MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 40/1977

Arbeitsgemeinschaft Geyer-Harder

über

Periodenabbildungen

9.10. bis 15.10.1977

Tagungsleiter: J.Steenbrink, Amsterdam

Periodenabbildungen sind Verallgemeinerungen klassischer Periodenintegrale auf Riemannschen Flächen und dienen der Untersuchung der komplexen Struktur einer kompakten komplexen algebraischen Mannigfaltigkeit. Nach einem Überblick über das Ziel der Tagung im ersten Vortrag (1) wurde zunächst an die Voraussetzungen der Hodgetheorie erinnert (2-5) und sodann die allgemeine Konstruktion der Periodenabbildung für eine Familie von Kählermannigfaltigkeiten durchgeführt (6-8). In gewissen Fällen liefert diese Abbildung eine (lokal) treue Beschreibung der analytischen Strukturen. Darüber geben die Sätze vom Torelli-Typ Auskunft (9-12). Nach (partieller) Kompaktifizierung der sogenannten Modulräume lassen sich Periodenabbildungen auch in singuläre Fasern einer glatten Familie fortsetzen (13-18). Eine andere Art die analytische Struktur von singulären Varietäten in die Betrachtung mit einzubeziehen ergibt sich über die Definition von gemischten Hodgestrukturen auf singulären Varietäten und von Limeshodgestrukturen für Entartungen glatter Varietäten (19-21). Eine Anwendung dieser Theorien zeigte der letzte Vortrag (22).

Teilnehmer

Name	Ort	Name	Ort
Abels, H.	Bielefeld	Lange, H.	Erlangen
Barthel, G.	Konstanz	Lindner, M.	Saarbrücken
Berndt, R.	Hamburg	Looijenga, E.	Nijmegen/NL
Borchers, H.	Mannheim	Maus, E.	Göttingen
Brieskorn, E.	Bonn	Meyer, H.-M.	Erlangen
tom Dieck, T.	Göttingen	Miyaoka	Bonn
Fischer, W.	Bremen	Mülich, G.	Hamburg
Forster, O.	Münster	Namikawa, Y.	Bonn
Freitag, E.	Mainz	Oeljeklaus, E.	Bremen
Gamst, J.	Bremen	Peters, C.	Leiden/NL
Geyer, W.-D.	Erlangen	Popp, H.	Mannheim
Greuel, G.-M.	Bonn	Sakai	Bonn
Hamm, H.	Münster	Schappacher, N.	Göttingen
Kani, E.	Heidelberg	Schneider, M.	Göttingen
Karras, U.	Dortmund	Siersma, D.	Utrecht/NL
Kaup, L.	Konstanz	Slodowy, P.	Regensburg
Kiehl, R.	Mannheim	Steenbrink, J.	Amsterdam/NL
Kimura, T.	Mannheim	Stuhler, U.	Göttingen
Kiyek, K.	Paderborn	Tamme, G.	Regensburg
Knebusch, M.	Regensburg	Ueno, K.	Bonn
Knörrer, H.	Bonn	Viehweg, E.	Mannheim
Koizumi	Bonn	Welters, G.	Amsterdam/NL
Lamotke, K.	Köln	Wirthmüller, K.	Regensburg

Vortragsauszüge

1) J.H.M. Steenbrink: Überblick

Periodenabbildungen sind ein Versuch die komplexe Struktur auf einer Mannigfaltigkeit mittels ihrer Kohomologie zu beschreiben. Dazu braucht man mehr als nur die vom topologischen Typ allein abhängige Modulstruktur. Eine reichere Struktur liefert die Hodge-Zerlegung zusammen mit der Klasse einer Kählerform. Diese Hodgezerlegung bestimmt gewisse Zahlen, die Hodgezahlen, d.h. die Dimensionen der Komponenten der Zerlegung. Man betrachtet nun den Raum M aller Hodgezerlegungen mit festen Hodgezahlen. Eine Familie $(X_t)_{t \in S}$ von Kählerschen Mannigfaltigkeiten bestimmt dann eine Abbildung $\Phi : S \to M$, die Periodenabbildung. Es wird die Frage behandelt werden ob $d\Phi$ oder Φ injektiv sind (lokales und globales Torelliproblem). Außerdem wird die Periodenabbildung benutzt zur Beschreibung degenerierender Familien. Man versucht M (teilweise) zu kompaktifizieren $\bar{M} \supset M$, so daß jede Periodenabbildung in die kritischen Werte der Familie $(X_t)_{t \in S}$ fortsetzbar wird. Dabei spielen gemischte Hodge-Strukturen eine wichtige Rolle.

2) W. Fischer: Klassische Hodge-Theorie

Erinnerungen: An den Zusammenhang zwischen harmonischen Formen und Cohomologie auf Riemannschen bzw. Hermiteschen Mannigfaltigkeiten; an die Hodgezerlegung $H^r(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ mit

$H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \cong H^q(X,\Omega^p)$ für kompaktes Kählersches X; an einige Aussagen über die Betti-Zahlen $h^r = \dim_{\mathbb{C}} H^r(X,\mathbb{C})$ und die Hodge-Zahlen $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ für kompaktes Kählersches X.

3) J. Gamst: <u>Primitive Cohomologie</u>

Auf einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit X der komplexen Dimension n liefert die Kählerklasse $\omega \in H^{1,1}(X,\mathbb{C})$ einen Operator $L:H^r(X,\mathbb{R}) \to H^{r+2}(X,\mathbb{R})$ durch $\alpha \to \omega \wedge \alpha$. Dabei ist $L^k:H^{n-k}(X,\mathbb{R}) \to H^{n+k}(X,\mathbb{R})$ ein Isomorphismus ("Hard Lefschetz"), und es gilt:

$$H^k(X,\mathbb{R}) = \bigoplus_h L^h P^{n-2h}(X,\mathbb{R})$$

mit $P^l(X,\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(L^{n-l+1}|H^l(X,\mathbb{R}))$ ("Primitive Cohomologie"). Es wurde skizziert, wie man diese Tatsachen mit Hilfe von "Kähler-Identitäten" und der Darstellungstheorie von sl_2 erhält.

4) E. Oeljeklaus: <u>Hodge-Riemann-Relationen, Index einer 4k-dimensionalen kompakten Kählermannigfaltigkeit.</u>

Ist X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit mit Kählerform ω und $P^r(X,\mathbb{C}) = \sum_{p+q=r} P^{p,q}(X)$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der primitiven Cohomologieklassen vom Grade r auf X, so gelten für die komplexe Bilinearform

$$Q_r:P^r(X,\mathbb{C}) \times P^r(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\quad Q_r(\alpha,\beta) := (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \int_X \omega^{n-r} \wedge \alpha \wedge \beta$$

die Hodge-Riemann-Relationen:

$$Q_r(P^{p,r-p},\ P^{r-q,q}) = 0 \quad \text{falls } p \neq q$$

$$(-1)^q\, i^{-r}\, Q_r(P^{p,q},\ \bar{P}^{p,q}) > 0$$

Unter dem Index $i(Y)$ einer reell $4k$-dimensionalen differenzierbaren kompakten Mannigfaltigkeit Y versteht man den Index der symmetrischen Bilinearform

$$J: H^{2k}(Y,\mathbb{R}) \times H^{2k}(Y,\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\quad J(\alpha,\beta) = \int_Y \alpha \wedge \beta.$$

Ist Y kählersch, so läßt sich $i(Y)$ durch die Dimensionen $h^{p,q}$ der Räume der harmonischen p,q-Formen auf Y ausdrücken. Es gilt dann $i(Y) = \sum_{p,q\geqslant 0} (-1)^p\, h^{p,q}$.

5) G. Barthel: Kohomologie projektiver Hyperflächen, Berechnung der $h^{p,q}$.

Die Kohomologie einer glatten Hyperfläche $X \subset P_{n+1}$ weicht nur in der mittleren Dimension von $H^*(P_n,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[\omega]/(\omega^{n+1})$, $\omega \in H^{1,1}$ ab. (Lefschetzsätze $H_k(X,\mathbb{C}) \to H_k(P_{n+1},\mathbb{C})$ isomorph für $k \leqslant n-1$, surjektiv für $k = n$, und Poincaré-Dualität.) Dualisieren der exakten Folge $0 \to H_{n+1}(P_{n+1},X) \to H_n(X) \to H_n(P_{n+1}) \to 0$ liefert die Folge $0 \to H^{n+1}(P_{n+1}\setminus X) \to H^n(X) \to H^{n+2}(X) \to 0$. Darin ist $H^{n+1}(P_{n+1}\setminus X)$ isomorph zur Kohomologie $H^{n+1}\,\Omega^o(_*X)$ des Komplexes der rationalen Differentialformen auf P_{n+1} mit Polen auf X ("algebraischer de-Rham-Satz" von Grothendieck, Publ. IHES 29 (1966)), und die Abbildung $H^{n+1}\,\Omega^o(_*X) \to H^n(X,\mathbb{C})$ läßt sich als Residuenabbildung beschreiben (stelle lokal $\varphi = \frac{\alpha d\omega}{\omega} + \beta$ modulo exakter Formen dar, wobei α,β C^∞-Formen sind, setze $\operatorname{Res}\varphi = \alpha|_V$, $V = \{w = 0\}$).

(siehe Griffiths, Annals of Math. 90 (1969), p 460-541, inst. § 8). Dabei geht die Polordnungsfiltrierung von $H^{n+1}\,\Omega^{o}(_*X)$ in die Hodgefiltrierung $0 \subset H^{n,0} \subset H^{n,0} + H^{n-1,1} \subset \ldots \subset \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q} = H^{n}(X)$ über. Die Berechnung der $h^{p,q} = \dim H^{p,q}$ für Grad $X = d$ ermöglicht die Formel $h_o^{n-k,k}(X) = \dim H_o^{n-k,k}(X) = |\nu : l(\nu) = k+1|$, wobei $\nu = (\nu_o,\ldots,\nu_{n+1})$, $0 \leq \nu_i \leq d-2$, $l(\nu) := (n+2+|\nu|)/d$; der Beweis von Steenbrink (Comp. math. 34 (1977), p.220) benutzt die Methoden aus Griffiths (op.cit. § 10) und Deligne, Theorie de Hodge III, (Publ. IHES 44, § 9.2).

6) P. Slodowy: Definition der Periodenabbildung

Sei $\varphi : X \to S$ ein glatter, eigentlicher Morphismus von analytischen Mannigfaltigkeiten mit zusammenhängenden Fasern. Dann ist φ ein lokal-triviales C^{∞}-Bündel, welches ein flaches Kohomologiebündel H^{*} über S mit Faser $H^{*}(X_s, \mathbb{C})$ induziert. Definiert man durch $F^{q} = \bigoplus_{q' \leq q} H^{k-q',q'}$ die sogenannte Hodgefiltrierung auf $H^{k}(X_s, \mathbb{C})$, so variiert diese holomorph mit $s \in S$ (vgl. Vortrag 8), und lokal läßt sich eine eindeutige Abbildung von S in die kompakte komplexe Mannigfaltigkeit F aller Fahnen eines festen Dimensionstypes definieren. Betrachtet man eine verträgliche Polarisierung $\omega_s \in H^{1,1}(X_s, \mathbb{Z})$ der Fasern von φ, so kann man sich wegen der Lefschetzzerlegung auf die Betrachtung der primitiven Kohomologie P^{k} beschränken. Die Hodge-Riemann-Bilinearrelationen liefern nun zusätzliche Bedingungen an die Fahnen der Hodgefiltrierung und erlauben die Konstruktion einer globalen Abbildung $\pi : S \to D/\Gamma$, der Periodenabbildung, von S in den Quotienten eines offenen Teiles D

einer Fahnenmannigfaltigkeit nach der Operation der Monodromiegruppe Γ. Dieser Quotient ist ein analytischer Raum, da Γ eigentlich diskontinuierlich operiert.

7) K. Wirthmüller: Stetigkeitseigenschaften der Hodge-Zerlegung

Sei L_t eine differenzierbare Familie elliptischer selbstadjungierter Differentialoperatoren ($t \in T$). Dann ist die Funktion $t \to \dim \operatorname{Kern} L_t$ oberhalbstetig. Ist diese Funktion sogar konstant, so bilden die Räume L_t ein differenzierbares Vektorraumbündel über T. Speziell für Laplace-Operatoren erhält man entsprechende Aussagen für $H^{p,q}$ und $H_o^{p,q} = P^{p,q}$.

8) M. Knebusch u. G. Tamme: Holomorphie der Periodenabbildung

Es wurde der Originalbeweis von Griffith (Periods of integrals on algebraic manifolds, II, Amer. J. of Math. 90, 1970) für die Holomorphie der Periodenabbildung vorgeführt, sowie das Differential dieser Abbildung berechnet (loc.cit.).

9) C. Peters: Lokale Torelli-Sätze

Es wurden Griffith's Kriterium für die lokale Injektivität der Periodenabbildung hergeleitet und einige Anwendungen gegeben (lokaler Torelli für K-3-Flächen, Tori und Kurven vom Geschlecht $g \geqslant 2$). Außerdem wurde ein Satz von Lieberman, Wilsker und Peters formuliert über das lokale Torelliproblem bei gewissen Kählerschen Mannigfaltigkeiten mit amplem kanonischen Bündel und auf vollständige Durchschnitte und Kurven angewendet.

10) O. Forster: Der Satz von Torelli für Riemannsche Flächen

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$. Sei $(\gamma_1,\ldots,\gamma_{2g})$ eine Basis von $H_1(X, \mathbb{Z})$ und $(\omega_1,\ldots,\omega_g)$ eine Basis von $\Omega^1(X)$. Bzgl. dieser Basen definiert man eine Periodenmatrix

$$\Pi = (\pi_{ij}) \in M(g \times 2g, \mathbb{C}), \quad \pi_{ij} := \int_{\gamma_j} \omega_i .$$

Man nennt die Basis $(\gamma_1,\ldots,\gamma_{2g})$ kanonisch, falls die Schnittmatrix $(\gamma_i \cdot \gamma_j)$ die spezielle Gestalt $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ hat. In diesem Fall genügt die Periodenmatrix den Riemannschen Periodenrelationen

$$\text{i)} \quad \Pi J \Pi^T = 0 \qquad\qquad \text{ii)} \quad i\Pi J \overline{\Pi}^T > 0.$$

Bei vorgegebener kanonischer Basis $\gamma_1,\ldots,\gamma_{2g}$ kann man die Basis $\omega_1,\ldots,\omega_g$ in eindeutiger Weise so wählen, daß die Periodenmatrix die spezielle Gestalt $\Pi = (E, Z)$ hat. Die Riemannschen Periodenrelationen sagen nun gerade, daß Z symmetrisch ist und positiv definiten Imaginärteil hat, d.h. der Siegelschen oberen Halbebene S_g angehört. Übergang zu einer anderen kanonischen Homologie-Basis bedeutet für Z die Transformation $Z \to (AZ + B)(CZ + C)^{-1}$ mit einer symplektischen Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z})$. Man erhält so eine Abbildung der Menge der Isomorphieklassen Riemannscher Flächen vom Geschlecht g in den Quotientenraum $S_g/Sp(g, \mathbb{Z})$. Der Satz von Torelli sagt nun gerade, daß diese Abbildung injektiv ist. Beim Beweis spielt u.a. ein auf der Jacobimannigfaltigkeit von X gegebener sog.

Theta-Divisor, der durch die Nullstellen der Riemannschen Theta-reihe

$$\theta(Z,u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp\{i\pi\langle m,Zm\rangle + 2\pi i\langle m,u\rangle\}$$

definiert wird, eine Rolle. Für $g = 2$ ist X isomorph zum Träger dieses Divisors, für $g > 2$ hat man Durchschnitte von Translaten davon zu betrachten (Lit.: H.Martens: A new proof of the Torelli's theorem. Ann. of Math. 78 (1963)).

11) H. Lange: Torellischer Satz für K-3-Flächen (a)

Es wurde versucht den ersten Teil des Beweises des Torellischen Satzes für algebraische K-3-Flächen von Pjatecki-Šapiro und Šafarevic zu skizzieren, genauer

(1) den lokalen Torellischen Satz (d.h. die lokale Injektivität der Periodenabbildung für markierte polarisierte K-3-Flächen) und

(2) (nach einer didaktisch verbesserten Fassung von A.Beauville) den globalen Torellischen Satz für spezielle Kummer-Flächen, d.h. Kummer-Flächen, die von einer reduziblen abelschen Fläche herkommen.

12) E. Looijenga: Torellischer Satz für K-3-Flächen (b)

Ziel dieses Vortrags war es die Dichtheit der polarisierten exzeptionellen Kummerflächen im Modulraum der polarisierten K-3-Flächen nachzuweisen. Dies wurde nicht ganz erreicht infolge einer

Lücke im Beweis von Shafarevic und Pyatetski-Shapiro. Jedoch wurde das Problem auf die Existenz gewisser Gitter reduziert.

13) D. Siersma: Die Satakekompaktifizierung

Sei $S_n = \{Z \in M(n,n;\mathbb{C}) \mid Z^T = Z, \operatorname{Im}(Z) \text{ positiv definit}\}$ die Siegelsche obere Halbebene. Die Modulgruppe $\Gamma_n = Sp(n;\mathbb{Z})$ operiert auf S_n durch

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : Z \to (AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$

Es wurde eine Topologie auf

$(\Gamma_n \backslash S_n)^* := \Gamma_n \backslash S_n \cup \Gamma_{n-1} \backslash S_{n-1} \cup \ldots \cup \Gamma_o \backslash S_o$ eingeführt, mit der $(\Gamma_n \backslash S_n)^*$ ein kompakter Hausdorffraum wird. Danach wurde gezeigt, wie man mittels der automorphen Funktionen auf $S_r (0 < r \leq n)$ eine analytische Struktur auf $(\Gamma_n \backslash S_n)^*$ definieren kann, die auf jedem $\Gamma_r \backslash S_r$ die natürliche Struktur induziert. Dann ist $(\Gamma_n \backslash S_n)^*$ ein normaler analytischer Raum und zudem eine projektive algebraische Varietät isomorph zu $\operatorname{Proj}(\bigoplus_{k \geq 0} A(\Gamma_n)_k)$, wobei $A(\Gamma_n)_k$ die globalen automorphen Funktionen vom Grad k sind, d.h. der holomorphen $\phi : S_n \to \mathbb{C}$ mit $\phi(MZ) = \det(CZ+D)^k \, \phi(Z)$.

14) G. Mülich: Die Deligne-Mumford-Kompaktifizierung (I)

Eine stabile Kurve C vom Geschlecht $g \geq 2$ ist ein reduzierter, zusammenhängender, kompakter komplexer Raum der Dimension 1, der als

Singularitäten höchstens Doppelpunkte und das Geschlecht $g = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C) \geq 2$ hat, sowie die folgende Bedingung erfülle: besitzt C eine irreduzible Komponente $E \cong P_1$, so treffe E die übrigen Komponenten von C in mindestens drei Punkten. Es wurde gezeigt: Jede stabile Kurve läßt sich trikanonisch in den P^{5g-6} einbetten, alle diese Kurven bilden einen Unterraum $H_g \subset H^P_{P^{5g-6}}$ des Hilbertmodulraums bzgl. des Hilbertpolynoms P. Auf H_g operiert PGL(5g-6), so daß $H_g/_{PGL}$ ein Modulraum für stabile Kurven vom Geschlecht g wird.

15) R. Berndt: Die Deligne-Mumford-Kompaktifizierung (II)

Es wurden einige Bemerkungen über den Beweis der folgenden Sätze gemacht: PGL operiert eigentlich auf H_g; H_g ist eigentlich; H_g ist glatt; der Diskriminantenort der Abbildung Z_g (= universelle Familie über H_g) $\rightarrow H_g$ ist reduziert und hat nur normale Schnitte.

16) U. Stuhler: Die Topologie von Familien von Kurven, deren spezielle Faser nur gewöhnliche Doppelpunkte hat.

Dieser Vortrag diente der Bereitstellung der im folgendem benutzten topologischen Hilfsmittel. Es wurde die Cohomologie von Kurven mit Doppelpunkten berechnet; dann wurde die Cohomologie der allgemeinen mit der der speziellen Faser in einer Familie $\pi: X \rightarrow D$ verglichen. Endlich wurde die Picard-Lefschetz-Formel in dieser einfachen Situation angegeben.

17) E. Maus: Die Periodenabbildung für Familien stabiler Kurven

Sei S_g die Siegelsche obere Halbebene, $S_g^* = S_g/S_p(g, \mathbb{Z})$ und $\bar{S}_g^* = \bigcup_{g' \leq g} S_g^*$ die Satake-Kompaktifizierung von S_g^*. Für eine Familie $\pi: X \to S$ stabiler Kurven werde $\bar{T}_\pi^* : S \to \bar{S}_g^*$ durch $s \mapsto$ (Periodenmatrix (mod $Sp(g', \mathbb{Z})$) des nichtsingulären Modells X_s von $X_s = \pi^{-1}(s)$) erklärt. Dabei ist g' das Geschlecht von X_s. Auf dem Teil S_o von S, über welchem π glatt ist, ist $\bar{T}_\pi^*$ die früher definierte holomorphe Periodenabbildung $S^o \to S_g^*$. Im Vortrag wird bewiesen:

Theorem (Namikawa): $\bar{T}_\pi^* : S \to \bar{S}_g^*$ ist holomorph auf ganz S.

In den Beweis gehen die Resultate der vier vorhergehenden Vorträge wesentlich ein.

18) Y. Namikawa: Die toroidale Kompaktifizierung des Quotienten eines symmetrischen Raumes nach einer arithmetischen Gruppe und ihre Anwendungen.

Sei $D = G/K$ ein symmetrischer Raum und Γ eine arithmetische Untergruppe von G. Als Kompaktifizierung des Quotienten $\Gamma \backslash D$ gibt es schon die Baily-Borel-Kompaktifizierung. Im Falle der oberen Siegelschen Halbebene $D = S_g$ und der Gruppe $\Gamma = Sp(g, \mathbb{Z})$ ist diese identisch mit der Satakekompaktifizierung. Neulich ist von der Harvard-Schule, D. Mumford et al., eine neue Kompaktifizierung entdeckt worden. Diese neue Methode liefert projektive und, wenn Γ fixpunktfrei auf D operiert, sogar glatte Kompaktifizierungen. Im Falle $D = S_g$ ermöglicht sie auch zusammen mit der Voronoischen Reduktionstheorie eine Erweiterung der geometrischen Interpretation von $\Gamma\backslash D$ als Modulraum der hauptpolarisierten Abelschen Mannigfaltigkeiten. Bei der neuen Methode wendet man eine neue Technik aus der algebraischen Geometrie, die Theorie der toroidalen Einbettungen, an.

19 + 20) E. Freitag u. R. Kiehl: <u>Hodgetheorie auf quasiprojektiven glatten Mannigfaltigkeiten.</u>

Eine Hodgestruktur besteht aus einer endlich erzeugten abelschen Gruppe A, einem "Gewicht" n und einer Filtrierung $A \otimes \mathbb{C} = F^0 \supset F^1 \supset \ldots = 0$ mit der Eigenschaft $F^p + \bar{F}^{n-p+1} = A \otimes \mathbb{C}$. Man hat dann eine übliche Hodgezerlegung

$$A \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q} \quad \text{mit} \quad H^{p,q} = F^p \cap \bar{F}^q.$$

Allgemeiner versteht man unter einer gemischten Hodgestruktur auf A zwei Filtrierungen

$$A \otimes \mathbb{C} = F^0 \supset F^1 \supset \ldots 0$$
$$0 = \ldots W_m \subset W_{m+1} \subset \ldots = A \otimes \mathbb{C}$$

mit den Eigenschaften

a) Die Vektorräume W_m sind über $\mathbb{Q}$ definiert

b) F induziert auf W_m/W_{m+1} eine Hodgestruktur von Gewicht m.

Die klassische Konstruktion einer Hodgezerlegung für kompakte Mannigfaltigkeiten läßt sich in einem Funktor

Kategorie der quasiprojektiven glatten Varietäten $X \to$ (abelsche!) Kategorie der gemischten Hodgestrukturen (auf $H^n(X, \mathbb{Z})$)

verallgemeinern. Dazu kompaktifiziert man $X \subset \bar{X}$, so daß das Komplement $\overline{X}\setminus X$ aus endlich vielen glatten Divisoren mit normalen Schnitten besteht. Dazu beschreibt man die Kohomologie von X mit Hilfe einer spektralen Folge, deren Anfangsterme aus den singulären Kohomologiegruppen der Durchschnitte $Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_m}$ berechnet werden. Man nutzt aus, daß diese bereits eine Hodgestruktur haben.

21) K. Ueno: <u>Entartung von Hodgestrukturen</u>

Sei $f:X \to S = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$ eine eigentliche, holomorphe, surjektive Abbildung einer komplexen Mannigfaltigkeit X nach S. Sei f außerdem glatt auf $X^* = f^{-1}(S^*)$, $S^* = S - \{0\}$, und die Picard-Lefschetz-Transformation von $X^* \to S^*$ sei unipotent. Dann betrachten wir einen Limes der Hodgestrukturen der allgemeinen Fasern. Nach einem Resultat von Steenbrink besitzt dieser Limes eine gemischte Hodgestruktur. Dieses wurde erörtert und an dem Beispiel einer Familie von quasistabilen Kurven ausgeführt. Ebenso wurde die gemischte Hodgestruktur von Divisoren mit transversalen Schnitten angegeben.

22) K. Lamotke: <u>Der Satz über die invarianten Zykel</u>

Zusätzlich zu der oben (21) betrachteten Situation werde vorausgesetzt, daß X eine abgeschlossene Teilmenge von $P^m \times S$ ist (m hinreichend groß) und $f:X \to S$ die Beschränkung auf X der Projektion $P^m \times S \to S$ ist. Sei $S_t = f^{-1}(t)$ eine reguläre Faser und $\xi \in H^q(X_t,\mathbb{Q})$ ein invarianter "(Ko-)Zykel", d.h. $T\xi = \xi$ für die Picard-Lefschetz-

Monodromie $T: H^q(X_t, \mathbb{Q}) \to H^q(X_t, \mathbb{Q})$, die von einem Umlauf von t um 0 in S^* induziert wird.

Satz: Jeder invariante Zykel ξ läßt sichauf ganz X fortsetzen.

Es wurde skizziert, wie man dieses Ergebnis mit Hilfe der Limes-Hodge-Struktur von Steenbrink beweist mit Betonung derjenigen Stellen, an denen die Voraussetzung $X \subset P^m \times S$ benötigt wird. (In der Diskussion wurde bemerkt, daß P.Griffith mit Hilfe der Hopfschen Flächen ein Gegenbeispiel konstruiert hat, bei dem diese Voraussetzung nicht erfüllt ist.) Quelle: J.Steenbrink: Limits of Hodge Structures. Inventiones Math. 31, 229-257 (1976).

Peter Slodowy (Regensburg)