MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 36 / 1977

Topologie

4.9. bis 10.9.77

Die diesjährige Tagung über Topologie in Oberwolfach fand unter der Leitung von tom Dieck (Göttingen) und Lamotke (Köln) sowie C.Thomas (London) statt. Es wurden u.a. Probleme aus der Theorie der Mannigfaltigkeiten, der Singularitäten, der äquivarianten Topologie, der Homotopietheorie, der Knotentheorie und der Shapetheorie in Form von Vorträgen behandelt. Außerdem wurden Informationen über Forschungsprobleme in der Topologie ausgetauscht.

Teilnehmer

Barthel, G., Konstanz
Baues, H.J., Bonn
Baum, P., Providence
Bier, Th., Göttingen
Bröcker, Th., Regensburg
Bullett, S.R., London
Delinic, K., Heidelberg
tom Dieck, T., Göttingen
Dold, A., Heidelberg
Erle, D., Dortmund
Feustel, Ch.D., Bochum
Flückiger, E., Genf
Hamm, H.A., Münster
Hansen, V.L., Kopenhagen
Hastings, H.M., Hempstead
Hauschild, H., Göttingen
Hirsch, U., Bonn

Jackowski,St., Warschau
Johannson,K., Bielefeld
Karras,U., Dortmund
Kervaire,M., Genf
Klein,P.,Bonn
Klingmann,M., Heidelberg
Knapp,K., Bonn
Koschorke,U., Siegen
Kreck,M., Wuppertal
Lander,L.C., Southhampton
Lemaire,J.M., Nizza
Löffler,P., Göttingen
Meyer,W., Bonn
Michel,F., Genf
Moonen,B., Köln
Oliver,R., Aarhus
Ossa,E., Wuppertal
Pedersen,E.K., Odense
Puppe,D., Heidelberg
Puppe,V., Konstanz
Raußen,M., Göttingen
Ronga,F., Genf
\+ Siersma,D., Utrecht
Sigrist,F., Neuchatel
Singhof,W., Köln
Sjogren,J.A., Bonn
Skjelbred,T., Oslo
Slodowy,P., Regensburg
Switzer,R.M., Göttingen
Vogt,E., Heidelberg
Vogt,R., Osnabrück
Wassermann,G., Regensburg
Weber,C., Geng
Woodward,L., Durham

\+ Schwänzl,R., Osnabrück

Vortragsauszüge

Barthel,G. : Zur Homologie komplexer Flächen mit $\mathbb{C}^*$-Aktion

Es werden normale kompakte komplex-algebraische Flächen mit algebraischer $\mathbb{C}^*$-Aktion betrachtet. Ein Fixpunkt $x \in X$ heißt elliptisch, falls entweder $\lim_{t\to 0} \sigma(t,y) = x$ oder $\lim_{t\to\infty} \sigma(t,y) = x$ für alle y aus einer geeigneten Umgebung von x gilt. Hat X keine elliptischen Fixpunkte, so liegen in X zwei isomorphe glatte kompakte Fixkurven F^+ bzw. F^-, und $F^{\pm} \hookrightarrow X$ induziert einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen. Hat X elliptische Fixpunkte, so ist X einfach zusammenhängend. Der reelle Kohomologiering von X kann vollständig angegeben werden; für X ohne elliptische Fixpunkte erhält man eine rationale Homologiemannigfaltigkeit.

Beispiele normaler Flächen mit $\mathbb{C}^*$-Aktion werden durch die Hyperflächen in $P_3(\mathbb{C})$ mit isolierten Singularitäten gegeben, die in geeigneten affinen Koordinaten durch ein quasihomogenes Polynom definiert werden; an diesen Beispielen wird das Problem der Bestimmung des ganzzahligen Kohomologieringes diskutiert.

Baum,P. : K-Homology Theory

1. Definition of K-Homology: K-Homology is the homology theory associated to the Atiyah-Hirzebruch Cohomology theory. K-Homology is defined by using appropriate cycles and homogogies.
2. Applications: First application is to obtain the Hirzebruch-Riemann-Roch Formula. This is a consequence of a natural map

$K_o^{alg}(X) \longrightarrow K_o^{top}(X)$. Here X is a projective algebraic variety, and $K_o^{alg}(X)$ is the Grothendieck group of coherent algebraic sheaves.

Second application is to the Atiyah-Singer theorem. If $C^\infty(E) \xrightarrow{d} C^\infty(F)$ is an elliptic operator (E,F are C^∞ vector bundles on a manifold M), then the symbol $\sigma(d)$ gives a K-cycle on M. This yields the Atiyah-Singer formula for the Index of d.

Bier,Th. : Stabile Sphärenhomotopie und nichtsinguläre bilineare Abbildungen (gemeinsame Arbeit mit G.Al-Sabti)

Wie neuere Arbeiten von Lam und Smith zeigen, ist jedes Element in der stabilen Sphärenhomotopie, das durch 2 teilbar ist, als Hopfkonstruktion einer nichtsing. Bilinearform darstellbar. Insbesondere ist also jedes Element ungerader Ordnung so darstellbar. In diesem Vortrag wird gezeigt, daß viele der "interessanten" stabilen Homotopieelemente, die nicht durch 2 teilbar sind, in geraden Dimensionen für den Dimensionsbereich ≤ 20 nicht so darstellbar sind. Das erste Beispiel eines solchen Elements liegt in Dimension 8. Beim Beweis gehen die Projektivitätswerte für diese Elemente ein, außerdem die Atiyah-James Dualität für verstümmelte projektive Räume, und ein Satz über den verallgemeinerten J-Homomorphismus als Randabbildung. Mit Hilfe eines Satzes über Whiteheadprodukte kann man außerdem die Projektivitätswertefür das Arf-Invariante Element in Dimension 30 ermitteln und dann zeigen, daß auch dieses Element nicht so darstellbar ist.

tom Dieck, T. : Homotopy equivalent group representations and vector bundles

Let G be a finite group, RO(G) ist real representation ring, $RO_o(G) = \{ \alpha = V - W \mid \text{for all subgroups } H \text{ of } G \dim V^H = \dim W^H \}$, $RO_h(G) = \{ V - W \mid$ the unit spheres SV and SW are stably G-homotopy equivalent$\}$. Then $RO_h(G) \subset RO_o(G)$. Problem : Compute $RO_h(G)$. The stable homotopy classes $\omega_G^\alpha = \{ SW, SV \}$, $\alpha = V - W$, form a module over the Burnside ring ω_G^o which is projective of rank one, if $\alpha \in RO_o(G)$, and which is free iff $\alpha \in RO_h(G)$. Moreover $\omega_G^\alpha \otimes \omega_G^\beta = \omega_G^{\alpha+\beta}$ if $\alpha \in RO_o(G)$. Therefore $\alpha \mapsto \omega_G^\alpha$ induces an injective homomorphism

$$RO_o(G) / RO_h(G) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\omega_G^o)$$

into the Picard group of ω_G^o. A proof was sketched that $RO_h(G) = \{ \psi^k\alpha - \alpha \mid \alpha \in RO_o(G), (k, |G|) = 1 \}$ if G is a p-group. Analogous results hold for G-vector bundles, where G is a p-group: G-homotopy equivalent stable sphere bundles are produced from elements $(\psi^k - 1)(\psi^l - 1)\xi$, k and l prime to p.

Flückiger,E. : Knot theory

(gemeinsame Arbeit mit F. Michel)

Let r and q be integers, $q > 2$, and let $\lambda \in Z[x]$ be without repeated factor. There are only finitely many types of simple fibered (2q-1)-knots $K^{2q-1} \subset S^{2q+1}$ such that the degree of the Alexander polynomial of K^{2q-1} is r, and that the minimal polynomial of the monodromy of K^{2q-1} is λ .

Using Theorems of Levine and Trotter, the theorem can be given the following algebraic formulation :

There are only finitely many integral congruence classes of unimodular Seifert matrices A of rank r , such that the minimal polynomial of $(-1)^{q+1} A^{-1} A^T$ is λ .

We prove the theorem by algebraic and number theoretic methods.

Hamm,H.A. : Quasihomogene vollständige Durchschnitte mit isolierter Singularität

Ein quasihomogener vollständiger Durchschnitt ist die Nullstellenmenge X einer Abbildung $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^k$, deren Komponenten quasihomogene Polynome sind; dabei soll X die Dimension m-k haben. Hat X eine isolierte Singularität, so liegt es nahe, Invarianten in Abhängigkeit von den Gewichten der Koordinaten und den Graden der quasihomogenen Polynome bezüglich dieser Gewichte auszudrücken. Eine entsprechende Formel soll zunächst für die Milnorzahl angegeben werden. Beim Beweis werden die Resultate von G.-M. Greuel über die Relative De-Rham-Kohomologie und der Begriff der Poincarereihe verwendet. Dieser Zugang hat den Vorteil , daß man über die Milnorzahl hinaus Aussagen über die Picard-Lefschetz-Monodromie erhält. Genaue Einzelheiten wird eine gemeinsam mit G.-M. Greuel verfaßte Arbeit enthalten.

Hastings, H.M. : <u>Shape theory</u>

(gemeinsame Arbeit mit D.A.Edwards)

First, the relationship between shape theory, proper homotopy theory and pro-homotopy theory (the homotopy theory of inverse systems) is reviewed. Next, consider the diagram

$$\begin{pmatrix}\text{Strong (or coherent)}\\ \text{homotopy theory of}\\ \text{towers of spaces}\end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix}\text{Towers over}\\ \text{the homotopy}\\ \text{category}\end{pmatrix} \xrightarrow{\pi_*} \begin{pmatrix}\text{Towers of}\\ \text{groups}\end{pmatrix}$$

Here F is the forgetful functor, and $\pi_*\{X_n\} = \{\pi_*(X_n)\}$. In suitable cases, e.g. uniformly bounded dimensions, each π_*-isomorphism is a strong equivalence (of towers of pointed spaces) ; this is due to S. Mardešič et. al.

Example 1 (Edwards and the author) There is a π_*-isomorphism which is not a weak equivalence. This uses an Adams map (J(X) - IV) : $S^{2q}Y \to Y$. Consequently there is a shape fibration with trivial fibre which is not a shape equivalence, a stronger example than J. Taylor's CE example .

Example 2 (Dydac-Minc, Freyd-Heller). There is an unsplittable, unpointed homotopy idempotent, hence a weak equivalence which is not a strong equivalence. Compare also with Edwards and the author's positive result on isomorphism classification.

Hauschild, H. : JO_G-equivalent G-vectorbundles

(gemeinsame Arbeit mit tom Dieck)

Two G-vectorbundles $E \to X$ and $\bar{E} \to X$ are called JO_G - equivalent iff for some G-representation V there are G-maps f and g over X

$$\begin{tikzcd} S(E \oplus V) \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[dr] & & S(\bar{E} \oplus V) \arrow[ll, shift left, "g"] \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

such that the degree of f and g on each fibre is one.

Let $TO_G(X) = \{(E - \bar{E}) \in KO_G(X) \mid E \text{ and } \bar{E} \text{ are } JO_G\text{-equivalent.}\}$ and $JO_G(X) = KO_G(X) / TO_G(X)$. Using an equivariant version of the Becker-Gottlieb solution of the Adams-conjecture the groups $JO_G(X)$ are computed for finite p-groups G .

Jackowski, S. : On group homomorphisms inducing isomorphisms of cohomology

Let $u: G' \longrightarrow G$ be a homomorphism of finite groups. Consider Z_p as a trivial G' and G module.

Theorem 1: If the induced homomorphism $u: H^*(G;Z_p) \to H^*(G';Z_p)$ is an isomorphism, then (a) ker(u) is a subgroup of order not divisible by p and (b) the index (G;im(u)) is not divisible by p.

The proof uses the Swan-Venkov theorem on non-triviality of the restriction homomorphism and a method of embedding into connected, compact Liegroups. Conditions (a) and (b) are by no means sufficient. In the case of solvable G the sufficient condition is given by

Theorem 2 : Let G be a solvable group and G' its subgroup. The restriction homomorphism $H^*(G;Z_p) \longrightarrow H^*(G';Z_p)$ is an isomorphism for every $p \mid |G'|$ iff G' is a Hall subgroup of G and it has a normal complement.

The proof is based on Brauer's criterion for the existence of a normal complement and uses Atiyah's spectral sequence relating the group cohomology to the completed representation ring. Theorem 2 completes cohomological criteria for the existence of a normal complement given by Atiyah and Tate . It is not true without the assumption on the solvability of G' .

Johannson,K. : <u>On homeomorphisms of sufficiently large 3-manifolds</u>

Let M denote a compact, orientable and irreducible 3-manifold which is sufficiently large (in the sense of Waldhausen) and boundary-irreducible. Suppose that M has either non-empty boundary or that M is not a generalized Stallings fibration.

Using results of Haken and Hemion it is indicated how the concept of characteristic submanifolds can be utilized to prove Theorem: The Dehn-twists along tori and annuli generate a subgroup of finite index in the mapping class group of M .

Karras,U. : <u>On topologically constant deformations of isolated singularities</u>

Two isolated hypersurface singularities (V_1,p_1) , (V_2,p_2) $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ are said to have the same topological type if there is a homeomorphism (locally with respect to 0) $(\mathbb{C}^{n+1},V_1)\approx(\mathbb{C}^{n+1},V_2)$. A deformation $\{V_t\}$ of (V,p) is called equisingular (or topologically constant) if there is a point p_t in each firbe V_t such that (V_t,p_t) has the same topological type as (V,p). If $n \neq 2$ Lê Dung Trang and Ramanujam have shown that a deformation is equisingular along a section iff the Milnor number is constant. The proof uses the h-cobordism theorem and hence the restriction $n \neq 2$. In case (V,p) is a twodimensional hypersurface singularity, the Milnor number of (V,p) can be computed in forms of invariants of the topological type of a resolution $\pi : M \to V$ of (V,p) and the geometric genus $\dim_{\mathbb{C}} H^1(M;\mathcal{O})$. This suggests to call a family $\{V_t,p_t\}$ of normal surface singularities equisingular if this family can be simultaneously resolved and the topological types of the resolutions $M_t \to V_t$ do not depend on t. For double points and rational singularities there is good evidence that this is the "right" definition of equisingularity in this case. However, Wahl gave examples which show that the above definition is too coarse in general.

Knapp, K.H. : Rank and Adams filtration of a Lie group

Durch die Adams-Spektralsequenz wird eine Filtrierung auf $\pi_*^S(S^0)$, den stabilen Homotopiegruppen der Sphären, definiert. Von allen bis jetzt bekannten Elementen in $\pi_*^S(S^0)$ ist ihre Filtrierung bekannt. Eine kompakte Liegruppe G mit der durch die Linkstranslation definierten Parallelisierung definiert ein Element $[G,\mathfrak{L}]$ in $\pi_*^S(S^0)$. Es gilt dann der Satz : Für eine Liegruppe vom Rang n hat $[G,\mathfrak{L}]$ mindestens die Filtrierung n. Für die durch Twisten mit Elementen aus $KO^{-1}(G)$ aus $[G,\mathfrak{L}]$ erhaltenen Elemente lassen sich ähnliche Aussagen machen.

Löffler, P. : Involutionen auf Homotopiesphären

Es bezeichne $\mathbb{R}^{n,k}$ den $\mathbb{R}^{n+k}$ mit nichttrivialer Involution auf den ersten n Koordinaten, $\epsilon^{n,k}$ das triviale Bündel mit Faser $\mathbb{R}^{n,k}$. Eine Mannigfaltigkeit mit Involution heiße (n,k) - rahmbar, falls $t(M) = \epsilon^{n,k}$ in $KO_{Z_2}(M)$ ist, wobei $t(M)$ das Tangentialbündel von M ist. Es bezeichne Θ_k^{n+k} die Gruppe der orientierten Involutionen auf (n+k)-dimensionalen Homotopiesphären mit Fixpunktmenge eine k-dimensionale Homotopiesphäre. Da jedes Element aus Θ_k^{n+k} (n,k)-rahmbar ist, kann man für $k \leq n$ eine Theorie zur Berechnung von Θ_k^{n+k} aufbauen, die analog zu der von Kervaire und Milnor für n=0 ist.

Moonen : Ein Lefschetz-Riemann-Roch Theorem für singuläre Varietäten

Sei G eine endliche Gruppe; man betrachte die Kategorie der projektiven G-Varietäten und der G-Morphismen über C . Ist X eine proj. G-Varietät, so sei $K_W^G(X)$ = Grothendieckgruppe der kohärenten G-Garben. Dann läßt sich das Riemann-Roch Theorem von Baum-Fulton-McPherson (IHES Publ. No 45) auf den äquivarianten Fall verallgemeinern: Man hat einen "äquivarianten Cherncharakter" zu jedem $g \in G$, $ch_*(-,g): K_W^G(X) \longrightarrow H_{ev}(X^g;C)$, $X^g = Fix(g)$, so daß gilt:

(i) $ch_*(-,g)$ ist natürlich, d.h. $ch_*(f_![\mathcal{F}],g) = f_*^g ch([\mathcal{F}],g)$

(ii) $ch_*(V \otimes \mathcal{F},g) = ch^*(V,g) \cap ch_*(\mathcal{F},g)$

(iii) X glatt $\Rightarrow$ $ch_*(\mathcal{O}_X,g)$ Poincare Dual zu $td(X^g)/ch\,(\lambda_{-1}\check{\nu}^X_{X^g},g)$ $\in H^{ev}(X^g;\mathbb{C})$, $\check{\nu}^X_{X^g}$ = Konormalenbündel von X^g in X.

$ch_*(-,g)$ faktorisiert über die K-Homologie

$$ch_*(-,g) : K_W^G(X) \longrightarrow K_0(X^g) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{ch_*} H_{ev}(X^g;\mathbb{C})$$

und man hat so eine Zerlegung in einen K-Theorie Lefschetz und einen "diffbaren" Riemann-Roch für singuläre Varietäten.

Anwendungen: 1. $V \to X$ holom. G- VRB $\Rightarrow$

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i g\, H^i(X,\mathcal{O}(V)) = \langle ch^* V, \tau(X,g)\rangle \text{ mit}$$

$$\tau(X,g) := ch_*(\mathcal{O}_X,g) \in H_{ev}(X^g;C) .$$

2. X glatt, G operiert eigentlich $\Rightarrow \pi^* td(X/G) = \sum_{g \in G} td'(X,g)$ in $H^{ev}(X;\mathbb{Q})$, $\pi: X \to X/G$ Projektion, $td'(X,g)$ geeignet ("Formel von Zagier" für die Toddklasse)

Oliver,R. : Weight systems of SO(3)-actions

Whenever a compact connected Liegroup G acts on a disc D, the "weight system" for the action is defined to be the linear representation of the maximal torus $T \subseteq G$ on the tangent space $T_x(D)$ for any $x \in D^T$; this is defined and unique since D^T is always nonempty and connected. Among G-actions on disks with fixed points, one easily sees that the possible weight systems are precisely those representations of T which extend to G-representations.

In the case G=SO(3) it turns out to be possible to list simple necessary and sufficient conditions for an S^1 - representation to be the weight system of a fixed-point free action on a disk; the conditions are quite different from those for actions with fixed points. Among the corollaries to these conditions are:

1. Assume SO(3) acts on D^n without fixed points. Then $n \geq 8$ and $\mathrm{Iso}(D^n) \supseteq \{1, Z_2, D_2, D_3, D_4, S_4, N(T)\}$.
2. There is a fixed-point free action of SO(3) on D^8 with only those Isotropy subgroups.
3. There exist smooth actions of SO(3) on S^7 such that all orbits are three-dimensional.

Ronga,F. : On the multiple points of immersions in even codimension

Let $f: V^n \longrightarrow W^{n+2r}$ be a proper smooth immersion with transversal self intersections of all orders, where V and W are orientable manifolds. Let $M_k(f)$ denote the subset of V of k-tuple points of f. We prove the formula

$$(k-1)!\ D(\ \overline{M_k(f)}\ ,\ V\ ) = (\varphi-\chi)(\varphi-2\chi)\ \dots\ (\varphi-(k-1)\chi)$$

where D denotes Poincare duality, χ = Euler class of the normal bundle of f and $\varphi = f^*(f_!(1))$.

This generalizes a formula given by J.H. White using differential geometry in the case $n = 4M$, $r = m$ and $k = 3$.

Sjogren,J.A. : Geschlossene Zöpfe, die Kreise sind

Geschlossene Zöpfe (d.h. Konjugationsklassen von Zöpfen) führen zu Knoten oder Verkettungen. Das Programm von Artin war, Knoten durch die Bestimmung der Konjugatklassen, die zu einer bestimmten Knotenklasse führen, zu klassifizieren. Wir lösen das Problem im Falle eines Unknotens (trivialen Knotens) und beweisen damit eine Vermutung von Stallings. Durch das Konjugationsverfahren von F.A. Gauside ist dann ein Verfahren erreicht, womit man entscheiden kann, ob ein beliebiger präsentierter Knoten trivial ist. Das Verfahren ist rein algebraisch und praktisch ausführbar, im Vergleich mit dem von Haken.

Slodowy,P. : Einfache Singularitäten und einfache Liegruppen

Nach Resultaten von Brieskorn-Steinberg-Tits (Nizza 1970) findet man die rationalen Doppelpunkte vom Typ A_n, D_n, E_n in der zugehörigen einfach zusammenhängenden komplexen Liegruppe G (bzw. Liealgebra $\mathfrak{g}$) als Singularität des sogenannten subregulären Orbits in der unipotenten (bzw. nilpotenten) Varietät. Außerdem liefert die Einschränkung der bzgl. der adjungierten Aktion invarianten Polynome in $\mathbf{C}[G]$ bzw. $\mathbf{C}[\mathfrak{g}]$ auf eine transversale Scheibe S an den subregulären Orbit in G bzw. die verselle Deformation der Singularitäten A_n, D_n, E_n . Ähnliche Konstruktionen lassen sich auch für die einfachen Gruppen vom Typ B_n, C_n, F_4, G_2

durchführen, bei denen man die Singularitäten $A_{2n-1}, D_{n+1}, E_6, D_4$ findet. Die durch die Gruppentheoretische Konstruktion gelieferten Deformationen dieser Singularitäten sind nicht mehr versell, jedoch A-versell, wobei A die Symmetriegruppe des zugehörigen Dynkindiagrammes ist, und A-Versalität analog wie in den Arbeiten von Poenaru definiert wird.

Außerdem lassen sich die Betrachtungen über $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{C}$ durchführen und eine Zuordnung der reellen Formen der rationalen Doppelpunkte zu gewissen reellen Formen der einfachen komplexen Liegruppen angeben.

Vogt,E. : <u>Periodic flows with orbits of unbounded length on compact manifolds</u>

Two examples of flows were given answering two questions of D. Sullivan about compact foliations (i.e. foliations of compact manifolds by compact leaves.)

(a) There exists a periodic flow on a compact 4-manifold with orbits of unbounded lengths.

Since for any compact foliation of codimension 2 there is an upper bound on the volume of the leaves (with respect to any Riemannian metric) and since Sullivan gave an example of a flow as in (a) on a compact 5-manifold (which implies the existence of such flows on manifolds of dimension $\geqslant 5$) the example (a) settles the last case of the question : for which codimensions exist compact foliations such that there is no upper bound on the volume of the leaves.

The example described in the talk was C^∞. In the meantime D.B.A. Epstein modified the example to make it real analytic and with a little extra effort one can make it real algebraic.

For any countable ordinal x there is a periodic flow on a compact 8-manifold (in our example $[0,1] \times S^1 \times S^3 \times S^3$) with Epstein hierarchy of length x .

The Epstein hierarchy measures to a certain degree how bad a compact foliation is (e.g. if there is a bound on the volume of the leaves then the length of the Epstein-hierarchy is 0). For a compact foliation it is at most countable.

Weber,C. : Torsion in knot modules

Let $K^n \subset S^{n+2}$ be a differentiable submanifold, oriented, having the integral homology type of S^n. Let $X = S^{n+2} - K^n$ and $\tilde{X} \to X$ be the infinite cyclic covering. Then $H_1(X; \mathbb{Z})$ is a $\Lambda = \mathbb{Z}[T]$ module , where $T = \{t^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Theorem: The following are equivalent:

(1) $H_1(X;\mathbb{Z})$ has no $\mathbb{Z}$-torsion

(2) $H_1(X;\mathbb{Z})$ has a square presentation matrix

(3) The first elementary ideal of $H_1(X;\mathbb{Z})$ is principal.

Comments: (2) $\Rightarrow$ (3) is obvious.

(1) $\Rightarrow$ (2) was first proved by Kervaire using surgery, and later by Levine using homological algebra. We give a proof using Seifert surfaces.

(3) $\Rightarrow$ (1) is proved by looking carefully at the way the Alexander polynomial behaves when one reduces a presentation modulo p .

Th.Bier (Göttingen)