Math. Forschungsinstitut Oberwolfach
E 20 / 01574

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 42/1977

Didaktik der Mathematik:

Geometrielernen im Mathematikunterricht

30.10. - 5.11.1977

Die Tagung wurde von A. KIRSCH (Kassel) und H.-J. VOLLRATH (Würzburg) geleitet. Unter den 34 Teilnehmern waren Didaktiker aus Österreich, Polen und USA. Die homogene, personelle Zusammensetzung führte zu einem hohen Niveau der Diskussionen, in denen mehrfach um ein adäquates Gegenstandsverständnis der didaktischen Forschung gerungen wurde. In zwei längeren Diskussionen wurden die Beziehungen "Gegenstand und Methode", die Notwendigkeit eines Methodenpluralismus und die Übernahme methodischer Erfahrungen aus den Bezugswissenschaften behandelt. Ein Novum gegenüber früheren Didaktiktagungen war, daß die Mehrzahl der Vorträge (10/16) über empirische Forschungsarbeiten berichtete. Nahezu alle methodischen Typen waren vertreten (Einzelbeobachtungen, Fallstudien in Form genauerer Unterrichtsbeobachtungen, Fähigkeitsmessungen durch Tests). Die Versuchspersonen stammten aus allen Alters-und Schulstufen vom Kindergarten über die Primar-und Sekundarstufe bis hin zum universitären Bereich.

Die Inhalte einiger Vorträge lassen sich der Wahrnehmungspsychologie zuordnen:

Bei Vorschul-und Kindergartenkindern fand M. WINTER in statistisch analysierten Beobachtungen, daß die Leistungen im Reproduzieren geometrischer Figuren wesentlich vom darstellenden Medium und der Lage der Figuren abhängt. Die Abhängigkeiten von der Darstellungsart werden insbesonders vom H. KOOPS und P. SORGER untersucht.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Sie berichteten über die Fähigkeiten von Grundschülern, Wahrnehmungsinhalte in verschiedenen Darstellungsarten zu übertragen (Würfelanordnungen und deren Bilder). Für die Altersgruppe der 10-jährigen: B. ANDELFINGER konnte in seinen umfangreichen statistischen Untersuchungen einen separaten Fähigkeitsfaktor nachweisen, der völlig isoliert die Leistungen in der räumlichen Geometrie umfaßt und sich nicht im Fähigkeitsmuster für die ebene Geometrie bzw. für die Arithmetik wiederfindet. H. RADATZ, plädierte dafür, die Fähigkeitsdimension "Raumanschauung" vom "Operieren mit den Objekten" (räumliches Denken) zu trennen. Anhand zahlreicher Nachfolgeuntersuchungen zu PIAGET zeigte er die Problematik eines Vorgehens auf, aus PIAGET's Erkenntnissen zur Entwicklung des räumlichen Denkens unmittelbar Lehrgangssequenzen zu entwerfen. Die Ergebnisse eines von H. BESUDEN beschriebenen Projektstudiums scheinen darauf hinzuweisen, daß das räumliche Vorstellungsvermögen nicht nur eine angeborene - wie vielfach in der Literatur behauptet -, sondern auch eine entwickelbare Fähigkeit ist.
U. VIET berichtete über Irrwege und Erfahrungen bei der Erstellung eines Tests, der ursprünglich geometrische Fähigkeiten messen sollte, dann aber zu einem Prognosetest für den Erfolg im Mathematikunterricht weiter entwickelt wurde.
Mit dem Problemlösen beschäftigten sich mehrere Vorträge.
A.M. FRAEDRICH illustrierte die Umstrukturierung gegebener Wahrnehmungsinhalte. H. WINTER möchte den Begriff der Symmetrie im Sinne von strukturtreuen geometrischen Abbildungen, die zu sich wiederholenden Mustern führen, erweitern und belegte mit zahlreichen Beispielen den Einfluß solcher "Symmetrien" beim Lösen von Konstruktions-und Beweisaufgaben sowie beim Mathematisieren von Umweltprozessen.
Das Umstrukturieren von Wahrnehmungsinhalten durch Erkennen von Achsen-und Drehsymmetrien und den Einfluß auf die Lösungsstrategien bei geometrischen Abzählproblemen analysierte H. GLASER und berichtete über erste Unterrichtserfahrungen.
B. ZIMMERMANN beschrieb zwei Typen von Problemlösern, die sich anhand des verwendeten Veranschaulichungsmittels identifizieren lassen und die Anschauung unterschiedlich benutzen, um Aussagen aus einem Axiomensystem der affinen Inzidenzgeometrie zu folgern.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

G. KULM wies einen Weg auf, wie Schüler unter Verwendung heuristischer Prinzipien aus Gegenbeispielen die Voraussetzungen eines Beweises bestimmen können. In einem größeren Rahmen stellte G. HOLLAND das Lösen von Beweisaufgaben, in dem er mehrere Unterrichtsstrategien entwickelte. Z. DYRSZLAG stellte eine neue polnische Konzeption des Geometrieunterrichts für die Sekundarstufe I vor und berichtete über erste Erfahrungen aus den Erprobungen. Charakteristisch scheint zu sein, daß nur wenige geometrische Inhalte festgelegt sind, so daß Schüler und Lehrer nach eigenem Geschmack theorieträchtige Umweltsituationen analysieren können. Diese Idee der größtmöglichen Freiheit in der Unterrichtsgestaltung scheint in vielen westlich orientierten Ländern mit der Inflation der Curriculumstheorien unter einem Wust vorgeschriebener Lernziele, Lerninhalte, Unterrichtsverfahren und Lernzielkontrollen verschüttet zu sein.
Der Vortragende konnte aber auch verdeutlichen, daß die Hauptprobleme dieses neuen Unterrichtskonzepts darin liegen, das inhaltliche Fundament zu bestimmen, und die Lehrer umzuerziehen bzw. entsprechend auszubilden.
Die Bildung geometrischer Begriffe auf verschiedenen Stufen und adäquate Unterrichtsstrategien wurden in mehreren Vorträgen untersucht: L. PROFKE bezweifelte, daß der individuelle Erwerb geometrischer Begriffe (Länge, Flächeninhalt und Rauminhalt) mit struktursystematischen Gesichtspunkten (Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen in Objektmengen) befriedigend erfaßt wird, und gab Alternativen an, wobei er die intuitiven Vorstellungen von solchen Größen als Ausgangspunkt des Begriffsbildungsprozesses herausstellte.

P. KIRSCHE untersuchte in zwei vierten Klassen, wie auf dem untersten Begriffsbildungsniveau zwei handlungsorientierte Strategien den Begriffserwerb der Punktsymmetrie beeinflussen. Sowohl bei der Schneide - als auch Drehmethode benutzen die Schüler ausgiebig Transparentpapier. Zahlreiche, sehr aufschlußreiche Unterrichtsbeobachtungen wurden berichtet. Die von D. LIND mitgeteilten statistisch abgesicherten Testleistungen von Schülern des 5. und 6. Schuljahres, die von Studenten unterrichtet worden waren, überraschten manchen Zuhörer und ließen deutlich werden, welchen Einfluß die Schwächen des vorhergehenden Unterrichts und die Aufgabenformulierungen auf die Leistungen beim Konstruieren haben können.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

In den Diskussionen kam immer wieder das Methodenproblem zur Sprache. Augenblicklich scheint die Mehrzahl der Didaktiker bereit zu sein, die Notwendigkeit empirischer Untersuchungen, die von gründlichen didaktischen Analysen ausgehen, anzuerkennen, insbesonders wenn es gilt, zwischen verschiedenen Unterrichtsstrategien zu wählen. Man war sich aber auch einig, daß die aus den Sozialwissenschaften übernommenen Untersuchungsverfahren durch Beurteilungsverfahren ergänzt werden müssen, die für den Mathematikunterricht spezifisch sind. Anerkannte Beurteilungsverfahren müssen entwickelt werden. So viel scheint sich aber abzuzeichnen:
Die Qualität von Unterrichtsverfahren kann nicht nur in statistisch hoch signifikanten Mittelwert- und Streuungsunterschieden angegeben werden. Normierte Unterrichtsbeobachtungen - was auch immer das im Augenblick heißen mag - wurden als gleichberechtigt erachtet.

Teilnehmer

B. Andelfinger, Düsseldorf
B. Artmann, Darmstadt
G. Becker, Bremen
H. Besuden, Oldenburg
H.-G. Bigalke, Hannover
Z. Dyrszlag, Opole
R. Fischer, Klagenfurt
A.M. Fraedrich, Ludwigsburg
H. Glaser, Würzburg
H. Griesel, Kassel
J. Hayen, Oldenburg
G. Holland, Gießen
A. Kirsch, Kassel
P. Kirsche, Augsburg
H. Koops, Münster
G. Kulm, z.Zt. Bielefeld
D. Lind, Wuppertal
M. Otte, Bielefeld
H. Postel, Kassel
L. Profke, Gießen
H. Radatz, Bielefeld
H.-J. Sander, Dortmund
A. Schreiber, Neuss
H. Schupp, Saarbrücken
P. Sorger, Münster
G. Stein, Darmstadt
R. Stowasser, Bielefeld
R. Strösser, Bielefeld
U. Viet, Osnabrück
H.-J. Vollrath, Würzburg
I. Weidig, Landau
H. Winter, Neuss
M. Winter, Münster
B. Zimmermann, Paderborn

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Vortragsauszüge

B. ANDELFINGER:

Fähigkeitsmuster, die beim Geometrielernen eingesetzt werden - Methoden, Ergebnisse und Perspektiven einer empirischen Untersuchung im 5. Schuljahr

Die Längsschnittuntersuchung erstreckte sich über ein Jahr und umfaßte 700 Schüler (40% Realschule, 60% Gymnasium). Mit Hilfe selbstentwickelter lernzielorientierter Tests sollten Struktur und Anteil der mathematischen Fähigkeiten, welche bei der Bewältigung eines mathm.-Curriculums von den Schülern eingesetzt werden, erkannt und an Inhalten und Zielen festgemacht werden. Neben operativen und konstruktiven Bestandteilen wurde vorwiegend die kognitive Komponente untersucht. Durch Faktorenanalysen wurden einige Fähigkeitsstrukturen bestimmt, die sich auf das vom Autor veröffentlichte Curriculum beziehen. Der Anteil spezifischer mathematischer Fähigkeiten war im Geometriebereich größer und in sich abgeschlossener als in der Arithmetik.
Die Fähigkeiten bzgl. ebener bzw. räumlicher Punktmengen sind deutlich voneinander getrennt. Die arithmetischen Fähigkeiten zerfallen in logische (z.B. bei Mengenoperationen und aussagelogischen Sequenzen) algorithmische (z.B. Termberechnungen) und rechentechnische (z.B. schriftliche Rechenarten). Eine Untersuchung des Gesamtcurriculums zeigte, daß sich drei bedeutende mathematische Fähigkeiten nachweisen lassen - eine integrative arithmetisch - geometrische , die die 1-bzw.2 dimensionale Geometrie mit den elementaren Operationen mit natürlichen Zahlen sowie Größen und den Meßvorgängen in einen Erklärungszusammenhang bringt; - eine algorithmische Fähigkeit, die ausschließlich an arithmetischen Objekten festgemacht ist und hierbei auch logische Komponenten beeinhaltet; - eine isolierte raumgeometrische Fähigkeit.
Jedes Lernziel im betrachteten Curriculum wird unter Mitwirkung einer oder mehrerer dieser Fähigkeiten erreicht. Anhand der bestimmten Fähigkeitsmuster lassen sich für das untersuchte Curriculum Revisionsprozesse durchführen und lernzielorientierte therapeutische Maßnahmen entwickeln. (s.a. Darmstädter Dissertation 1977 D 17 des Verfassers).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

H. BESUDEN: Räumliches Denken - Bericht über ein Projekt an der Universität Oldenburg

Das Thema wurde im Rahmen des an der Universität Oldenburg obligatorischen Projektstudiums in einer Gruppe von 30 Studenten mit vier Hochschullehrern interdisziplinär und berufsbezogen untersucht. Beteiligte Fächer: Mathematik, Arbeitslehre/Polytechnik (Werken) und Textil-und Bekleidungstechnik, begleitend Psychologie und Pädagogik. Dauer: 3 Semester, dazwischen zwei 4-wöchige Erkundungen, zuerst außerschulisch, dann in 5 Schulen. Organisationsform im Semester: 5 Arbeitsgruppen, Plenum, Grundkurse und projektorientierte Kurse in den 3 Fächern.
Fragestellungen: 1. Was ist räumliches Denken? - Unterscheidung "räumliche Wahrnehmung", "räumliches Vorstellungsvermögen", "räumliches Denken". 2. Wer braucht (in welchem Maße) räumliches Denken? - Berufsfeldanalyse. 3. Kann diese Intelligenzstruktur entwickelt, die Fähigkeit r.D. gefördert werden? - Kindergarten, Schule, Lehre.
Die Protokolle aus Betriebspraktika, Kindergärten und Heimstätten sowie nach eigenen Veranstaltungen (Selbstbeobachtung) und Schulbesuchen sind noch nicht ausgewertet. Sie scheinen bislang folgendes zu ergeben: Das räumliche Vorstellungsvermögen kann gefördert werden. Es gibt deutliche individuelle Grenzen, dagegen kaum geschlechtsspezifische Unterschiede. Der Vortrag wies einen Weg auf, bei dem Forschung und Lehre in der Didaktik nicht auseinanderzufallen brauchen.

Z. DYRSZLAG: Selbstgesteuertes Geometrielernen

In Polen wird zur Zeit eine Übergangskonzeption zum schulischen Geometrielernen erprobt, die drei Phasen umfaßt:
1. Offene Realsituationen aus dem Erfahrungsraum der Schüler werden behandelt, um die Begriffsbildung in realen Dingen zu entwickeln.
2. Neue geometrische Kenntnisse werden durch selbstgesteuertes Lernen erworben.
3. Die Arbeit nach dem Lösen von Aufgaben wird in den Vordergrund gestellt, um verschiedenartige mathematische Aktivitäten zu wecken.
Das Charakteristikum aller drei Phasen kann man als partiell-selbstgesteuertes Lernen identifizieren.
Ergebnisse, Erfahrungen und ungelöste Probleme werden erörtert.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

A.M. FRAEDRICH: Heuristisches Vorgehen bei der Lösung von geometrischen Konstruktions-und Beweisaufgaben

Es wurde auf einige Ergebnisse der Gestaltpsychologie hingewiesen und dabei ausgeführt, daß die Fähigkeit zum Umstrukturieren einer Situation auch beim Lösen von geometrischen Problemen eine fundamentale Rolle spielen dürfte. Als allgemeine Richtlinien zur Lösung geometrischer Aufgaben wurden genannt: Mobilisierung des Fachwissens, gründliche Analyse des Ziels und der Voraussetzungen, und weitere heuristische Strategien (vgl. POLYA). Das Verfahren der "diffusen Denkfigur" wurde exemplifiziert, die beispielsweise entsteht, wenn man eine oder mehrere Bedingungen wegläßt. In diesem Zusammenhang wird die Veranschaulichung der zu einer Lösung eventuell erforderlichen diffusen Denkfigur sowie die Verwendung mehrerer Überlegungsfiguren zu ein und derselben Aufgabe als mögliche Lösungshilfe für den Schüler empfohlen. - Zur Demonstration der genannten heuristischen Strategie wurde der Prozeß der Lösungsfindung (sowohl zu einer Konstruktionsaufgabe als auch zu einer Beweisaufgabe) in Form einer Zeitlupenaufnahme vorgestellt.

H. GLASER: Die Bedeutung der Symmetrieerfassung beim Lösen von Abzählproblemen

Die Möglichkeit über Abzählprobleme zu den Symmetrien einer Figur hinzuführen, wird in den gegenwärtigen Lehrgängen und didaktischen Vorschlägen nicht genutzt. Zum Abzählen der "Platten" (quadratische, dreieckige, sechseckige), die längs des Randes einer regelmäßigen Figur (Quadrat, Dreieck,...) zu einem "Weg" gelegt sind, existieren Symmetrie-und Induktionsstrategien. In einer Fallstudie (8. Klasse einer städtischen Hauptschule) wurden Hypothesen bzgl. der Voraussetzungen, der Zugänglichkeit, der Symmetrieerfassung, des Transfers von Zählstrategien, der aufgetretenen Argumentationsniveaus, der Haltungen der Schüler und der benutzten Unterrichtsformen geprüft. Intuitive ungesteuerte Umwelterfahrungen ermöglichten es den Schülern, mehr achsensymmetrische als rotationssymmetrische Unterteilungen zu finden.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Unterteilungsmuster mit gleicher Fixgruppe, bei denen einzelne Elemente mehrfach gezählt werden, treten häufiger auf als Einfachüberdeckungen. Die Schüler übertrugen Zählstrategien von Quadratproblemen auf Dreiecksprobleme, wobei sie ausschließlich verbal argumentierten. Konsequenzen für weitere Untersuchungen wurden mitgeteilt, insbesonders Steuerungsmaßnahmen zur Symmetrieerfassung auf der enaktiven Ebene.

G. HOLLAND: Strategien zum Gewinnen und Beweisen geometrischer Sätze

Es werden drei Strategien unterschieden, die es dem Lehrer im Geometrieunterricht der Sek. I gestatten, einen geometrischen Satz einzuführen und die Einsicht seiner Gültigkeit zu vermitteln. Unter einer ersten Strategie werden alle diejenigen Varianten zusammengefaßt, bei denen die Aussage des Satzes in einer ersten Phase (durch Induktion, Generalisation, Analogie, usw.) gefunden wird, um in einer anschließenden Phase bewiesen zu werden.
In einer zweiten Strategie wird eine Konstruktionsaufgabe gestellt, nach deren Lösung der einzuführende Satz sowie die Einsicht seiner Richtigkeit durch eine ergänzende Überlegung gefunden wird.
In einer dritten Strategie werden Aussage und Einsicht ihrer Gültigkeit durch Analyse einer geeigneten geometrischen Konfiguration gewonnen.
In allen drei Strategien läßt sich "entdeckendes Lernen" in verschiedenen Ausprägungsgraden realisieren. Welche der Strategien jeweils zu bevorzugen ist, hängt von den Fähigkeiten der jeweiligen Lerngruppe ab. Die erste Strategie ist zu bevorzugen, wenn das selbständige Finden eines Beweises ausdrückliches Lehrziel ist. Die beiden anderen Strategien sind für schwächere Lerngruppen geeignet, bei denen man nicht voraussetzen kann, daß sie die Beweisnotwendigkeit einer durch Induktion bereits als richtig akzeptierten Aussage erkennen.

P. KIRSCHE: Zur Erfassung von Punktsymmetrien bei Grundschulkindern

In Hinsicht auf ein Geometriecurriculum ist es wünschenswert, die Punktsymmetrie in der Grundschule zu behandeln. Das Ziel einer empirischen Untersuchung war, zwei Methoden zur Behandlung punktsymmetrischer Figuren im 4. Schuljahr zu vergleichen. Beide Methoden beruhen auf der Darstellung der Punktspiegelung durch eine Halbdrehung.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Sie werden nach einer Einführungsphase auf der zeichnerischen Ebene eingesetzt und dienen der Erreichung der Lehrziele, "Punktsymmetrie erkennen und prüfen" und "punktsymmetrisch ergänzen". Die statistische Auswertung der Tests ergab keine signifikanten Leistungsunterschiede in den Versuchsklassen. Die Unterrichtsbeobachtung legte indessen den Lehrzielen entsprechend einen Methodenwechsel nahe: Symmetrie prüfen - Schneidemethode und symmetrisch ergänzen - Drehmethode. Diese Entscheidung ist eng an die Versuchsbedingungen gebunden und somit kaum generalizierbar. Als weitere Konsequenz ergab sich, daß die Punktsymmetrie nicht isoliert, sondern im Zusammenhang mit der Drehsymmetrie behandelt werden sollte.

H. KOOPS, P. SORGER: Fallstudien zum räumlichen Vorstellungsvermögen bei Schülern der Eingangsstufe

Es wird über eine Fallstudienuntersuchung bei 57 Schülern erster Schuljahre zum repräsentationsspezifischen Faktor Raumanschauung (Gewinnung von Wahrnehmungsinhalten und bewußte Reproduktion in unterschiedlichen Medien) berichtet. Ausgangspunkt waren faktorenanalytische Untersuchungen zum mathematischen Fähigkeitsspektrum von Schülern erster Schuljahre nach FREUND/SORGER, die zwar das Vorliegen eines space factors verifizieren konnten, jedoch mathodologisch unbefriedigend blieben, weil u.a. sich das Leistungsverhalten junger Schüler in Teilsituationen als zuwenig stabil erwies und weil weniger Endverhalten als vielmehr informationsansprechende und reproduzierende Prozesse auf der enaktiven Ebene Untersuchungsgegenstand sein müßten. Die daraufhin entwickelten normierten und standardisierten Einzelbeobachtungen berücksichtigten in ihrer Anlage Ansätze der Wahrnehmungstheorie von GIBSON in der Fortführung durch OLSON, bei der die Abhängigkeit der Raumanschauung vom verwendeten Medium (Aktivitätsbereich, der Wahrnehmungsinhalte zu gewinnen gestattet oder in dem Wahrnehmungsinhalte reproduziert werden) eine kennzeichnende Rolle spielt. In Fallstudien von 5 Sequenzen a 20 min Dauer wird die wechselseitige Abhängigkeit dreier Medien (konkrete Würfelkonfiguration, Zeichnungen entsprechender Figuren und ein Plättchenmaterial, mit dem Würfelkonfigurationen in ebener Darstellung gelegt werden können) systematisch untersucht. Das dabei verwendete Beobachtungsverfahren, die kontrollierten und systematisch erfaßten Variablen und die geplanten statistischen Verfahren zur Auswertung des verwendeten Kategoriensystems werden erläutert.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

G. KULM: Heuristic Teaching of Geometry

Previous research has shown that many students have not attained Piaget's level of formal thought before the age of 16 years. The implication of these studies for geometry instruction is that approaches are necessary which develop the ablities required for understanding and constructing proofs. A heuristic for generating and proving theorems, based on the work of Lakatos, is presented. This heuristic permits students to progress gradually from a conjecture based on a concrete example to a formalized theorem statement. The approach is based on student suggestions for conditions which clarify the conjecture and identify conditions necessary for its proof. The conditions arise from the student's identifications of counter-examples to the original conjecture. The heuristic is presented a method for developing the ability to think at a formal abstract level in geometry.

D. LIND: Fallstudien zur Geometrie im Rahmen eines Fachpraktikums

Zwei 5. Klassen, ein A-bzw. B-Kurs einer 6. Klasse wurden im wesentlichen von Studenten unterrichtet. Die Schüler der 5. Klasse sollten die Grundbegriffe Gerade, Halbgerade, Strecke, "senkrecht zu", erwerben (klassifizieren, zeichnen). Im 6. Schuljahr sollten der Koordinatenbegriff und einige Kenntnisse über Achsenspiegelungen vermittelt werden. Ein am Ende des Fachpraktikums eingesetzter lernzielorientierter Test zeigte: Die Schüler der 5. Klasse klassifizierten Linien zum Teil nur nach Endpunkteigenschaften. Die mit Zeichen verbundenen Konventionen und einige Aufgabentexte wurden häufig nicht verstanden. Senkrecht zu einer Geraden konnten mit dem Geodreieck überraschend häufig nicht gezeichnet werden.
Den Schülern der 6. Klasse fiel das Spiegeln von Punkten im Gitternetz relativ leicht, wobei sie die Vorstellung "eine Handlung ausführen", benutzten. Dagegen traten Ausfälle beim Konstruieren der Bildpunkte mittels des Geodreiecks auf. Die Schüler hatten in etwa die gleichen Schwierigkeiten die Texte der Tests zu verstehen wie die Schüler der 5. Klasse.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

L. PROFKE: Begriffsbildung bei geometrischen Größen

Es ist zweifelhaft, ob sich die geometrischen Größen Länge, Flächen-und Rauminhalte in der individuellen Entwicklung mittels Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen von Objektmengen bilden.

Anschließend an A. Fricke (wpb 11 (1959), 503-516) wird eine mögliche Beschreibung der Begriffsbildung dieser Größen gegeben:

1. Vergleich realer Objekte durch reale Größen. Sind mehrere reale Größen auf einem Objektbereich proportional, kann es zu einer Identifizierung solcher Größen und ihrer Diskrimination in Länge, Flächen-und Rauminhalt kommen. Die Größen-"axiome" übertragen sich dabei von den realen auf die geometrischen Größen.

2. Geometrische Größen werden durch "Standard"-Objekte konkretisiert; das sind besonders vertraute Objekte der betreffenden Größe und können sich bei verschiedenen Menschen unterscheiden. Standardobjekte werden im Mathematikunterricht durch Aneinandersetzen von Einheitsobjekten gezielt aufgebaut und im Einklang mit den Größenaxiomen durch benannte Zahlen gekennzeichnet. Umgekehrt veranschaulichen Standardobjekte beliebige benannte Zahlen.

3. Direkte Zuweisung von benannten Zahlen zu Objekten durch Messung und Berechnung. Größengleiche Verwandlung und andere Verfahren dienen hier zur Formelherleitung, nicht mehr zur Begriffsbildung.

4. Da später fast nur noch diese direkte Zuweisung benannter Zahlen vorkommt, identifiziert man schließlich die geometrischen Größen mit den benannten Zahlen und veranschaulicht sich diese (nachträglich) durch Standardobjekte.

Vergleich von Objekten anhand ihrer Größenmaße, ebenso Bildung von Klassen gleich großer Objekte (falls überhaupt).

Mittels Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen definiert man in der Mathematik geometrische Größen, während es im Mathematikunterricht zunächst nur um adäquate Beschreibungen intuitiver Größenvorstellungen geht.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

H. RADATZ: Einige kognitiven Aspekte des Geometrielernens

Auf dem Hintergrund individueller Unterschiede im mathematischen Lehr-/Lernprozeß werden zwei Felder zur Diskussion gestellt:
Die Abhebung der Dimension "Raumanschauung" von dem "räumlichen Denken", wobei eine Fähigkeit Raumanschauung eher medienspezifisch als inhaltsspezifisch relevant für das Mathematiklernen zu sein scheint.
Die Frage nach der Übertragbarkeit der Erkenntnisse Piagets zur Entwicklung des räumlichen Denkens in curriculare Handlungsmodelle. Hier zeigen sich Schwierigkeiten bei der inhaltlichen Entwicklungslinie (Topologie-Proj.Geom.-Euklidische Geom.), bei der Alterszuweisung und der mathematischen vs. psychologischen Terminologie.

U. VIET: Evaluation eines Geometrie-Prognosetests für das 5. Schuljahr

In Osnabrück wird seit 1970 ein Geometrietest entwickelt, der Aufschluß über das vorhandene Vorwissen der Schüler im Bereich der Geometrie zu Beginn des 5. Schuljahrs geben soll. Der Test wurde mehrmals von jeweils etwa 10 Klassen erprobt und revidiert. Die zur Zeit vorliegende 7. Fassung bildet die Grundlage des Referates. Sie wird aus wahrnehmungspsychologischer und didaktischer Sicht diskutiert. Die statistische Auswertung ist noch nicht abgeschlossen. Einzelergebnisse der Itemanalyse, Distraktorenanalyse, Faktorenanalyse und Clusteranalyse werden mitgeteilt. Der Test hat eine befriedigende Prognosevalidität in Bezug auf den Lernerfolg in dem von uns untersuchten geometrischen Curriculumelementen des 5. und 6. Schuljahrs. Er kann als Hilfsmittel zur Leistungsdifferenzierung herangezogen werden.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

H. WINTER: Die Bedeutung der Symmetrie beim Lernen von Geometrie

In Anlehnung an H. Weyl wird ein allgemeiner Symmetriebegriff vorgestellt. Eine Transformation f einer strukturbegabter Menge M, die die Struktur erhält, heißt Symmetrieoperation in M. Eine nichtleere Teilmenge F von M heißt f-symmetrisch, wenn f(F)=F. Dieser Symmetriebegriff ist nicht auf geometrische Mengen beschränkt.

Die vier wesentlichen Aufgaben des Geometrieunterrichts (Begriffsbildung, Konstruktionen, Auffinden und Beweisen von Sätzen, Anwendungen) können und sollten vom Symmetriegedanken her durchdrungen werden. Das Erfassen eines geometrischen Begriffs besteht zu einem erheblichen Teil im Aufdecken zugehöriger Symmetrien (z.B. ist die Unbeschränktheit einer Geraden durch ihre Schubsymmetrie ausgedrückt). Das Auffinden von "Wiederholungen" in geometrischen Konfigurationen führt zu Vermutungen und legt Begründungsschritte nahe. Die praktische Bedeutung der Symmetrie liegt in der Ökonomie symmetrischer "Lösungen", wenn nicht andere Randbedingungen dem entgegenstehen.

M. WINTER: Leistungen 4-8-jähriger Kinder bei der Reproduktion ebener geometrischer Figuren.

In Versuchen mit Kindern aus Kindergarten (63 Vpn), Schulkindergarten (26 Vpn) und 1. Jahrgang der Grundschule (62 Vpn) hat sich erwiesen, daß bei Kindern dieser Altersstufe in hohem Maße die Fähigkeit vorhanden ist, bei der Reproduktion ebener geometrischer Figuren euklidisch-metrische Eigenschaften zu berücksichtigen. Bei verschiedenen Darstellungsmedien, wie Nachzeichnen oder Nachkleben mit Holzstäbchen, werden die Ergebnisse in unterschiedlicher Weise beeinflußt. Die Stäbchentechnik bietet dabei den Kindern Möglichkeiten, die von ihnen wahrgenommenen Informationen adäquat zu verarbeiten. Insgesamt stellt sich heraus, daß von den Kindern vor allem die formbestimmenden Eigenschaften wie Winkel und Verhältnisse der Seitenlängen berücksichtigt werden.
Die Ergebnisse legen curriculare Anregungen in Richtung auf vermehrte Aktivitäten zur Erfahrung euklidisch-metrischer Eigenschaften bei geometrischen Figuren nahe.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

B. ZIMMERMANN: Die Rolle der Anschauung beim Lösen von Aufgaben aus der Inzidenzgeometrie

Die Rolle der Anschauung wurde anhand von Aufgaben aus der Inzidenzgeometrie im Rahmen einer exploratorischen Studie analysiert. Studenten und Schüler hatten in Einzelsitzungen beim Problemlösen "laut" zu denken. Von diesen Sitzungen wurden Videoaufzeichnungen angefertigt und mit Hilfe eines neu entwickelten Kategoriensystem in standardisierte Protokolle übertragen. Deren Analyse ergab u.a.:

- Repräsentationswechsel erzeugen zwar häufig Lösungsideen aber auch Fehler.
- Repräsentationswechsel erfolgen aus systematischen Gründen, in kritischen Situationen oder zur Fixierung von Lösungsideen.
- Es läßt sich ein enaktiver von einem ikonischen Typ unterscheiden. Der enaktive Typ veranschaulicht überwiegend durch Ringe und Fäden. Er ist eher impulsiv (d.h. schnell und macht viele Fehler), mitteilsam und auch selbstbewußt. Der ikonische Typ fertigt überwiegend Zeichnungen an. Er ist eher reflexiv (d.h. langsam und macht wenig Fehler), relativ schweigsam und geht eher systematisch vor. Er äußert eher Verständnisabsicht und gibt sich häufiger ratlos.

H.Glaser (Würzburg)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©