MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 33/1978

Konstruktive Verfahren in der komplexen Analysis

6.8. bis 12.8.1978

Zum ersten Mal fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Tagung über konstruktive Verfahren in der komplexen Analysis statt. Die Leitung hatten D. Gaier (Giessen) und P. Henrici (Zürich) übernommen. Die 34 Teilnehmer begrüssten dieses erstmalige Zusammentreffen sehr und waren sich in dem Wunsch einig, dass diese Tagung nicht die letzte dieser Art in Oberwolfach sein möge. Es wurden 30 Vorträge von 30 bis 60 Minuten Dauer gehalten. Etliche der zu zwei Drittel aus dem Ausland (USA, Schweiz, England, Kanada) stammenden Teilnehmer befanden sich auf der Durchreise zum Internationalen Mathematikerkongress in Helsinki.

Die meisten der Vorträge beschäftigten sich mit konformen Abbildungen ein- und mehrfach zusammenhängender Gebiete auf Normalgebiete. Dazu wurden Integralgleichungsmethoden, Extremal- und Variationsprinzipien, die Methode der Bergmanschen Kernfunktion, Interpolation und Schwarz-Christoffel-Formel benutzt. Moderne Hilfsmittel wie Splines, finite Elemente, schnelle Fouriertransformation und lineare Optimierung spielten eine wichtige Rolle. Andere Vorträge beschäftigten sich mit partiellen Differentialgleichungen, Konvergenzbeschleunigung und Fortsetzbarkeit von Potenzreihen, Nullstellen und Abschätzung der Ableitungen gewisser Polynome, Berechnung von Fourierkoeffizienten, Laplace-Transformationen und verschiedenen Problemen der numerischen Mathematik.

Bis kurz vor dem auf Donnerstagnachmittag verschobenen Ausflug hielt das Regenwetter an. Bei strahlendem Sonnenschein fuhr eine Gruppe nach Alpirsbach und Freudenstadt, eine zweite wanderte nach St. Roman.

Teilnehmer

H. Begehr, Berlin
J.-P. Berrut, Zürich
H.-P. Blatt, Mannheim
J. Burbea, Pittsburgh (USA)
J. Dehnhardt, Hannover
S.W. Ellacott, Brighton (England)
B. Fischer, Zürich
D. Gaier, Giessen
P. Geiger, Zürich
E. Grassmann, Zürich
M. Gutknecht, Zürich
A.E. Heins, Ann Arbor (USA)
W. Hengartner, Quebec (Kanada)
P. Henrici, Zürich
H.-P. Hoidn, Zürich
O. Hübner, Giessen
N. Kerzman, Cambridge (USA)
H. Löffler, Darmstadt
J.N. Lyness, Argonne (USA)
P.A. McCoy, Annapolis (USA)
K. Menke, Dortmund
W. Niethammer, Mannheim
G. Opfer, Hamburg
A.M. Ostrowski, Basel
N. Papamichael, Uxbridge (England)
Q.I. Rahman, Montreal (Kanada)
G. Schmeisser, Erlangen
G. Schober, Bloomington (USA)
G.T. Symm, Teddington (England)
A. Talbot, Uxbridge (England)
O. Taussky, Pasadena (USA)
J. Todd, Pasadena (USA)
B.A. Trösch, Los Angeles (USA)
W.L. Wendland, Darmstadt

Vortragsauszüge

H. BEGEHR: Das Riemannsche Randwertproblem für pseudoparabolische Gleichungen

Mit Hilfe der Cauchy-Kern-Funktionen für verallgemeinerte analytische Funktionen lassen sich die Plemelj-Sokhotski Formeln für Lösungen ($w=w(z,t)$) von

$$w_{\bar z t} + a w_t + b\bar w_t + cw + d\bar w = 0 \quad (z \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

herleiten, wenn die Koeffizienten a,b,c,d nur von der Variablen z abhängen, zu $L_p(G)$ ($2<p$, G endliches Gebiet) gehören und ausserhalb G identisch verschwinden. Lösungen von (1) genügen

$$\begin{aligned} w &- \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}(aw+b\bar w)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\int_0^{0}(cw+d\bar w)\,d\tau\,\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} \\ &= w_0 - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}(aw_0+b\bar w_0)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t) z^k \quad (\zeta=\xi+i\eta,\ w_0=w(z,0)), \end{aligned} \tag{2}$$

wo die Potenzreihe in $\mathbb{C}$ konvergiert und die a_k differenzierbare Funktionen sind, die nur von der Lösung w abhängen. Mit (2) lassen sich unter Verwendung des erzeugenden Paares der Gleichung

$$w_{\bar{z}} + aw + b\bar{w} = 0$$

spezielle (beschränkte) Lösungen von (2) konstruieren, die neben den Formeln von Plemelj-Sokhotski zur Darstellung der allgemeinen Lösung des Problems (1) unter der Bedingung

(3) $\quad w^{+}(z,t) = g(z)w^{-}(z,t) + \gamma(z,t) \qquad (z \in \partial G,\ t \in \mathbb{R})$

benötigt werden. Dabei sind g und γ Hölder-stetige Funktionen von z auf Γ mit $g(z) \neq 0$, $\gamma(z,o) \equiv o$ und γ in t differenzierbar.

J.-P. BERRUT: <u>Numerische Lösung der Symm'schen Integralgleichungen durch Fouriermethoden</u>

Die dargestellte Lösungsmethode beruht auf einer Aufspaltung des Integrals in zwei Teile, einem regulären und einem singulären. Diese Zerlegung legt einen Iterationsvorgang nahe. Indem eine Fourierreihe für die gesuchte Ableitung der Ränderzuordnungsfunktion angesetzt wird, lässt sich das singuläre Integral explizit berechnen. Die (numerische) Fouriertransformation der bekannten Teile der resultierenden Gleichung mittels schneller Fouriertransformation (FFT) erlaubt dann die effiziente Durchführung der Iteration; die Wirksamkeit der Methode wird an einigen Beispielen demonstriert.

H.-P. BLATT: <u>Ein Aufstiegsverfahren für komplexe lineare Approximationsaufgaben</u>

$(E, ||\cdot||)$ sei ein linearer normierter Raum über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, $G = \text{span}\ (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ ein n-dimensionaler Unterraum von E. Gesucht ist zu festem $f \in E$ ein $\tilde{g} \in E$ mit der Eigenschaft

$$d_G(f) := \min_{g \in G} ||f - g|| = ||f - \tilde{g}||.$$

Durch eine Verallgemeinerung der Stiefelschen Referenz, der Referenzkette, wird ein iteratives Verfahren aufgebaut: Jeder Schritt besteht aus einer Tschebyscheffaufgabe über einer Referenzkette im $\mathbb{R}^{2n}$, so dass die Folge der Minimalabweichungen monoton wachsend gegen $d_G(f)$ konvergiert und eine Minimallösung konstruiert wird. Erfüllt G die Haarsche Bedingung, so ergibt sich das Verfahren von Laurant bzw. Remez.

J. BURBEA: Methods of Orthonormal Functions in Conformal Mappings

This is a report on a numerical method for determining the modulus of a doubly connected region. It is based on ideas of some recent papers of the author [Kōdai Math.Sem.Rep. 29 (1977), 157-166 and J.Math.Soc.Japan 29 (1977), 755-761]. Let D be a doubly connected region with a $C^{1+\varepsilon}$ boundary ∂D. An orthonormal basis for $H_2(\partial D)$ is constructed in the usual way thereby having the Szegö kernel for D, $K(z,\bar{\zeta})$. This can also be constructed without the use of the orthonormal basis via a method due to N. Kerzman and E.M. Stein [Math.Ann 236 (1968), 85-93]. One then forms the invariant $J(z)=\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\log K$, $K=K(z,\bar{z})$ and also finds $\alpha_D = \max_{z\in D} J(z)$. It can be shown that $J(z) > 4\pi^2$ and that (within a proper approach) $J(z) = 4\pi^2$ for $z \in \partial D$. Let $\frac{1}{r}$ $(0<r<1)$ be the modulus of D. Then

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_n}{2^{4n+1}} \left[\frac{1-(1-\beta)^{1/4}}{1+(1-\beta)^{1/4}} \right]^{4n+1} \quad \text{where} \quad \beta = \frac{4\pi^2}{\alpha_D} \qquad (0<\beta<1)$$

and $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a sequence of integers (>0) coming from the well known inversion of the modular function. Thus $\delta_0=1$, $\delta_1=2$, $\delta_2=15$, $\delta_3=150,\ldots$. The series converges rapidly and usually the first two terms suffice. An error analysis is available.

J. DEHNHARDT: Zur numerischen Auswertung der Schwarz-Christoffel-Formel

Die effektive Auswertung der Schwarz-Christoffel-Formel für die konforme Abbildung der oberen Halbebene auf das Innere (oder Äussere) eines Geradenpolygons führt bei höherer Eckenzahl auf nichttriviale numerische Probleme. Vorgestellt wird eine von E.S. Meyer, Hannover, ausgeführte Kombination von Verfahren zur Lösung des Parameterproblems und zur Funktionswertberechnung mit hoher Genauigkeit.

(a) Geometrische Verfahren zur sukzessiven Schätzung von Startwerten für die Parameterbestimmung.

(b) Auswertung der uneigentlichen Integrale für die Seitenlängen mit Hilfe der hypergeometrischen Funktion.

(c) Einbettungsverfahren zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystem für die Parameter.

(d) Funktionswertberechnung (speziell bei Aussengebieten für Punkte in der Nähe der Singularität).

S.W. ELLACOTT: Some Applications of Approximation Theory to Conformal Mapping

Some theoretical and experimental results concerned with the approximation of known conformal mappings by polynomials and rational functions are first considered. Then methods of constructing conformal mappings based on approximation are discussed. These offer some advantages of convenience over integral equation methods, although there are problems in achieving high accuracy. The mapping of simply and doubly connected regions are considered.

D. GAIER: Giessener Arbeiten zur Konformen Abbildung

Es wird ein Bericht über verschiedene Methoden der konformen Abbildung gegeben, die zur Zeit in Giessen studiert werden.

Teil I: Benützung von Variationsprinzipien. Die Prinzipien von Dirichlet und Thomson gestatten, den Modul von Vierecken und von Ringgebieten nach oben und unten abzuschätzen. Als Testfunktionen nimmt man zweidimensionale [bzw. eindimensionale] Splines, eventuell ergänzt durch singuläre Elemente. Fehlerabschätzungen der Form $\mathcal{O}(h^\alpha)$ werden angegeben, über Experimente wird berichtet (Frau Weisel, Giessen).

Teil II: Zusammenhang mit der Bergmanschen Kernfunktion. Diese gestattet, verschiedene Normalabbildungen mehrfach zusammenhängender Gebiete anzugeben. Es ist aber auch möglich, durch direkte Lösung eines Minimalproblems (Ritz-Ansatz) diese Abbildungsfunktionen zu gewinnen. Kürzere Rechenzeit, aber Nachteil beim Übergang n - n+1. Die Methode (Gaier 1963) wurde jetzt erstmals getestet.

Teil III: Integralgleichungen mit logarithmischem Kern. Für die Integralgleichung von Symm für mehrfachen Zusammenhang werden folgende Fragen vollständig gelöst: Existenz einer Lösung aus L; Eindeutigkeit der Lösung, falls cap $\Gamma_n \neq 1$. (Γ_n Aussenrand); geometrische Interpretation der Lösung. Bericht über Experimente.

E. GRASSMANN: Extremal Problems of Conformal Mapping

A report of a numerical treatment of the following problems was given:

Problem 1: Given n points $c_i \in \mathbb{C}$; find a continuum C; $c_i \in C$ of minimal capacity.

Problem 2: Given n points c_i and m points d_i; find continua C and D; $\{c_i\} \subset C$, $\{d_i\} \subset D$ such that $\hat{\mathbb{C}}\ (C \setminus D)$ has maximal modulus.

Problem 3: Given a_2, a_3, θ; find $f \in S$; $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ such that Re $e^{i\theta} a_4$ is maximal.

Solutions of all three problems were displayed graphically.

M.H. GUTKNECHT: Bemerkungen zum Theodorsen-Verfahren für konforme Abbildungen

Zur numerischen Lösung der Integralgleichung von Theodorsen werden verschiedene Methoden skizziert, bei all denen die schnelle Fourier Transformation angewendet werden kann: Nichtlineare Jacobi-, SOR-, Euler- und semiiterative Iteration, ferner das Newton-Verfahren kombiniert mit den entsprechenden linearen Iterationen. Falls das abzubildende Gebiet eine gewisse Symmetriebedingung erfüllt, können nahezu optimale Parameter (z.B. Unterrelaxationsfaktor bei SOR) angegeben werden. Fast ohne Mehraufwand kann man - ausser beim SOR-Verfahren - zum Beispiel auch periodische Spline-Funktionen benützen bei der Diskretisierung der Integralgleichung. Es liegt eine grosse Zahl numerischer Experimente vor.

A.E. HEINS: Remarks on a Representation Theorem for Axially-Symmetric Potential Equation

This talk will present two related topics. The first topic deals with a modification of a standard representation theorem for the solutions of the axially symmetric potential equation. This modification enables one to formulate a boundary value problem for an axially-symmetric body with Dirichlet boundary conditions in terms of a relatively classical problem in analytic function theory exterior to a circle. The second topic then deals with the fact that certain coefficients in the asymptotic development of this analytic function provide directly such parameters as capacity and polarization coefficients without solving the full three dimensional problem. At the present writing, we cannot characterize the geometry of the meridian plane precisely.

W. HENGARTNER: Uniform Approximation and Simultaneous Interpolation on Closed Set

Let D be a domain of $\mathbb{C}$, D^* the one-point-compactification of Alexandrof of D and F a closed set in D. Moreover let $\{z_n\}$ be a sequence in $F \setminus \mathring{F}$ without finite limit points. Then for each $f \in A(F)$, $\varepsilon > 0$ and arbitrary given complex numbers $\omega_{n,r}$, $r=1,2,\ldots,r(n)$, $n \in \mathbb{N}$, there is a $g \in H(D)$ such that

1) $||f-g||_F < \varepsilon$

2) $g(z_n) = f(z_n)$

3) $g^{(k)}(z_n)=\omega_{n,k}$, $k=1,2,\ldots,r(n)$; $n \in \mathbb{N}$.

P. HENRICI: Numerische konforme Abbildung: Eine Herleitung der Integralgleichungen mit Neumannschem Kern

Sei D ein Jordangebiet mit glattem Rand Γ: $z = z(\tau)$, $0 \leqq \tau \leqq \beta$, $0 \in D$. Es bilde f D konform auf die Einheitskreisscheibe E ab, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, $g := f^{[-1]}$. Die innere Randzuordnungsfunktion θ ist ein stetiges Argument $\theta(\tau) = \arg f(z(\tau))$, $0 \leqq \tau \leqq \beta$. Ist z im Äusseren von Γ, so kann $h(w) := \log(z - g(w))$ als in E analytische Funktion erklärt werden, und es gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{i\theta})\, d\theta = h(0), \text{ d.h.}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\beta} \log(z - z(\tau))\, \theta'(\tau)\, d\tau = \log z. \tag{1}$$

Hieraus folgt (a) durch die Operation Re und Grenzübergang $z \to z(\sigma)$ $(0 \leqq \sigma \leqq \beta)$ die Integralgleichung (IG) von Symm; (b) durch Differentiation nach z, Grenzübergang $z \to z(\sigma)$ unter Verwendung der Formeln von Plemelji und Betrachtung des Imaginärteils die Warschawskische IG mit Neumannschem Kern für θ' ;

(c) durch partielle Integration und $z - z(\sigma)$ analog die Gerschgorinsche IG für θ. Aus zwei zu (1) analogen Lemmata folgen in genau entsprechender Weise die IGen für die Randzuordnungsfunktionen für die äussere Abbildungsfunktion, und für die Abbildung von Ringgebieten.

H.-P. HOIDN: <u>Numerische Erfahrungen mit den Integralgleichungen von Warschawski</u>

In den Integralgleichungen von Warschawski für ein- bzw. zweifach zusammenhängende Gebiete bei der konformen Abbildung wird die Ableitung der Ränderzuordnungsfunktion approximiert durch eine Linearkombination von B-Splines. Mit Kollokation wird ein Gleichungssystem für die Koeffizienten bestimmt. Für Testgebiete mit ein- bzw. zweifachem Zusammenhang liegen Resultate vor.

O. HÜBNER: <u>Zur Numerik des Theodorsen-Verfahrens in der konformen Abbildung</u>

Die konforme Abbildung der Einheitskreisscheibe auf ein Gebiet G, dessen Rand durch Polarkoordinaten $\varrho = \varrho(t)$ gegeben ist, kann über die Theodorsensche Integralgleichung gewonnen werden. Diskretisiert man diese, so erhält man das nichtlineare Gleichungssystem (1) $x = a + W \log \varrho(x)$. Letzteres kann man mit schneller Fouriertransformation (FFT) und Gesamtschrittmethoden rasch auswerten. Nach geeigneter Permutation von Zeilen und Spalten von (1) erhält man (2) $y = b + \begin{pmatrix} 0 & R \\ L & 0 \end{pmatrix} \log \varrho(y)$. Auch Rz und Lz lassen sich schnell mit FFT berechnen. Damit ist (2) der Bearbeitung mit SOR-Techniken zugänglich. Ist G symmetrisch zur reellen Achse und ϱ monoton in $[0,\pi]$, werden in einer Klasse mehrparametriger, nichtlinearer SOR-Verfahren die optimalen Parameter bestimmt. Man erhält meist einen kleineren Konvergenzfaktor als beim SOR-Verfahren. Das Verfahren löst (2) und damit (1) selbst für nichtkreisnahe G. Bemerkungen über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (1) für nicht-kreisnahe G werden gemacht.

N. KERZMAN: Conformal Mapping in Terms of the Cauchy Kernel and its Adjoint

Consider a smooth simply connected planar domain Ω. Its Riemann mapping function is just as mysterious as its Szegö kernel, since they are related by an elementary well-known formula. We write the Szegö kernel of any smooth domain (simply connected or not) in terms of the Cauchy kernel and its adjoint. In favorable cases our formula becomes a series that converges very fast.

The main idea is to look at the (non-orthogonal) projection given by the Cauchy kernel from L^2 of the boundary onto the holomorphic subspace. By iterations we obtain the orthogonal projection and hence the Szegö kernel. A by-product is: The Cauchy and Szegö kernels are the same if and only if the domain is a circle.

This is a joint work with E. Stein from Princeton University, and will appear soon in Mathematische Annalen, with the title ''The Cauchy kernel, the Szegö kernel and the Riemann mapping function''.

H. LÖFFLER: Ein Verfahren zur Approximation der Vollkreisabbildung für mehrfach zusammenhängende Gebiete mit Hilfe eines Extremalprinzips

Gesucht sei die konforme Abbildung f eines n-fach zusammenhängenden Gebiets Δ mit analytischem Rand Γ (Randkomponenten Γ_ν, $\nu=1,2,\dots,n$) auf ein Vollkreisgebiet. Von Schiffer-Hawley (1962) wurde gezeigt, dass das Funktional

$$\Phi[u] = \frac{1}{2}\iint_\Delta (\nabla u)^2 d\tau + \int_\Gamma u\,\kappa(s)ds + 2\pi\sum_{\nu=1}^{n}\log\int_{\Gamma_\nu} e^u\,ds$$

($\kappa(s)$ = Krümmung der Randkurve) auf einer geeigneten Funktionenmenge sein Minimum für $u(z) = \log|f'(z)|$ annimmt. $u(z)$ wird approximiert durch

$$u_N(z) = \sum_{\mu=0}^{N}\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_{\mu n+\nu}\mathrm{Re}(z-\alpha_\nu)^{-\mu-1}+\delta_{\mu n+\nu}\mathrm{Im}(z-\alpha_\nu)^{-\mu-1}$$

($\alpha_\nu \in \mathrm{int}\,\Gamma_\nu$). Auf den endlichen Teilräumen ist Φ gleichmässig konvex. Dann hat das nichtlineare Gleichungssystem

$$\frac{\partial\Phi(u_N)}{\partial\gamma_j} = \frac{\partial\Phi(u_N)}{\partial\delta_j} = 0$$

für γ_j und δ_j genau eine Lösung. Sie kann durch das Newton-Verfahren bestimmt werden.

J.N. LYNESS: Calculation of Trigonometrical Fourier Coefficients using the Lanczos Representation

The Lanczos Representation of $f(x)$ in the interval $[0,1]$ expresses $f(x)$ as the sum of a polynomial $h_{p-1}(x)$ of degree $p-1$ and a function $g_p(x) = f(x) - h_{p-1}(x)$ whose Fourier coefficients converge more rapidly than those of $f(x)$: (as r^{-p} instead of r^{-1}). This representation may be used as the basis for calculating Fourier coefficients of $f(x)$ by employing necessarily inaccurate numerical derivatives of $f(x)$ to construct an approximation to $h_{p-1}(x)$ and using a discrete Fourier Series of the resulting approximation to $g_p(x)$. In this talk, it is shown that under certain reasonable circumstances, accurate approximations to the Fourier coefficients of $f(x)$ may be calculated.

P.A. MCCOY: The Effect of Boundary Data on Analytical Properties of Solutions to an Elliptic Equation in the Plane

In this paper, solutions $F= F(x,y)$ of the second order elliptic equation $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\alpha+1}{y}\frac{\partial}{\partial y} + C(x^2+y^2)\right]F = 0,\ \alpha > -\frac{1}{2}$ with entire function coefficient C of finite order and type, are viewed as generalizations of harmonic functions. Let the real solution F be regular in the open unit disk D about the origin and continuous on cl(D). For $C\equiv 0$, a survey of recent work by the author is given whereby Chebyshev approximation to the boundary values of F by harmonic polynomials determines necessary and sufficient conditions that F harmonically continue as an entire function of specified order and type; and for F regular on cl(D), Chebyshev approximation to the boundary values of F by certain Newtonian potentials gives information on the location of the finite singularities. Some extensions are given for the case $C \neq 0$. These results use the Bergman and Gilbert integral operator method.

K. MENKE: Näherung der konformen Abbildung durch Interpolation

Sei C eine geschlossenen Jordankurve der komplexen Ebene, G das Aussengebiet von C und $f(z) = dz + a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \ldots \; (d > 0)$ die konforme Abbildung des Äusseren Δ des Einheitskreises auf G. Dann ist $\frac{f(z)}{z}$ in Δ analytisch und kann dort durch Polynome in z^{-1} approximiert werden. Eine solche Approximation wird hier nun auf folgende Weise konstruktiv durchgeführt:
Man definiert auf C für jedes n Punkte $w_{n1}, \ldots, w_{nn}$ über eine Extremaleigenschaft. Indem man den n-ten Einheitswurzeln diese Punkte $w_{n1}, \ldots, w_{nn}$ geeignet zuordnet, wird $\frac{f(z)}{z}$ durch Interpolationspolynome $P_n(z)$ in z^{-1} angenähert. Unter gewissen Voraussetzungen über die Glätte von C werden Aussagen über die Güte der Konvergenz von $P_n(z)$ gegen $\frac{f(z)}{z}$ gemacht.

W. NIETHAMMER: Auswertung von transformierten Potenzreihen

Ist eine Funktion durch eine Potenzreihe gegeben, so lassen sich Summierungsmethoden auch numerisch zur Konergenzbeschleunigung der Reihe innerhalb des Konvergenzkreises sowie in einem gewissen Umfang zur analytischen Fortsetzung von f in Punkte ausserhalb des Konvergenzkreises anwenden.
Für eine spezielle Klasse von allgemeinen Euler-Verfahren, die die klassische Eulersche Reihentransformation und das Euler-Knopp-Verfahren umfasst, wird ein rekursiver Algorithmus für die Berechnung der transformierten Reihe vorgestellt. Anschliessend wird der Wirkungsbereich dieser Methode untersucht und die Steuerung der Parameter des Verfahrens für eine konkrete Konfiguration der Singularitäten von f diskutiert.

G. OPFER: Neue, konstruktiv ausnutzbare Extremalprinzipien konformer Abbildungen

Es ist bekannt, dass für ein gegebenes Gebiet G, das Null enthält, die gleichmässige Norm $\|f\| = \sup_{z\in G} |f(z)|$ in der Klasse aller holomorpher Funktionen, normiert durch $f(0)=0$, $f'(0)=1$ nur durch die konforme Abbildung $f\colon G \to D(r) = \{z\colon |z|<r\}$ minimiert wird. Es wird gezeigt, dass dieser Satz gültig bleibt, wenn man den gewöhnlichen Absolutbetrag $|\ |$ durch irgendeine andere Norm in $\mathbb{C}$ ersetzt. Speziell erhält man für die Normen $|\ |_1$ und $|\ |_\infty$ einfache und schnelle Berechnungsverfahren mit Hilfe von Methoden der linearen Optimierung. Verschiedene numerische Beispiele werden vorgeführt.

N. PAPAMICHAEL: The Use of Singular Functions in the Bergman Kernel Method for the Numerical Conformal Mapping of Simply-connected Domains

The use of the Bergman kernel method (BKM), for the numerical conformal mapping of a simply-connected domain Ω onto the unit disc, is considered. It is shown that, for a successful application, the basis of the series representation of the Bergman kernel function must contain terms that reflect the main singular behaviour of the kernel in the complement of Ω. This can be achieved by using as basis the monomial set $\{z^j\}$ augmented by the introduction of appropriate singular functions. Several numerical examples are presented. These indicate clearly that the BKM, with a suitable augmented basis, is an extremely accurate method for the numerical conformal mapping of simply-connected domains.

Q.I. RAHMAN: On Polynomials with Curved Majorants

We discuss the background and the motivation behind the following problem proposed by the late Professor Paul Turán at a conference held in Varna, Bulgaria in the year 1970:

Let $\varphi(x) \geqq 0$ for $-1 \leqq x \leqq 1$ and consider the class $\mathcal{P}_{n,\varphi}$ of all polynomials $p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ of degree at most n such that $|p_n(x)| \leqq \varphi(x)$ for $-1 \leqq x \leqq 1$. How large can $|p_n'(x_o)|$ be at a given point $x_o \in [-1,1]$ if $p_n(x)$ is an arbitrary polynomial belonging to $\mathcal{P}_{n,\varphi}$?
We also report on the progress made so far.

G. SCHMEISSER: Lokalisierung der Nullstellen von Polynomen mit Hilfe einer vorgegebenen Norm

Es bezeichne $\mathcal{P}_n$ die Klasse aller Polynome

$$f_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_o \quad (a_o, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}),$$

versehen mit einer der Normen

$$||f_n||_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad ||f_n||_\infty := \max_{-\pi \leqq \theta \leqq \pi} |f_n(e^{i\theta})|,$$

$$\mathcal{M}_p(f_n) := \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |f_n(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad \mathcal{M}_\infty(f_n) := \max_{-1 \leqq x \leqq 1} |f_n(x)|,$$

$(1 \leqq p < \infty)$. Wir fragen nach der Lage der Nullstellen eines Polynoms $f_n(z) \in \mathcal{P}_n$, wenn nur dessen Norm bekannt ist. Ein typisches Ergebnis von zentraler Bedeutung ist die für jedes k mit $1 \leqq k \leqq n$ gültige Ungleichung

$$|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{k-1}| + |\xi_k \xi_{k+1} \cdots \xi_n| \leqq ||f_n||_\infty$$

bei der $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ die Nullstellen von $f_n(z)$ in beliebiger Reihenfolge bezeichnen und im Fall k=1 der erste Term zu 1 wird. Als Anwendung bekommen wir ein quantitatives Ergebnis zu einem Problem von Bernstein und einen alternativen Beweis zu einer Vermutung von Mahler.
Alle Ergebnisse entstanden in Zusammenarbeit mit Prof.Q.I.Rahman.

G. SCHOBER: Applications of the Calculus of Variations for Families of Quasiconformal Mappings

Classically, the calculus of variations has been used both to solve extremal problems and to provide existence theorems for solutions of differential equations. A calculus of variations has been developed for compact families of quasiconformal mappings. We shall report on recent applications both to solving extremal problems and to giving existence and representation theorems for solutions of some linear and nonlinear partial differential equations.

G.T. SYMM: <u>A Novel Formulation and Solution of the Plane Elastostatic Displacement Problem</u>

The plane elastostatic displacement problem is formulated in terms of two harmonic functions and their conjugates.Each of the harmonic function is represented by a simple-layer logarithmic potential of the form $\Phi(p) = \int_{\partial B} \log|p-q|\sigma(q)\, dq$, where σ is a source density on the boundary ∂B of the relevant domain. The conjugate functions then have the form $\overline{\Phi}(p) = \int_{\partial B} \theta(p-q)\sigma(q)\, dq$, where $\theta(p-q)$ is the angle between the vector p-q and some fixed direction. Using these representations, the displacement problem is reduced to a system of coupled integral equations in two source densities. These equations are solved numerically and results are presented for a simple test example.

A. TALBOT: <u>The Accurate Numerical Inversion of Laplace Transforms</u>

Numerical inversion of almost arbitrary Laplace transforms F(s) of functions f(t), for any value of t, and to prescribed accuracy up to at least three-quarters of the computer precision, is effected by trapezoidal integration of $F(\lambda s+\sigma)$, for suitable λ and σ, along a selected member of a family of contours in the s-plane. The required number of points depends on t, the accuracy desired, and the positions and nature of the singularities of F(s), and especially of the singularity which is 'dominant' in a certain sense. The strategy is based on an analysis of the trapezoidal error into contour integrals in an auxiliary complex plane.

J. TODD: Applications of Elliptic Functions and Integrals

Among the apllications to be discussed are the following:

(1) Rapid evaluation of π. (Brent, Salamin.)

(2) Rapid evaluation of elementary functions. (Brent.)

(3) The problems of Zolotarev.

(4) Filter circuit design. (Cauer, Darlington.)

(5) Optimal ADI parameters.

(6) Optimal starting values. (Ninomiya.)

(7) Economization and Zolotarev's first problem.

(8) Other applications.

B.A. TRÖSCH: Problems in Fluid Sloshing, Pipe Line Corrosion and Oil Field Flow

Two- dimensional problems for the Laplace equation lend themselves to the application of complex variables and possibly conformal mappings. Several situations are described where these mathematical tools have been or could be applied.

1. In the isoperimetric sloshing problem (originally considered for liquid rocket propellants) the shape of a container has to be found which maximizes the sloshing frequency. The use of the complex hodograph plane recommends itself.

2. An electrostatic problem in a multiply-connected infinite domain arose in the corrosion investigation for the Alyeska underground pipeline. One important configuration has been solved by J.-P. Berrut using a conformal mapping and Symm's integral equation.

3. Flow computations in geothermal reservoirs and in oil fields with injection and production wells (Physical Principles of Oil Production by M. Muskat) lead to similar problems.

W.L. WENDLAND: Über die Integralgleichung erster Art mit logarithmischem Kern und ihre numerische Behandlung

Betrachtet wurden Integralgleichungen der Gestalt

$$(1) \qquad -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \ln|z(s)-\zeta|g(s)\,ds + \int_\Gamma K(s,\zeta)g(s)\,ds = f(\zeta) \text{ für } \zeta\in\Gamma$$

auf einer geschlossenen genügend glatten ebenen Kurve Γ, zu denen die Symm'sche Integralgleichung gehört. Verwendet man für (1) Galerkin-Verfahren und finite Elemente, so erhält man nach [1] Konvergenz von optimaler Ordnung. Nach [2] wurde für stückweise Polynome m-ter Ordnung (m=0,1,2) der Operator in (1) in einen Standard-Hauptteil und einen glatten Rest zerlegt. Die Standardform führt auf Integrationsgewichte, die weder von der Kurve noch der Anzahl der Ansatzfunktionen abhängen und in [2] ein für allemal berechnet wurden. Für den glatten Rest in (1) wird eine den finiten Elementen angepasste möglichst grobe numerische Integration entwickelt. Das Verfahren konvergiert dann immer noch mit optimaler Fehlerordnung bei extrem kurzen Rechenzeiten. Einige numerische Beispiele bei Ellipsen zeigen die überraschend gute Genauigkeit.

[1] G.C. Hsiao and W.L. Wendland: A finite element method for some integral equations of the first kind. J. Math. Anal. Appl. 58 (1977).

[2] P. Kopp und W.L. Wendland: Numerische Behandlung von Integralgleichungen 1. Art ... . Preprint 441 (1978) Mathematik TH Darmstadt.

O. Hübner (Giessen)