumed to be uniformly continuous in S_∞, and the equation to be uniformly parabolic,

$$\lambda |\xi|^2 \leq a^{ij}(x,t)\xi_i \xi_j \leq \mu |\xi|^2 , \quad 0 < \lambda \leq \mu < \infty .$$

The solution of the initial value problem

$$\mathrm{IVP}(L^p): \begin{cases} Lu = 0 & \text{in } S_\infty \\ u(.,0) = \varphi, & \varphi \in L^p \end{cases}$$

is sought, with $u \in \left[\bigcup_{\varrho=1}^{\infty} H_{\varrho}^{2,1} \right]_{loc}$, $\lim_{t \to 0} \| u(.,t) - \varphi \|_{L^p} = 0$

It follows from the theory of parabolic singular integral operators that if φ is regular enough, say $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, then a solution exists. Moreover $\mathrm{IVP}(L^p)$ is solvable if the following a priori estimates holds for solutions of $\mathrm{IVP}(C_o^\infty)$

$$(*) \qquad \| u(.,t) \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \, \| \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \, \varphi \in C_o^\infty .$$

To describe our results we introduce the concept of Dini (α) regularity: The $a^{ij} \in$ Dini (α) if the modulus of continuity ω of a^{ij} satisfies

$$\int_0 \frac{\omega^{1/\alpha}(\tau)}{\tau} \, d\tau < \infty .$$

The following theorem is stronger than $(*)$ and gives a generalization of the Littlewood-Paley inequality.

<u>Theorem 1</u> If $a^{ij} \in \mathrm{Dini}(\frac{1}{2})$ then for every $T < \infty$, every $p > 1$, and for every nondecreasing θ such that $\int_0 \theta^2(t) dt/_t < \infty$ there is a constant c such that

$$\| u(x,t) \|_{L^p(L^\infty(S_T))} + \| Du \|_{L^p(L^2(S_T))} + \| t^{\frac{1}{2}} D^2 u \|_{L^p(L^2(S_T))} \leq$$

$$\leq c \left[\| u(.,0) \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\theta(t)} Lu \right\|_{L^p(L^2(S_T))} \right]$$

for all $u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Here

$$\| u(x,t) \|_{L^p(L^2(S_T))} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^T u^2 dt \right)^{p/2} dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

etc.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

<u>Corollary</u> If $a^{ij} \in \text{Dini}(\frac{1}{2})$ then $IVP(L^p)$ is solvable, and it is even true that

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x) \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}^n .$$

<u>Remark:</u> An example by Il'in shows that $IVP(L')$ is not in general solvable if $a^{ij} \in \text{Dini}(\alpha)$ with $\alpha < {}^1/4$.

An inverse Littlewood-Paley inequality also holds:

<u>Theorem 2</u> If $a^{ij} \in \text{Dini}(\frac{1}{2})$ then for every θ as above

$$\| u(.,0) \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le c \Big[\|u(.,T)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Du\|_{L^p(L^2(S_T))} +$$

$$+ \|t^{\frac{1}{2}} D^2 u\|_{L^p(L^2(S_T))} + \|\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\theta(t)} Lu\|_{L^p(L^2(S_T))} \Big], \ \forall\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

This lecture represents work done jointly with E. Fabes and S. Sroka.

Michael Wiegner: <u>Elliptische Systeme ohne Kleinheitsbedingung</u>

Betrachtet wird das Problem der Regularität schwacher Lösungen gewisser quasilinearer elliptischer Systeme. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $n \ge 3$ und $\underline{u} \in (H_2^1 \cap L_\infty)^N$ mit

$$\int_\Omega a_{ij}(x,\underline{u})\underline{u}_{x_i} \eta_{x_j}\, dx = \int_\Omega \underline{f} \cdot \eta \, dx \quad \text{für alle } \eta \in (\overset{\circ}{H}{}_2^1 \cap L_\infty)^N .$$

Es gelte: $\|u\|_{L_\infty} \le M$, a_{ij} und $\underline{f}$ seien meßbar mit

$$|\underline{f}| \le a\, |\nabla u|^2 + b \quad \text{und} \quad \lambda\, |\xi|^2 \le a_{ij}\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2 , \ \lambda > 0.$$

Dann gilt:

Ist $\underline{f} = - \underline{u}\cdot h(x,\underline{u},\nabla\underline{u})$ mit $h \ge 0$, so ist u α-hölder-stetig.

Dies ist ein erstes Ergebnis für elliptische Systeme ohne die übliche Kleinheitsbedingung an das Wachstum a bzw. M. Verallgemeinerungen dieses Ergebnisses sind möglich und wurden ebenfalls dargestellt.

M. Schneider (Berlin)