MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 45 / 1978

"Zahlentheorie"

29. 10. bis 4. 11. 1978

Die - aus organisatorischen Gründen auf 1978 vorverlegte - Tagung über Zahlentheorie, insbesondere elementare und analytische Zahlentheorie, fand wieder unter der Leitung der Herren H.-E. Richert(Ulm), W. Schwarz (Frankfurt) und E. Wirsing (Ulm) statt. Da die letzte Tagung mit starker internationaler Beteiligung nur ein Jahr zurücklag, wurde diesmal eine fast "deutsche" Tagung durchgeführt, um vor allem jüngeren Mathematikern die Gelegenheit zu Vorträgen und fruchtbaren Diskussionen zu ermöglichen. So ergab sich eine fast intime Tagung mit 42 Teilnehmern (aus 4 Ländern) und 28 Vorträgen, die persönlichen Kontakten viel Raum ließ. Auf großen Anklang stießen dabei die, erstmals in das Programm aufgenommenen, Übersichtsvorträge (zwischen 1 und 1 1/2 Stunden), zu denen die Herren K.-B. Gundlach, H. Halberstam, R. Heath-Brown, M. Waldschmidt und D. Wolke gewonnen werden konnten. Außerdem stellte wiedereinmal die "Problemsession" von und mit P. Erdös einen Höhepunkt dar. Nicht zuletzt gebührt auch dem schönen Novemberwetter Anteil an dem Erfolg der diesjährigen Tagung.

Teilnehmer

H.-J. Besenfelder, Oldenburg	A. Dressler, Marburg
P. Bundschuh, Köln	P. Erdös, Budapest
K. Burde, Braunschweig	J. H. Goguel, Ulm

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

K.-B. Gundlach, Marburg
E. Härtter, Mainz
H. Halberstam, Nottingham
F. Halter-Koch, Essen
H. Harborth, Braunschweig
H. Hasse, Hamburg
R. Heath-Brown, Cambridge
E. Heppner, Frankfurt
J. G. Hinz, Marburg
P. Houtermans, Hannover
H.-J. Kanold, Braunschweig
D. Klusch, Berlin
D. Leitmann, Clausthal-Zellerfeld
H. v. Lienen, Braunschweig
L. Lucht, Clausthal-Zellerfeld
A. Mrose, Berlin
H. Müller, Hamburg
H.-E. Richert, Ulm
G. J. Rieger, Hannover
F. Roesler, München
Th. Schneider, Freiburg
P. G. Schmidt, Marburg
H. P. Schlickewei, Freiburg
B. Schoeneberg, Hamburg
W. Schwarz, Frankfurt
H. Siebert, Ulm
B. Volkmann, Stuttgart
G. Wagner, Stuttgart
M. Waldschmidt, Paris
R. Wallisser, Freiburg
R. Warlimont, Regensburg
A. Wenke, Frankfurt
E. Wirsing, Ulm
J. Wolfart, Freiburg
D. Wolke, Freiburg
G. Wüstholz, Freiburg

Vortragsauszüge

H.-J. Besenfelder: Über eine Vermutung von Tschebyscheff

Tschebyscheff behauptete 1853

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} e^{-p/x} = -\infty \qquad (p \text{ prim}).$$

Landau und Hardy/Littlewood zeigten, daß (1) zu einem Analogon der Riemann'schen Vermutung äquivalent ist, nämlich zu

$$(2)\quad L(s,\chi_1) \neq 0 \text{ für } \operatorname{Re} s > \tfrac{1}{2},\ \chi_1 \text{ der Nicht-Hauptcharakter mod } 4.$$

Knapowski und Turán gaben zu (1) ähnliche Summen an, die ebenfalls zu (2) äquivalent sind.

Mit Hilfe von Expliziten Formeln gelingt es - unabhängig von jeder Vermutung - zu zeigen

$$(3)\quad \lim_{x\to\infty} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} \frac{\log p}{p^{\alpha}} e^{-(\log^2 x)/x} = -\infty \text{ für } 0 \le \alpha \le \tfrac{1}{2}.$$

P. Bundschuh: Irrationalitätsmaße bei Besselfunktionen

$J_\lambda(z)$ bezeichne die Besselfunktion zum Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$. $\mathbb{K}$ sei entweder $\mathbb{Q}$ oder ein imaginär-quadratischer Zahlkörper. Unter anderem wird gezeigt:

Satz: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ so, daß $\alpha^2 \in \mathbb{K}$. Dann gibt es effektiv berechenbare Konstanten $c_i(\alpha,\lambda) > 0$, so daß für alle ganzen $p,q \in \mathbb{K}$, $q \neq 0$ gilt:

$$(i)\quad \left|\alpha J_{\lambda+1}(\alpha)/J_\lambda(\alpha) - \frac{p}{q}\right| \ge c_1 |q|^{-(2+c_2/\log\log|q|)}.$$

Sind überdies λ und $4\alpha^{-2}$ ganz in $\mathbb{K}$, so gilt sogar

$$(ii)\quad \left|\alpha J_{\lambda+1}(\alpha)/J_\lambda(\alpha) - \frac{p}{q}\right| \ge c_3 |q|^{-2} (\log(|q|+2))^{-1} \log\log(|q|+2).$$

(ii) verschärft ein Ergebnis von A.I.Galoschkin (1976) und ist insofern interessant, als wir zeigen können, daß - abgesehen vom numerischen Wert von c_3 - (ii) bestmöglich ist.

K. Burde: Zur intensiveren Ausnutzung der Struktur der Restklassenbereiche in der Zahlentheorie

In Anbetracht der Tatsache, daß die in der Zahlentheorie auftretenden

Restklassenbereiche schon ihrer Endlichkeit wegen verhältnismäßig übersichtliche Strukturen sind, liegt es nahe, zahlentheoretische Problemkreise, welche Eigenschaften dieser Bereiche zum Gegenstand haben, auch möglichst vollständig in diesen einfachen und ihnen auch angemessenen Bereichen - anstatt wie üblich im Körper der komplexen Zahlen - zu behandeln.

Die Arbeitsweise dieser "Methode" wird an einigen Fragestellungen aus den Problemkreisen "Verteilungseigenschaften von Potzenzresten", "Reziprozitätsgesetze" und "Primidealzerlegung in algebraischen Zahlkörpern " dargestellt.

K.-B. Gundlach: Fourierkoeffizienten von Modulformen und ihre Abschätzung

- Ein Überblick über einige neuere Entwicklungen -

Die obere Halbebene wird - wie üblich - als Modell der hyperbolischen Geometrie zugrunde gelegt. Nach vorbereitenden Betrachtungen über Bewegungsgruppen Γ (gegeben durch Untergruppen der $SL(2, \mathbb{R})$), deren Fundamentalbereichein (hyperbolisches) Polygon mit endlichem Inhalt und Spitzen ist und die zugehörigen Räume $M(\Gamma,k,v)$ der ganzen Modulformen vom Gewicht k mit Multiplikatorsystem $v(|v|=1)$ werden Konstruktionsmethoden für Modulformen behandelt, insbesondere Eisenstein- und Poincaréreihen, sowie die Gestalt der Fourierkoeffizienten dieser Reihen. Anschließend wird - nach Erinnerung an den Ursprung der Modulfunktionen in der Theorie der elliptischen Funktionen - an einigen Beispielen das Auftreten zahlentheoretischer Beziehungen gezeigt (die Partitionenfunktion bei Euler, die Thetafunktionen und die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von 2k Quadraten bei Jacobi, die Werte $\zeta(k-1)$ für $2|k$ bis auf einen trivialen Faktor als Skalarprodukt der normierten Eisensteinreihen des Gewichtes k zur Thetagruppe bei Petersson 1949).

Das Auftreten des Eulerproduktes für die Dirichletreihe zu $\Delta(z)$ bei Ramanujan 1916 und seine Vermutung $|\tau(p)| \le 2p^{11/2}$ (verallgemeinert zur Petersson'schen Vermutung $a_n \ll n^{(k-1)/2+\varepsilon}$ für die Fourierkoeffizienten einer Spitzenform vom Gewicht k) leiten über zur Skizze des Zusammenhanges von Spitzenformen und Dirichletreihen mit Funktionalgleichung (Hecke, Petersson, Weil 1968, Li 1975) und der Grundgedanken der Hecke'schen Operatorentheorie mit ihrer Anwendung auf die Darstellbarkeit der Dirichletreihe zu einer Spitzenform als Eulerprodukt. Rück-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

besinnung auf die elliptischen Kurven führt zu den zugehörigen Zetafunktionen, zur Riemann'schen Vermutung, zum Auftreten von Dirichlet-Reihen mit Eulerprodukt in dieser Theorie und schließlich zur Erwähnung des Beweises der Riemann-Weil'schen Vermutung durch Deligne mit ihrer Anwendung auf den Beweis der Petersson'schen Vermutung.

Es schließt sich ein kurzer Bericht über die Abschätzung der Fourierkoeffizienten von Poincaré'schen Reihen mit Hilfe nichttrivialer Abschätzungen der Kloostermann'schen Summen und die neuesten Fortschritte in Richtung auf den Beweis der Linnik'schen Vermutung (Kuznecov 1973) an.

E. Härtter: Relativnullen bei ρ-Differenzen von Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen

Für $A,B \subseteq \mathbb{N}_0$ sei die ρ-Differenz von A und B definiert durch
$A \underset{\rho}{-} B := \{a-b;\ \ a\in A,\ b\in B,\ b \le \rho a\}$ $(0 < \rho \le 1)$.

Neben einer Reihe von Eigenschaften dieser ρ-Differenz, die frühere Ergebnisse des Spezialfalls $\rho = 1$ verallgemeinern, werden hauptsächlich Relativnullen betrachtet: Gibt es zu $A \subseteq \mathbb{N}_0$ ein R, $\{0\} \neq R \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $A \underset{\rho}{-} R = A$, so heißt R Relativnull für A bezüglich ρ.

Definiert man noch für $U \subseteq \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$

$$U_\rho^{(m)} := \bigcup_{n\in U} \{n + t\,m;\ t\in\mathbb{Z}\} \cap \left[m\,\frac{1-\rho}{\rho}, \infty\right)$$ (also Vereinigung "verkürzter Restklassen" mod m), so gilt

<u>Satz:</u> A besitzt Relativnullen R bzgl. ρ genau dann, wenn es $m \in \mathbb{N}$ und U, $E \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $|E| < \infty$ gibt, so daß $A = U_\rho^{(m)} \mathbin{\dot\cup} E$ ($\dot\cup$: disjunkte Vereinigung).

Eine ähnliche Charakterisierung wird auch für Relativnullen R mit $0 \notin R$ angegeben.

H. Halberstam: Sieves: problems and achievements

Viggo Brun died on August 15, 1978, aged 92. Recall the origin of his celebrated sieve: Let $\mathcal{A}$ denote a finite collection of (not necessarily distinct or positive) integers and let $p_1,\dots,p_n$ be distinct primes, $P = p_1 \dots p_n$. The Number S of integers in $\mathcal{A}$ divisible by <u>none</u>

of the primes p_i is given by the combinatorial identity

$$(1)\quad S = |\mathcal{A}| - \sum_{1\le i\le n} |\mathcal{A}_{p_i}| + \sum_{1\le i<j\le n} |\mathcal{A}_{p_i p_j}| -+\dots+(-1)^n |\mathcal{A}_{p_1\dots p_n}|$$

$$= \sum_{d|P} \mu(d)\,|\mathcal{A}_d| \text{ , where } \mathcal{A}_d = \{ a\in\mathcal{A} \,;\, d|a\} \text{ and } \mathcal{A}_1 = \mathcal{A} .$$

From (1) it follows, for $0 \le k$, $1 \le n$ that

$$(2)\quad \sum_{\substack{d|P\\ \nu(d)\le 2l+1}} \mu(d)\,|\mathcal{A}_d| \le S \le \sum_{\substack{d|P\\ \nu(d)\le 2k}} \mu(d)\,|\mathcal{A}_d| \quad \Big(\nu(d) = \sum_{p|d} 1, \ \nu(1)=0 \Big).$$

When n is large and $|\mathcal{A}_d|$ can be computed only approximately, (2) may be better for estimating S then (1). (2) is the start of Brun's "pure"sieve. From it one can deduce an asymptotic formula for S when n is much smaller than $|\mathcal{A}|$, even when we know relatively little about $\mathcal{A}$.

Now let $p_1,\dots,p_n$ be all the primes of a sequence $\mathcal{P}$ of primes less than $z\,(z \geq 2)$, so that

$$P = P(z) = \prod_{p\in\mathcal{P},\,p\le z} p \text{ , and write } S = S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$$

$$= |\{a\in\mathcal{A} \,;\, (a,P(z)) = 1\}|, \text{ also } P(z,u) = P(z)/P(u) \text{ if}$$

$2 \le u < z$. Then

$$(1')\quad S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = \sum_{d|P(z,u)} \mu(d)\,S(\mathcal{A}_d,\mathcal{P},u) \text{ and}$$

$$(2')\quad \sum_{\substack{d|P(z,u)\\ \nu(d)\le 2l+1}} \mu(d)\,S(\mathcal{A}_d,\mathcal{P},u) \le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \le \sum_{\substack{d|P(z,u)\\ \nu(d)\le 2k}} \mu(d)\,S(\mathcal{A}_d,\mathcal{P},u).$$

These relations form a useful background for the combinatorial foundations of modern sieves. On the one hand, the sieve of

Jurkat-Richert rests on

$$(3)\quad S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = \sum_{\substack{d\mid P(z,u)\\ d\in\mathcal{D}_1,\nu(d)\le b}} \mu(d)S(\mathcal{A}_d,\mathcal{P},u_d) + \sum_{\substack{1<d\mid P(z,u)\\ d\in\mathcal{D}_2,\nu(d)\le b}} \mu(d)S(\mathcal{A}_d,\mathcal{P},q_d)$$

where q_d is the least prime factor of d, $u_d = u(\nu(d)<b), u_d = q_d(\nu(d)=b)$ and the "regions" $\mathcal{D}_i$ are defined as follows: If $d > 1$, let

$d = p_1 \ldots p_r (p_1 > \ldots > p_r)$, $r \le b$. Then $d\in\mathcal{D}_1$ iff $p_l^\beta\, p_{l-1}\ldots p_1 < y (l=1,\ldots,r)$ and $d\in\mathcal{D}_2$ if $p_l^\beta\, p_{l-1}\ldots p_1 < y (l=1,\ldots,r-1), y/p_r \le p_r^{\beta-1}\, p_{r-1}\ldots p_1 < y$. Here $\beta > 1$ and $y \ge 2$ are parameters.

On the other hand, the Rosser - Iwaniec sieve rests on two inequalities of which one is

$$(4)\quad S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \le \sum_{\substack{d\mid P(z,u)\\ d\in\mathcal{D}}} \mu(d)\, S(\mathcal{A}_d,\mathcal{P},u) \text{ with } \mathcal{D} \text{ given by:}$$

$d > 1$ and $d\in\mathcal{D}$ iff $p_{2l+1}^\beta\, p_{2l}\ldots p_1 < y (0 \le l \le \frac{r-1}{2})$; the other inequality is similar. (In both sieves think of u so small that asymptotic formulae are available for $S(\mathcal{A}_d,\mathcal{P},u)$ for most of the d's occuring). These combinatorial foundations require further study. Assume now $X \approx |\mathcal{A}|$ and that the numbers $R_d = |\mathcal{A}_d| - X\prod_{p|d}\frac{\omega(p)}{p}$, $(d|P(z))$,

are remainder terms, at least on average, for a suitable choice of positive numbers $\omega(p)(<p), p\in\mathcal{P}$. Roughly, $\omega(p)/p$ is the "probability" that $p(\in\mathcal{P})$ divides $a(\in\mathcal{A})$ and therefore we expect the order of $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ to be $XW(z) = X\prod_{p<z,p\in\mathcal{P}}(1-\frac{\omega(p)}{p})$. Now concentrate on the linear sieve ($\omega(p)=1$ on average) when $\beta = 3$ and both sieves lead to

$$(5)\quad (1+o(1))XW(z)\, f(\frac{\log y}{\log z}) - E \le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \le (1+o(1))XW(z)F(\frac{\log y}{\log z}) + E,$$

where, as $u\to\infty$, $F(u)\downarrow 1$, $f(u)\uparrow 1$, both exponentially, $f(u)>0$ if $u>2$, and F,f are solutions of linked differential-difference equations; also,

$$E = \sum_{d<y,\, d\mid P(z)} g_d\, R_d$$

where the coefficients g_d are essentially bounded (in either case). One requires $E = o(XW(z))$ and so one expects at best to choose $y = o(XW(z))$. However, as Hooley, Ramachandra and, most recently, Chen have shown, the properties of R_d may, in favourable cases, be exploited so as to take y larger; inspired by their work Iwaniec discovered in the last year (in the context of his own sieve), a bilinear form for E (of Vinogradov's method),

(6) $E_I = \sum_{\substack{m<M, n<N \\ m,n|P(z)}} a_m b_n R_{mn}$ $(MN=y)$, with $|a_m| \leq 1$, $|b_n| \leq 1$,

and the same is true (essentially) in the Jurkat-Richert sieve. With y larger, the values of F are nearer 1, and those of f further removed from 0. The concequences of this discovery are far-reaching. The structure of E_I makes it possible to estimate via trigonometric sums, via Perron integrals of Dirichlet polynomials or via mean square formulations (see Iwaniec's Lectures at the Mittag-Leffler Institute 1978).

Before stating some consequences, I have to say that in practice it is important to work with weighted shifting functions of type

(7) $\sum_{a \in \mathcal{A}, (a,P(z))=1} w(a)$, where the idea is to keep z small and

to construct w so that $w(a) \leq 1$ always and $w(a) > 0$ only when a has very few prime factors between z and some $z_1 > z$, and consequently few prime factors altogether. If we prove that the sum (7) is large and positive, this means that there are many such a's. There are highly effective ways of choosing weights, due mainly to Kuhn, Buchstab, Ankeny and Richert. For Iwaniec's recent proof that $n^2+1 = P_2$ for infinitely many n is a splendid example of the use of all modern sieve devices (see Mittag-Leffler Lectures). Details cannot be given here, but an account of one class of weights will be given when Richert, Heath-Brown and I publish our result that $\exists$ P_2's in the interval $(x-x^{\theta}, x)$ if $x \geq x_o$, with $\theta = 0.45479666$. In 1975 Chen had proved this result with $\theta = 1/2$. Maier in Ulm has proved such a result, but for P_3's and with $\theta < 1/3$. Proving the result for P_r's, in $(x-x^{1/r}, x)$ with $x \geq x(r)$ $(r > 3)$, is still beyond reach. Motohashi has proved recently that, for almost all x, $\exists$ P_2's in $(x-x^{\varepsilon},x)$. Conjugate to our result is Heath-Brown's proof that $P_2(k,h)$, the least $P_2 \equiv h \bmod k$, is $\leq k^{2-\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$. Motohashi has a corresponding "almost all" result here too.

Now for the greatest achievement of the modern sieve: Iwaniec, with Jutila and with Heath-Brown have proved that $\exists$ primes in $(x-x^{\theta},x)$ if $x \geq x_0$ and $\theta > \frac{11}{20}$. The $\frac{11}{20}$ still needs confirmation, but $\frac{5}{9}$ is certainly true. The proof is in two parts: First, the lower bound sieve is used to show that there are many P_2's in the interval, and then one uses density estimates from analytic number theory to show that only some of these are 'genuine' P_2's, of type $p\,p'$. To me this seems the right model for the successful application of sieves. Selberg's elementary proof of the Prime Number Theorem is the prototype and I end with two other instances: Huxley and Iwaniec (Mathematika 1975) have proved that

$$|\{p;\ x-x^{\theta}<p\leq x\ ,p = 1+k^2+l^2, (l,k)=1\}| \asymp \frac{x^{\theta}}{(\log x)^{3/2}} \quad \text{with } \theta = \frac{99}{100}\ ;$$

and a refinement by P. Kelley of a result of Hooley (1974) and Indlekofer (1974) that $|\{n;\ x-x^{\theta}<n\leq x,\ n = k_1^2+l_1^2,\ n+1 = k_2^2+l_2^2\}| \asymp x^{\theta}(\log x)^{-1}$ with $\theta = 0.9972$ (via Indlekofer's procedure) and $\theta = 5/6 +\varepsilon$(via Hooley's).

H. Harborth: Teilbarkeitsprobleme im Pascal'schen Dreieck.

(1) Fast alle Binomialkoeffizienten sind durch einen festen Teiler t teilbar.

(2) F(n) sei die Anzahl der ungeraden Zahlen in den ersten n Zeilen des Pascaldreiecks. Dann gelten

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, F(n)/n^{\theta} = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, F(n)/n^{\theta} = 0{,}812556\ldots \qquad (\theta=\log 3/\log 2).$$

(3) In den Zeilen des modulo t reduzierten Pascaldreiecks kommen fast alle Restfolgen nebeneinander nicht vor. Als lexikographisch kleinste kommen 111 für $t > 2$ und 1011 für $t = 2$ nicht vor.

(4) Für festes h sind fast alle $\binom{n}{k}$ durch $\binom{n}{h}$ teilbar.

(5) Für $c \in \mathbb{N}$ sei $K_c := \{k \in \mathbb{N};\ n \mid \binom{n}{k-cn}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{k}{c+1} \leq n \leq \frac{k}{c}.\}$

Dann gilt:

$K_2 = \{1\} \cup \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ Menge der Primzahlen)

$K_3 = \{1,4,25\} \cup \mathbb{P} \cup \{2p;\ p \in \mathbb{P},\ p = 2^{2^i}+1\}$

$K_4 = \{1,4,9,21,33,49,54,77,121,141\} \cup \mathbb{P} \cup \{2p;\ p \in \mathbb{P},\ p = \frac{1}{3}(2^{2i+2}+2^{2j+2}+1)\}$

Weiter werden K_5 und K_6 explizit angegeben.

R. Heath-Brown: Kummer's Conjecture for Cubic Gauss Sums.

Define $g(1,\pi) := \sum_{\alpha (\mathrm{mod}\, \pi)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)_3 \exp(2\pi_0 i \operatorname{Trace}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q}}(\frac{\alpha}{\pi}))$, where $\pi_0 = 3,14159..$ and $\pi \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ is a prime of $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]$. Then let $\tilde{g}(\pi) = g(1,\pi)/(N\pi)^{1/2}$. Kummer (1846) gave a conjecture that implies non-uniform distribution of $\tilde{g}(\pi)$ around the unit circle (it is well known that $|\tilde{g}(\pi)|=1$). Numerical evidence of Lehmer (1956) suggest rather that the $\tilde{g}(\pi)$ are uniformly distributed, and in 1967 A.I. Vinogradov gave a proof of this - which contained an irretrievable error. Joint work of myself and Patterson gives (what we hope is correct!) the following statement of the uniform distribution:

Theorem: There exists an absolute constant A such that

$$\sum_{\substack{N\pi \le x \\ \vartheta_1 < \arg \tilde{g}(\pi) \le \vartheta_2}} 1 = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2\pi_0} \operatorname{Li}(x) + O(x \exp(-A(\log x)^{1/2}))$$

uniformly for $0 \le \vartheta_1 \le \vartheta_2 \le 2\pi_0$.

The proof depends on Vaughan's method for handling sums over primes, and on the following result of Patterson:

Lemma: Let $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]$, $N\alpha \le x^{2/3}$, $l \in \mathbb{Z}$ and $\varepsilon > 0$. Then

$$\sum_{\substack{N\beta \le x \\ \beta \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \\ \beta \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \alpha)}} \tilde{g}(\beta) \left(\frac{\beta}{|\beta|}\right)^l \ll x^{5/6}(N\alpha)^{-1} + x^{3/4+\varepsilon}(N\alpha)^{-5/8} + |l|\, x^{1/2+\varepsilon}(N\alpha)^{-1/4}$$

Here $\tilde{g}(\beta)$ is the cubic Gauss sum generalized to composite β. (to appear in J. rein. u. angew. Math.)

E. Heppner: Eine Bemerkung zum Hasse-Syracuse-Algorithmus.

Für $m,d \in \mathbb{N}$, $(m,d)=1$, $d \geq 2$, R festes vollständiges Restsystem mod d sei

$$T(n) := \begin{cases} \frac{n}{d}, & n \equiv 0 \pmod{d} \\ \frac{mn+r}{d}, & n \not\equiv 0 \pmod{d},\ r \in R,\ mn+r \equiv 0 \pmod{d}. \end{cases}$$

Ferner sei $T^0(n) := n$, $T^{i+1}(n) := T(T^i(n))$, $i \geq 0$. Es wird vermutet, daß für $m < m_0(d)$ die Folge $(T^i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ stets periodisch wird.

Ein Ergebnis, über das H. Möller (Acta Arithm. 34(1978), 219-226) auf der letzten Oberwolfacher Zahlentheorietagung vortrug, wird verschärft zu

Satz 1: Für $m < d^{\frac{d}{d-1}}$ existieren $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit

$$|\{n \leq x;\ T^N(n) \geq nx^{-\delta_1}\}| = O(x^{1-\delta_2}),\quad N = \left[\frac{\log x}{\log d}\right].$$

Außerdem wird gezeigt

Satz 2: Für $m > d^{\frac{d}{d-1}}$ existieren $\delta_3, \delta_4 > 0$ mit

$$|\{n \leq x;\ T^N(n) \leq nx^{\delta_3}\}| = O(x^{1-\delta_4}),\quad N = \left[\frac{\log x}{\log d}\right].$$

Die Beweise beruhen auf Bernstein's Verschärfung der Tschebyscheff'schen Ungleichung.

J. Hinz: Der Satz von Barban und Davenport-Halberstam in algebraischen Zahlkörpern.

Sei K ein algebraischer Zahlkörper, $[K:\mathbb{Q}] = n = r+2s$. Für $\omega \in K$ seien $\omega^{(i)}$ $(i=1,\dots,n)$ die Konjugierten. Seien $P_i \in \mathbb{R}, P_i \geq 2$ mit $P_i = P_{i+s}$ $(i=r+1,\dots,r+s)$ und $P_i \leq P_j^c$ $(i,j=1,\dots,n)$ für ein festes $c \geq 1$.

$$\mathfrak{R}_b := \{\omega \in K;\ (\omega) \text{ ganzes Primideal},\ 0 < \omega^{(i)} \leq P_i^b\ (i=1,\dots,r),\ |\omega^{(i)}| \leq P_i^b\ (i=r+1,\dots,n)\}$$

$$\pi_1(P;\beta,\mathfrak{q}) := \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R}_1 \\ \omega \equiv \beta \bmod \mathfrak{q}}} 1 \qquad (P = P_1 \dots P_n,\ \mathfrak{q} \text{ ganzes Ideal})$$

<u>Satz 1:</u> Es sei $P(\log P)^{-A} \leq Q \leq P$, $A > 0$ dann gilt:

$$\sum_{N\eta \leq Q} \sum_{\substack{\beta \bmod \eta \\ (\beta,\eta)=1}} \{\pi_1(P;\beta,\eta) - \frac{1}{\phi(q)} \frac{w}{2^r hR} \int_2^P \int_2^{1} dx_1 \cdots \int_2^{P} \int^{r} dx_r \int_2^{P^2} \int^{r+1} dx_{r+1} \cdots \int_2^{P^2} \int^{r+s} \frac{dx_{r+s}}{\log(x_1 \cdots x_{r+s})}\}^2$$

$$<< \quad PQ(\log P)^{-1}.$$

Aus Satz 1 ergibt sich unmittelbar ein Satz vom Typ des Bombierischen Primzahlsatzes:

<u>Satz 2:</u> Sei $d(\alpha) = \sum_{\eta | \alpha} 1$. Dann gilt

$$\frac{P}{\log P} <<_a \sum_{\omega \in \mathcal{R}_a} \sum_{\eta \in \mathcal{R}_{1-a}} d(\omega\eta - 1) <<_a \begin{cases} \frac{P}{\log P}, & 0<a<\frac{1}{2} \\ \frac{P}{\log P} \log\log P, & a = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

P. Houtermans: <u>Über mittlere Kettenbruchlängen rationaler Zahlen.</u>

Es bezeichne $G(a,b)$ bzw. $N(a,b)$ die Länge des Kettenbruchs nach größtem bzw. nächstem Ganzen von $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Zu gegebenen $b \in \mathbb{N}$ seien $c_{a1}, \ldots, c_{aG(a,b)}$ die Teilnenner des Kettenbruchs nach größtem Ganzen von $\frac{a}{b}$. Für

$$\sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a,b)=1}} \sum_{\substack{k=1 \\ c_{ak}=c}}^{G(a,b)} 1 \quad (c \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a,b)=1}} N(a,b)$$

können asymptotische Formeln der Gestalt $\frac{12}{\pi^2} A_c \phi(b) \log b + B_c \phi(b) + O_{\varepsilon,c}(b^{5/6+\varepsilon})$ mit explizit angebbaren Konstanten A_c, B_c bewiesen werden. Resultate von H. Heilbronn und G.J. Rieger werden damit verbessert. Für $\sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a,b)=1}} G(a,b)$ konnte J. W. Porter eine ähnliche Asymptotik zeigen.

Für die Beweise werden gute obere Abschätzungen Kloostermann'scher Summen entscheidend benützt.

Für einen Überblick siehe: G. J. Rieger: Die metrische Theorie der Kettenbrüche seit Gauss, Abh. Braunschw. Wiss. Ges., Bd. 27(1977).

H.-J. Kanold: Über einige Abschätzungen bei Binomialkoeffizienten

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ werden mit $f(n,k) = \frac{2^n}{\sqrt{n}} \exp(- \frac{2}{n}(\frac{n}{2} - k)^2)$ verglichen. Unter anderem werden folgende Abschätzungen gezeigt:

$$f(n,k) > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \binom{n}{k}, \quad \text{für } 3 \leq k \leq \frac{n}{9};$$

$$f(n,k) < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \binom{n}{k}, \quad \text{für } |\frac{n}{k} - k| \leq \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n}{2}};$$

$$f(n,k) > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \binom{n}{k} \exp(- \frac{2}{n^2} (\frac{n}{2} - k)^2), \qquad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

Außerdem werden mittels dieser Abschätzungen einige Folgerungen z. B. über die Anzahl der verschiedenen Primteiler von $\binom{n}{k}$ gezogen.

D.Klusch: Ramanujan-Identitäten

H. Hamburger (1922) bewies - unter geeigneten Voraussetzungen - u.a. die Äquivalenz zwischen dem Bestehen einer Funktionalgleichung vom Riemann'schen Typ und gewissen Thetarelationen. Hier wird für in $\mathbb{C}$ meromorphe $\omega(s),\eta(s)$ - mit geeigneten asymptotischen Bedingungen an $\omega(s)\tau^{-s}$, die den Voraussetzungen des Phragmén-Lindelöf'schen Prinzips entsprechen und deren Pole in einem festen zur reellen Achse symmetrischen Streifen liegen - gezeigt:

$$\omega(s) = \gamma\eta(a-s) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \omega(s)\tau^{-s}ds = \gamma\tau^{-a}\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \eta(s)\tau^{s}ds + R(\tau) \; (\mathrm{Re}\,\tau>0),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$, $R(\tau)$ Summe der Residuen von $\omega(s)\tau^{-s}$ in geeigneten Rechtecken.

Als Anwendung lassen sich u. a. einige Ramanujan-Identitäten charakterisieren, z. B. daß die Ramanujan'schen "Grenzformeln"

$$\Omega(\tau)+\Omega(\tau^{-1}) = \frac{1}{24}\{\tau+\tau^{-1}\} - \frac{1}{4\pi} \text{ mit } \Omega(\tau) = \tau\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi n\tau}(e^{2\pi n\tau}-1)^{-2} \; (\tau>0)$$

bzw.

$$\Omega(\tau)-\Omega(\tau^{-1}) = \frac{1}{2}\log\tau - \frac{\pi}{12}\{\tau-\tau^{-1}\} \text{ mit } \Omega(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(e^{2\pi n\tau}-1)^{-1} \; (\tau>0)$$

äquivalent sind zu den Funktionalgleichungen vom Riemann'schen Typ

$\omega(s) = -\omega(-s), \omega(s) = s\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+1)(2\pi)^{-s}$ bzw. $\omega(s) = \omega(-s)$ mit

$\omega(s) = \Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+1)(2\pi)^{-s}$.

H. v. Lienen: Einige Fälle der diophantischen Gleichung $x^2 + bx + c = dy^2$

Definiert man $a^2 + ab + b^2 =: \langle a,b\rangle$ so gilt:

$d \mid \langle a,b\rangle,\ a,b \in \mathbb{Z},\ (a,b) = 1 \Rightarrow d = \langle u,v\rangle,\ u,v \in \mathbb{Z},\ (u,v) = 1$. Angewandt auf die quadratische Form $x^2 + bx + b^2$ ergibt dies $\langle x_i,b\rangle = \langle u,v\rangle\langle u_i,v_i\rangle$, mit angebbaren u_i, v_i, x_i $(i=1,2)$. Daraus folgt: $\langle x,b\rangle = y^2$ ist lösbar nur dann, wenn b ungerade oder durch 8 teilbar ist, und es gibt nur endlich viele Lösungen.

Unter geeigneten Bedingungen ergeben sich die unendlich vielen Lösungen von $\langle x,b\rangle = dy^2$ (d kein Quadrat) als Näherungsbrüche eines Kettenbruches.

L. Lucht: Mittelwerte zahlentheoretischer Funktionen und lineare Kongruenzsysteme.

Es sei f eine multiplikative Funktion, $L(n) = \frac{an+b}{c}$ eine Linearform mit $a,c \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ und $F: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(*) \quad F(n) = \begin{cases} f(L(n)), & \text{für } L(n) \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Existenz des Mittelwertes $M(F)$ von F ist für beliebige Linearformen $L(n)$ und multiplikative f aus einer von Elliott 1975 charakterisierten Funktionenklasse geklärt.

Ist $F_1 \dots F_k$ punktweises Produkt solcher Funktionen, so existiert der Mittelwert $M(F_1 \dots F_k)$, falls die f_κ vom Betrage ≤ 1 sind und $\sum_p \frac{1}{p} |f_\kappa(p) - 1|$ konvergiert. Von trivialen Fällen abgesehen, besitzt dann $M(F_1 \dots F_k)$ eine Darstellung als ein Eulerprodukt.

Beim elementaren Beweis spielen Eigenschaften linearer Kongruenzsysteme eine Rolle. Die Produktdarstellung erweist sich als entscheidend für eine Anwendung auf multiplikative Zahlenmengen.

F. Roesler: Über die Differenzen aufeinanderfolgender Primzahlen

Bewiesen wird ein Satz, der - grob gesprochen - besagt:
Sind die Differenzen $p' - p$ aufeinanderfolgender Primzahlen sehr gleichmäßig verteilt in arithmetischen Folgen modulo hinreichend vieler kleiner Primzahlen q, dann gibt es viele Primzahlen p mit verhältnismäßig großer Differenz $p' - p$. Genauer gilt

Satz: Für alle positiven λ, C_1, C_2, C_3 mit $C_1^2 > 4C_2^2 > 8\lambda C_3$ ist mindestens eine der beiden folgenden Aussagen falsch

(I) $$\sum_{p\leq N,\, p'-p\equiv a(q)} 1 - \sum_{p\leq N,\, p'-p\equiv b(q)} 1 = O(N\exp(-C_1\log^\lambda N))$$

für alle Primzahlen $3 \leq q \leq C_2 \log^\lambda N$ und alle zu q teilerfremden a,b.

(II) $$\sum_{p\leq N,\, p'-p\geq C_3\log^{2\lambda} N/\log\log N} 1 = O(N\exp(-C_1\log^\lambda N)).$$

Der Beweis benutzt Exponentialsummen und eine Abschätzung für die Koeffizienten der Inversen einer Vandermonde'schen Matrix. (Arch. Math. 30(5), 493-497(1978)).

H.P. Schlickewei: Kleine gebrochene Anteile quadratischer Formen

1948 bewies H. Heilbronn die folgende (nichtlineare) Verallgemeinerung des Dirichlet'schen Approximationssatzes:

Sei $\varepsilon > 0$, $N>C_1(\varepsilon)$, dann gibt es zu jedem $\alpha\in\mathbb{R}$ ein $n\in\mathbb{N}$, $n\leq N$ mit $\|\alpha n^2\| < N^{-1/2+\varepsilon}$, wobei $\|\ldots\|$ den Abstand zur nächsten ganzen Zahl bedeutet. Dieses Ergebnis wurde 1958 von Danicic auf quadratische Formen verallgemeinert: Für $\varepsilon > 0$, $N > C_2(s,\varepsilon)$ und eine quadratische Form $Q(x_1,\ldots,x_s)$ gibt es ganze Zahlen $n_1,\ldots,n_s$ mit $0 < \max|n_i| \leq N$ und $\|Q(n_1,\ldots,n_s)\| < N^{-s/(s+1)+\varepsilon}$.
Hier wird über ein mit A. Schinzel und W.M.Schmidt gemeinsam bewiesenes Resultat berichtet:

Der Exponent $\frac{s}{s+1}$ im Satz von Danicic kann durch

$$\max_{\substack{1\leq h\leq (s+5)/3 \\ h\equiv 1(2)}} 2\left(1+\frac{1}{h}+\frac{4}{s-h+1}\right)^{-1}$$ ersetzt werden.

Dieser Exponent ist asymptotisch $2 - \frac{18}{s} + O(\frac{1}{s^2})$, so daß also der bestmögliche Exponent 2 beinahe erreicht wird.

B. Schoeneberg: <u>Zusammenhang von $\wp$-Teilwerten, Dirichlet'schen Reihen mit Funktionalgleichung, allgemeinen Dedekind'schen Funktionen und Thetareihen</u>

Aus der bekannten Funktionalgleichung der Dedekind'schen Zetafunktion

$\zeta(s,g) = \sum\limits_{0<m\equiv g(N)} m^{-s}$, $g \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$, folgt für die Funktion

$$Z_{g_1,g_2}(s) = \sum_{\kappa \bmod N} \{e^{\frac{2\pi i}{N}g_2\kappa}\zeta(s,g_1)+e^{-\frac{2\pi i}{N}g_2\kappa}\zeta(s,-g_1)\}\ \zeta(s+1,\kappa)$$

die Funktionalgleichung

$R_{g_1,g_2}(s) = R_{g_2,-g_1}(-s)$ mit $R_{g_1,g_2}(s) = (\frac{2\pi}{N})^{-s}\Gamma(s)Z_{g_1,g_2}(s)$.

Der Übergang von Z_{g_1,g_2}, $(g_1,g_2) \not\equiv (0,0)(N)$ zu Fourierschen Reihen über das Mellinsche Integral ergibt wegen der Funktionalgleichung von Z_{g_1,g_2} Integranden 3. Gattung der Stufe N. Die unter beliebigen S aus der Modulgruppe Γ auftretenden Konstanten sind i.W. allgemeine Dedekind'sche Summen. Diese Fourier'schen Reihen erkennt man leicht als Logarithmen allgemeiner Dedekind'scher Funktionen. Deren Produkte mit der Dedekind'schen η Funktion ergeben mit Jacobi's Formel für ein dreifaches Produkt Thetareihen. Das Verhalten aller dieser Klassen von Funktionen unter Γ folgt aus dem entsprechenden Verhalten der Integrale der $\wp$-Teilwerte.

W. Schwarz: <u>Bemerkungen zu Elliott's Mittelwertsatz über multiplikative Funktionen</u>

Eine zahlentheoretische Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt Elliott'sch ($f \in \mathcal{E}$), wenn

(1) $\sum\limits_p \frac{1}{p}(f(p)-1)$ konvergiert, (2) $\sum\limits_p \frac{1}{p}|f(p)-1|^2 < \infty$

(3) $\sum\limits_p \sum\limits_{k\geq 2} p^{-k}\ |f(p^k)|^2 < \infty$.

Die Implikation: (f multiplikativ, $f \in \mathcal{L}$, $\|f\|_2 := (\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(n)|^2)^{1/2} < \infty) \rightarrow$ (Der Mittelwert M(f) existiert) des Elliott'schen Satzes (1975) läßt sich mit Hilfe der approximationstheoretischen Methode, die A. Rényi 1965 zum Beweis des Satzes von Delange benützte, verhältnismäßig einfach beweisen und geringfügig zu einer Aussage über Fastperiodizität von f verschärfen.

Einige Anwendungen werden skizziert, z.B. existiert für beschränkte, multiplikative Funktionen $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{L}$ und $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{Z}$ der Mittelwert $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} f_1(n+a_1)\dots f_k(n+a_k)$.

H. Siebert: Ein Problem von J. L. Nicolas und ein Problem von C. Pomerance

1. Seien die Polynome $P_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$ erklärt durch $P_k(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k$, $n \in \mathbb{N}$.

   Auf der Zahlentheorie-Tagung Oberwolfach 1975 stellte J.L.Nicolas die Frage, ob sämtliche Nullstellen von $P_k(z)$ rational sind. Wie $P_4(z) = \frac{1}{5}z(z+1)(z+1/2)(z^2+z-1/3)$ zeigt, ist das nicht der Fall.

   Es gilt der

   <u>Satz:</u> Für $k\geq 1$ ist $P_k(0)=P_k(-1)=0$ und für $2|k$ ist $P_k(-\frac{1}{2})=0$. Alle weiteren Nullstellen sind irrational.

   Als Hilfsmittel dienen naheliegende Funktionalgleichungen für $P_k(z)$ und die Darstellung von P_k durch Bernoulli'sche Polynome. (Gemeinsame Arbeit mit N. Kimura).

2. Die Zahl n = 210 hat die Eigenschaft, daß n-p eine Primzahl ist für alle Primzahlen p, $\frac{n}{2} < p < n$. Auf der West Coast Number Theory Conference, San Diego 1976, stellte C. Pomerance die Frage, ob es weitere n mit dieser Eigenschaft gibt. Mit Hilfe meines Ergebnisses über zweidimensionale Siebprobleme wird eine obere Schranke für solche Zahlen angegeben, die eine Computerberechnung aller dieser Zahlen gestattet.

B. Volkmann: Eindeutigkeitsmengen für vollständig additive oder multiplikative zahlentheoretische Funktionen.

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{N}$ heißt Eindeutigkeitsmenge für eine vollständig additive Funktion f, falls für diese f durch $f(u)$, $u \in U$ eindeutig bestimmt ist. Hinreichende Bedingungen für Eindeutigkeitsmengen wurden von Elliott, Kátai, Freud und Indlekofer gegeben; eine notwendige und hinreichende Bedingung wurde kürzlich von Wolke veröffentlicht.

In einer gemeinsamen Arbeit mit F. Dress(C.R.Acad. Sc.Paris 287, 10.7.78) wurde folgendes bewiesen:

Satz: $U \subseteq \mathbb{N}$ ist Eindeutigkeitsmenge für vollständig additive Funktionen genau dann, wenn es zu jedem $p \in \mathbb{P}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $p^n \in \bar{U}$. Dabei ist $\bar{U}$ der Durchschnitt der von U erzeugten Untergruppe der multiplikativen Gruppe $\mathbb{Q}^*$ mit $\mathbb{N}$.

Eindeutigkeitsmengenfür vollständig multiplikative Funktionen können durch modifizierte Bedingungen charakterisiert werden.

G. Wagner: Über die Anzahl der Gitterwürfel, die den Rand einer konvexen Menge schneiden.

Ein Gitterwürfel $W \subset \mathbb{R}^n$ "schneide" eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, falls $M \cap \operatorname{int} W \neq \emptyset$. $N_n(M)$ sei die Anzahl der M schneidenden Würfel. Für den Rand ∂K einer beschränkten konvexen Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ wird gezeigt:

Satz 1: $N_n(\partial K) \leq 2 \sum_{i=1}^{n} N_{n-1}(\pi_i(K))$, wobei π_i die Orthogonalprojektionen auf die Hyperebenen sind.

$N_{n-1}(\pi_i(K))$ kann weiter durch das n-1 dim. Volumen von $\pi_i(K)$ plus $N_{n-1}(\partial \pi_i K)$ abgeschätzt werden. Durch Iteration einer schärferen Aussage, die zum Beweis von Satz 1 führt, erhält man:

Satz 2: $$N_n(\partial K) \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} 2^k \, |\pi_{i_1} \circ \ldots \circ \pi_{i_k}(K)|_{(n-k)},$$

wobei $| \ |_{(n-k)}$ das n-k dim. Lebesque'sche Maß bezeichne.

Der Beweis zu beiden Sätzen ist kurz und elementar.

M. Waldschmidt: Survey on Transcendency

The aim of this lecture is to give a survey on some of the recent works connected with transcendental number theory. We begin with a result of Dobrowolski on a problem of D. H. Lehmer. Then we describe the work of Masser and Anderson on linear forms in elliptic or abelian logarithms of algebraic numbers. The next topic deals with Chudnovsky's work on algebraic independence of numbers connected with exponential, elliptic and abelian functions, with application to the Γ-function. Next we mention some recent works of Bundschuh, Brownawell and Masser on the zeros of entire functions. As a consequence an effective version of the so called Schneider-Lang criterion can be proved; for special cases (elliptic and related functions), better transcendence measures have been obtained by E. Reyssat. In higher dimensions, M. Laurent gave a transcendence measure for $B(a,b)$. Finally, we give a statement connected with Schneider's third problem on elliptic integrals of the third kind.

R. Wallisser: Diophantische Approximation spezieller Reihen

Ein Ergebnis von Herrn Baier (im Anschluß an Arbeiten von Väänänen) wird vorgestellt und besprochen.

Für $\lambda \in \mathbb{Q} - \{-1,-2,\dots\}$ sei $\phi_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\dots(\lambda+n)}$ die hypergeometrische Reihe. K sei algebraischer Zahlkörper vom Grad d, $\sigma_1,\dots,\sigma_d$ seien die verschiedenen $\mathbb{Q}$-Isomorphismen von K in $\mathbb{C}$. $\|\quad\|$ sei der Abstand zur nächsten ganzrationalen Zahl. Dann gilt:

Satz: Sind $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\ \gamma_1,\dots,\gamma_n \in K-\{0\}$ mit $\sigma_k(\alpha_i) \neq \sigma_l(\alpha_j)$ für $(k,i) \neq (l,j)$, so existieren positive C_0, C_1 (nur von $n, \lambda, \alpha_i, \gamma_i$ abhängig) so, daß

$$\prod_{i=1}^{n} \left\| q \sum_{k=1}^{d} \sigma_k(\gamma_i)\phi_\lambda(\sigma_k(\alpha_i)) \right\| > q^{-1-(d-1)n-C_0(\log\log q)^{-1/2}}$$

für alle $q \in \mathbb{N}$, $q > C_1$.

Der Satz erweitert Resultate von Baker (Canad. J. Math. 17(1965)) und Väänänen(Bull. Austral. Math. Soc. 14(1976)).

R. Warlimont: Quadratfreie Zahlen in arithmetischen Progressionen.

Für $1 \le l \le k, (l,k) = 1$ sei $f(k,l) := \min m$ ($m \in \mathbb{N}_0$, $l + mk$ quadratfrei) und $f(k) := \max f(k,l)$.

Nach Erdös (1960) gilt

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \prod_{p \nmid k} (1-p^{-2})^{-1} \frac{\log k}{\log\log k} \le f(k) \ll \frac{\sqrt{k}}{\log k} \quad (k \ge k_0(\varepsilon)).$$

Setzt man $S(x,y) := \sum_{k \le y} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,k)=1}}^{k} \Big| \sum_{\substack{n \le x, n \equiv l (k) \\ n \text{ quadratfrei}}} 1 - \frac{x}{k} \prod_{p \nmid k} (1-p^{-2}) \Big|^2,$

so gilt

$$(*) \qquad S(x,y) \ll x^{1-\lambda} y^{1+\lambda} + x^{\mu+\varepsilon} \quad , \quad \text{für}$$

$\lambda = 0$, $\mu = 8/5$ (Orr 1968); $\lambda = 1/3$, $\mu = 4/3$ (Warlimont 1969);

$\lambda = 1/2$, $\mu = 3/2$ (Croft 1975). Dies impliziert eine Asymptotik

$$\sum_{k \le y} \sum_{l=1}^{k} (f(k,l))^{\alpha} \sim c(\alpha) y^2 \quad \text{für } 0 \le \alpha < \min(1+\lambda, 3(2-\mu)).$$

Überdies gilt $S(x,x) \sim c\, x^2$ (Warlimont 1970), und es läßt sich ferner zeigen: $\sum_{l=1}^{k} f(k,l) \ll \phi(k)$ und $\underline{\lim} \frac{1}{\phi(k)} \sum_{l=1}^{k} f(k,l) = 0$.

J. Wolfart: Dreiecksfunktionen und transzendente Zahlen

Sei $j: \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ mit $j(-\frac{1}{z}) = j(z)$, $j(z+\lambda) = j(z)$ $\lambda := 2 \cos \frac{\pi}{q}$ ($q \in \mathbb{N}$, ≥ 3 fest) (d.h. eine automorphe Funktion zur sog. "Hecke-Gruppe" $G(q)$) mit $j(\infty) = \infty$, $j(i) = 1$, $j(-e^{-\pi i/q}) = 0$. Dann besitzt j eine Fourierentwicklung

$$j(z) = \sum_{n\geq 1} r_n\, a^n\, e\left(\frac{n\,z}{\lambda}\right) \text{ mit } r_n \in \mathbb{Q}\,(\text{Raleigh 1962}) \text{ und}$$

$$a = a(q) \begin{cases} \in \mathbb{Q} \text{ für } q = 3,4,6 \\ \text{transzendent für alle anderen } q > 4. \end{cases}$$

Der Beweis beruht 1. auf der Schwarz'schen Dgl. für die Umkehrfunktion j^{-1}, 2. auf einer Berechnung von $a(q)$ in der Form

$$(*) \qquad a(q) = r \prod_{\nu=1}^{q-1} \left(2-2\cos\frac{\pi\nu}{q}\right)^{2(-1)^{\nu}\cos\frac{2\pi\nu}{q}} \text{ mit } r \in \mathbb{Q}\,(\text{Raleigh 1962})$$

und 3. auf einer genauen Analyse der $\mathbb{Q}$-linearen Relationen der Exponenten in (*), um schließlich den Baker'schen Satz anwenden zu können.

Der Satz hat Konsequenzen für die Modulformen zu den Hecke-Gruppen $G(q)$ und den ihnen entsprechenden Dirichletreihen. (Erscheint in Acta Arith. 1979).

D. Wolke: Dichtesätze.

Sei χ ein Charakter mod q, $\rho = \beta + i\gamma$ bezeichne eine Nullstelle von $L(s,\chi)$ mit $0 < \beta < 1$.

Man interessiert sich für folgende Summen:

$$(*) \quad N(\alpha,T), \quad (**) \sum_{\chi \bmod q} N(\alpha,T,\chi), \quad (***) \sum_{q\leq Q}\ \sum_{\chi \bmod q} N(\alpha,T,\chi)$$

$$\left(N(\alpha,T,\chi) := \sum_{\rho(\chi),\,\beta\geq\alpha,\,|\gamma|\leq T} 1 \ , \quad N(\alpha,T) := N(\alpha,T,\chi_0),\ 1/2 \leq \alpha < 1 \right).$$

In dem Übersichtsvortrag wird versucht, einen Einblick in 1. die zur Herleitung von oberen Abschätzungen für (*)-(***) erforderlichen Hilfsmittel, 2. die wichtigsten Resultate (Bombieri, Gallagher, Montgomery, Huxley, Jutila, Heath-Brown), 3. einige zahlentheoretische Anwendungen zu geben. Unter 3. werden insbesondere neuere Ergebnisse zu den Fragen

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

3.1. Primzahlen in kurzen Intervallen (Huxley, Iwaniec-Jutila),

3.2. große Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen (Wolke, Heath-Brown),

3.3. Primzahlen und Fast-Primzahlen in fast allen kurzen Intervallen (Selberg, Montgomery, Motohashi, Wolke)

vorgestellt.

G. Wüstholz: Algebraische Unabhängigkeit von Werten von Funktionen, welche gewissen Differentialgleichungen genügen.

Ein bekanntes Ergebnis von Th. Schneider besagt, daß die Anzahl der simultanen algebraischen Punkte meromorpher Funktionen, welche endliches Wachstum besitzen und algebraischen Differentialgleichungen genügen, endlich ist.

Dieses Ergebnis wird in einer speziellen Situation verallgemeinert. Sind f_1, f_2, f_3 algebraisch unabhängige meromorphe Funktionen einer Wachstumsordnung $\leq \rho$, $\rho \geq 1$, welche bestimmten algebraischen Differentialgleichungen genügen, so ist die Anzahl der algebraischen Punkte über einem Körper K mit $[K : \mathbb{Q}]_{tr} = 1$ innerhalb eines Kreises vom Radius R höchstens $R^{8\rho}$, falls $R \geq R_0$ ist.

J. H. Goguel, Ulm