

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSGESELLSCHAFT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 51 | 1978

(letzter Bericht 1978)

HALBGRUPPEN

16.12. bis 21.12.1978

Die diesjährige Tagung war die erste Tagung über Halbgruppen in Oberwolfach. Sie stand unter der Leitung von H. Jürgensen (Darmstadt), M. Petrich (Beograd) und H.J. Weinert (Clausthal-Zellerfeld).

Von den 43 Teilnehmern kamen 11 aus Deutschland, 24 aus anderen europäischen Ländern (einschließlich der Sowjetunion) und 8 aus Nordamerika.

In 38 Vorträgen wurde eine umfassende Übersicht über die neuere Entwicklung auf den meisten Zweigen der Halbgruppentheorie gegeben, wobei auch zusätzliche Strukturen wie Topologie und Anordnung angesprochen wurden. Ebenso fanden Anwendungen der Halbgruppentheorie Interesse, insbesondere solche auf andere Gebiete der Mathematik. Wegen ihrer großen Anzahl waren die Vorträge häufig leider etwas kurz, wurden jedoch durch weiterführende Diskussionen im kleineren Kreise vertieft.

Das begleitende Sonderprogramm umfaßte einen weihnachtlichen Nachmittag, eine Wanderung nach Schapbach, eine Diavorführung über Trekking in Alaska 1978 und eine Diskussion "On the Development of Semigroup Theory".



Teilnehmer

Bandelt, Hans-J.	Fachbereich IV Universität Oldenburg	D-2900 Oldenburg
Batbedat, André	Institut de Mathématiques Place Eugène Battaillon	F-34060 Montpellier Cedex
Bosbach, Bruno	OE Nat.wiss. u. Math. Gesamthochschule Kassel Heinrich-Plett-Str. 40	D-3500 Kassel
Dubreil, Paul	Résidence Frémiet Domaine des Réaux	F-91840 Soisy-Sur-Ecole
Eichner, Lutz	Institut für Angewandte Mathematik Universität Freiburg Hermann-Herder-Str. 10	D-7800 Freiburg
Fountain, J.B.	Department of Mathematics University of York	GB- Heslington, York
Hamiti, Ejup	Tehnički Fakultet	YU-3800 Priština
Hedrlin, Zdenek	Mathematisches Institut Karls-Universität Sokolovská 83	CS-18600 Praha 8
Hofmann, Karl H.	Department of Mathematics Tulane University	New Orleans, La 70118 USA
Hotzel, Eckehart	Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung Schloß Birlinghoven Postfach 1240	D-5205 St. Augustin 1
Jacob, Gérard	121 Avenue du Maine	F-75014 Paris
Jürgensen, Helmut	Institut für Theoretische Informatik Technische Hochschule Darmstadt Magdalenenstr. 11	D-6100 Darmstadt
Keimel, Klaus	Fachbereich Mathematik Technische Hochschule Darmstadt	D-6100 Darmstadt
Kim, Ki Hang	Mathematics Research Group Alabama State University Box 69	Montgomery, Alabama 36101, USA
Knauer, Ulrich	Fachbereich Mathematik Universität Oldenburg Postfach 943	D-2900 Oldenburg



Kunze, Michael	Institut für Theoretische Informatik Technische Hochschule Darmstadt Magdalenenstr. 11	D-6100 Darmstadt
Lajos, Sándor	Marx Károly Közgazdaság tudományi Egyetem Matematikai Tanszék Dimitrov tér 8	H-1828 Budapest IX
van Leeuwen, L.C.H.	Rijksuniversiteit te Groningen Postbus 800	NL-9700 Groningen
Ljapin, Eugen S.	M-66 Moskovskij pr.d.208 kv. 16	SU-196066 Leningrad
Luedeman, John K.	Department of Mathematical Sciences Clemson University	Clemson, S.C. 29631 USA
Márki, László	Mathematisches Institut Ungarische Akademie der Wiss- enschaften Reáltanoda u. 13-15	H-1053 Budapest V
Megyesi, László	József Attila Tudományegyetem Bolyai intézet Aradi várta nuk tere 1	H-6720 Szeged
Merlier, Therese	Résidence Gascogne 105 Rue Boucicaut	F-92260 Fontenay aux Roses
MLitz, Rainer	III. Institut für Mathematik Technische Hochschule Wien Gusschausstr. 27-29	A-1090 Wien
Nico, William R.	Department of Mathematics Tulane University	New Orleans, La 70118 USA
O'Carrol, Liam	Department of Mathematics University of Edinburgh 20 Chambers Street	GB- Edinburgh EH1 1HZ
Perrin, D.	Institut de Programmation Université de Paris VI Tour 55-65 11, Quai Saint-Bernard	F-75005 Paris
Perrot, Jean-Francois	Institut de Programmation Université de Paris VI Tour 55-65 11, Quai Saint-Bernard	F-75005 Paris
Petrich, Mario	Department of Mathematics Pennsylvania State University	University Park, Pa 16802 USA



Pollák, György	József Attila Tudományegyetem Bolyai intézet Aradi vörteránuk tere 1	H-6720 Szeged
Rankin, Stuart A.	Department of Mathematics The University of Western Ontario	London, Canada N6A 5B9
Ruppert, Wolfgang	Institut für Mathematik der Universität für Bodenkultur Gregor-Mendel-Str. 33	A-1180 Wien
Sakarovitch, Jacques	Institut de Programmation Université de Paris VI-U.E.R.110 Tour 55-65 11, Quai Saint-Bernard	F-75005 Paris
Satyanarayana, M.	Department of Mathematics Bowling Green State University	Bowling Green, Ohio 43403 USA
Spehner, Jean-Claude	70, rue de la Forêt Traubach-le-bas	F-68210 Dannemarie
Szendrei, János	Kölcsey ut. 4	H-6720 Szeged
Szendrei, Mária	Kölcsey ut. 4	H-6720 Szeged
Szép, Jenő	Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematikai Tanszék Dimitrov tér 8	H-1828 Budapest IX
Thierrin, Gabriel	Department of Mathematics University of Western Ontario	London, Canada N6A 5B9
Tholen, Walter	Fernuniversität Hagen Postfach 940	D-5800 Hagen
Valkema, Erich	Institut für Informatik und Praktische Mathematik Universität Kiel Olshausenstr. 40-60	D-2300 Kiel 1
Weinert, Hanns J.	Institut für Mathematik Technische Universität Clausthal Erzstr. 1	D-3392 Clausthal- Zellerfeld
Wiegandt, Richard	Mathematisches Institut Ungarische Akademie der Wissen- schaften Reáltanoda u. 13-15	H-1053 Budapest



## Vortragsauszüge

### A. BATBEDAT: Demi-groupes inverses et $\gamma$ -demi-groupes

Nous rappelons les notions de demi-module et de produit demi-direct introduites dans:

Le produit demi-direct pour les demi-groupes inverses  
(à paraître, Semigroup Forum).

Nous présentons une nouvelle classe: les  $\gamma$ -demi-groupes. Ils généralisent les demi-groupes inverses; on leur applique des méthodes analogues.

### B. BOSBACH: Halbgruppen mit Komplementen

Sei  $\mathcal{G} = (G, +, -, 0, \vee, \wedge)$  eine abelsche Verbandsgruppe.

Sei  $C := \{X \mid X \geq 0\}$  ihr positiver Kegel. Wähle ein Element  $1$  in  $C$  und betrachte  $S := \{X \mid 0 \leq X \leq 1\}$  bezüglich:

$$a \circ b' := 1 \wedge (a+b)$$

$$a' := 1 - a$$

Dann gelten die Gleichungen

$$(C1) \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

$$(C2) \quad a \circ b = b \circ a$$

$$(C3) \quad a \circ a' = 1$$

$$(C4) \quad a \circ 1 = 1$$

$$(C5) \quad a \circ 1' = a$$

$$(C6) \quad a \circ (a \circ b')' = b \circ (b \circ a')'$$

und es ist  $(S, \circ, ', 1)$  eine Boolesche Algebra mit  $\circ$  in der Rolle von  $\vee$ , falls zusätzlich gilt:

$$(B) \quad a \circ a = a$$

Nenne  $\mathcal{S} := (S, \circ, ', 1)$  eine Halbgruppe mit Komplementen, falls die Axiome C1, ..., C6 erfüllt. Es folgt:

Satz: Es gibt keine anderen Halbgruppen mit Komplementen als die oben konstruierten.

Dieser Satz lässt sich modifizieren für den nicht kommutativen Fall.



R. DUBREIL: Einige Zusammenhänge zwischen Ring- und Halbgruppentheorie.

Un anneau  $R(\geq 1)$  est dit fragmenté s'il vérifie une des conditions équivalentes suivantes:

1. L'ensemble  $E$  des idempotents est fini et les idempotents commutent;
2.  $R = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$  où les idéaux bilatères  $I_\lambda = Ra_\lambda = a_\lambda R$  sont engendrés par les idempotents primitifs;
3.  $E$  est fini et les idempotents primitifs sont orthogonaux.

J'ai étudié le demi-groupe multiplicatif d'un tel anneau dans mon travail: "Fragmented Rings", Proc. R. Soc. Edinburgh, 78 A, 273-283, 1978. J'ai montré ensuite qu'un demi-groupe peut avoir les mêmes propriétés sans être le demi-groupe multiplicatif d'un anneau: "Semigroups and Rings", ibidem, 257-264.

J'ai résumé ici une théorie systématique de ces demi-groupes, dits fragmentés. Les décompositions d'un idéal d'anneau en somme directe sont remplacées par les décompositions en pseudosomme: un idéal à gauche  $L$  du demi-groupe  $S(\geq 0)$  admet la décomposition en pseudosomme  $L \approx \bigoplus_{i \in I} L_i$  s'il existe un ensemble  $L_i (i \in I, \text{ card } I \geq 2)$  d'idéaux à gauche  $L_i$  vérifiant  $(0) \subset L_i \subset L$  (strictement) et une bijection  $g: L \rightarrow \prod_{i \in I} L_i$  (produit cartésien) tels que (en désignant par  $x_i$  la composante de  $g(x)$  dans  $L_i$ ):

- A) si  $x \in L_i$ , on a:  $x_i = x$  et  $x_j = 0$  pour  $j \neq i$ ;
- B) pour tout  $c \in L$  et tout  $s \in S$ , on a:  $(sc)_i = s \cdot c_i$ .

Etude de la structure (booléenne) d'un tel demi-groupe.

L. EICHNER: Die Übergangshalbgruppen linear realisierbarer Automaten.

Sei  $p$  eine Primzahl. Ein endlicher Automat  $a = (S, X, \delta)$  ( $S$  und  $X$  endliche nichtleere Mengen,  $\delta: S \times X \rightarrow S$  Abb.) heißt  $p$ -linear realisierbar, wenn er isomorph zu einem Unterautomaten eines  $K$ -linearen Automaten  $l = (S_1, X_1, \delta_1)$  ( $S_1$  u.  $X_1$   $K$ -lineare Räume;  $\delta: S_1 \times X_1 \rightarrow S_1$  eine  $K$ -lin. Abb.) ist.



Satz 1: Sei  $H$  eine Halbgruppe, die isomorph zur Übergangshalbgruppe eines  $p$ -linear realisierbaren Automaten  $a$  ist.

Dann gilt:

- i)  $I := \{e \in H \mid e^2 = e\}$  ist eine Rechtsnullen-Halbgruppe
- ii) Die maximalen Untergruppen sind:  $G^e := He$ ,  $e \in I$ . Sie sind alle isomorph untereinander. Ferner sind sie isomorph zu Übergangsgruppen  $p$ -linear realisierbarer Permutationsautomaten.
- iii) Für das minimale zweiseitige Ideal  $Q$  gilt:  $Q = eH$ ,  $e \in I$ .  
 $Q = \bigcup_{e \in I} He$ ,  $Q$  ist Rechtsgruppe.

Satz 2: Sei  $H - HH = \emptyset$ ;  $H$  endlich.

- i)  $H$  ist isomorph zur Übergangshalbgruppe eines  $p$ -linear realisierbaren Automaten  $a \iff H$  ist Rechtsgruppe und jede maximale Untergruppe ist isomorph zur Übergangsgruppe eines  $p$ -linear realisierbaren Permutationsautomaten.
- ii) Sei  $E \subseteq H$ ,  $\langle E \rangle = H$ . Sei  $G$  eine maximale Untergruppe von  $H$ .  $E$  ist ein für  $p$  ausgezeichnetes Erzeugendensystem  $\iff H$  ist Rechtsgruppe und es existieren  $v \in G$ ,  $\Delta \triangleleft G$  mit  $G = \langle v\Delta \rangle$  und  $\Delta$  ist elementar-abelsche  $p$ -Gruppe derart, daß  $E \subseteq \bigsqcup_{e \in I} v\Delta e$ .

Satz 3:  $H - HH \neq \emptyset$ .

- i) es sind nur notwendige algebraische Eigenschaften bekannt.
- ii)  $E := H - HH$  ist einziges mögliches ausgezeichnetes Erzeugendensystem.

Folgerung aus Satz 2i): Ist  $H$   $p$ - und  $q$ -linear A-darstellbar ( $p$  und  $q$  verschiedene Primzahlen), dann ist  $H$  für alle Primzahlen linear A-darstellbar.



J.B. FOUNTAIN: Abundant Semigroups

The relation  $\mathcal{L}^*$  is defined on a semigroup  $S$  by the rule that  $a \mathcal{L}^* b$  if and only if  $a, b$  are related by Green's relation  $\mathcal{L}$  in some oversemigroup of  $S$ . Similarly  $\mathcal{R}^*$  is defined and one has  $\mathcal{J}^* = \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*$ ,  $\mathcal{D}^* = \mathcal{L}^* \cup \mathcal{R}^*$ . By introducing the concept of  $\star$ -ideals it is possible to define a relation  $\mathcal{J}^*$ . The semigroup  $S$  is abundant if and only if each  $\mathcal{L}^*$ -class and each  $\mathcal{R}^*$ -class contains an idempotent. On a regular semigroup, the  $\star$ -relations coincide with the corresponding Green's relations, so that the class of regular semigroups is contained in the class of abundant semigroups. For this class, the  $\star$ -relations play a role analogous to that played by Green's relations for regular semigroups. Using these notions, one can prove an analogue of Rees' Theorem, showing that an abundant semigroup with zero in which all non-zero idempotents are primitive is isomorphic to a "blocked Rees matrix" semigroup. For superabundant semigroups, that is, those in which each  $\mathcal{D}^*$ -class contains an idempotent, there is an analogue of Clifford's Theorem on union of groups semigroups.

Z. HEDRLIN: Semigroups and sociology?

Consider the following situation: we want to find a representative for a collective of people. The usual democratic way consists from two steps: each member of the collective chooses his representative and from this information a common representative is chosen. Mathematically, the first step can be considered as obtaining an algebra (set = collective) with an unary operation. If we would like to use a binary operation, the practice should be different: each couple of individuals should agree upon their common representative. This way we obtain experimentally a groupoid. The associativity condition has also its meaning - it concerns representation of triples.

Practically, these models cannot be used for larger collectives. But even here one can obtain partial information about the groupoid knowing only representatives of some couples. It leads to purely mathematical questions on reconstruction of semigroups and groupoids from their fragments.



K.H. HOFMANN: Kontrolltheorie und Unterhalbgruppen von Liegruppen.

Gewisse Anwendungen in der Kontrolltheorie führen zur Frage, welche Unterhalbgruppen von Lieschen Gruppen als Lie-Halbgruppen zu bezeichnen sind. Letzten Endes sucht man eine Klassifikation oder wenigstens eine allgemeine Theorie für solche Halbgruppen. Davon ist man im Augenblick noch weit entfernt. In der Zwischenzeit konzentriert man sich auf die Art der Einbettung der maximalen Untergruppe einer Lieschen Halbgruppe in diese Halbgruppe und auf Fragen der Erzeugung von Lie-Halbgruppen durch einparametrische Unterhalbgruppen. Methodische Hilfsmittel entspringen aus einer Kombination von liegruppentheoretischen (also analytischen) mit halbgruppentheoretischen Verfahren, sowie von linearer Algebra und Eigenwertbetrachtungen.

E. HOTZEL: Dual D-operands

A coordinate-free version and generalization of Rees matrix semigroups over a semigroup  $D$  with 0 and 1 is established via the notion of a 'pair over  $D$ '. Such a pair  $\beta$  consists of operands  $D^M$  and  $N_D$  together with a bilinear map  $(m,n) \mapsto \langle m,n \rangle$  from  $M \times N$  to  $D$ . Connected with  $\beta$  are the semigroups

$$\Omega^\beta = \{(\rho, \sigma) \in \text{End } D^M \times \text{End } N_D \mid \langle x\rho, y \rangle = \langle x, \sigma y \rangle \text{ for all } x, y\},$$

$$\Omega_{1,1}^\beta = \{(\rho, \sigma) \in \Omega^\beta \mid M_\rho \text{ and } \sigma N \text{ contained in cyclic subop's}\}$$

$$\text{and } \Sigma^\beta = \{[n,m] \mid n \in N, m \in M\} \text{ where } [n,m] = (\langle -, n \rangle m, n \langle m, - \rangle)$$

(both being ideals of  $\Omega^\beta$ ), and  $N_D^\beta M$ , the latter being defined on

$N_D^\beta M$  by  $n a m \cdot n' a m' = n a \langle m, n' \rangle m'$ . If  $D^M$  is generated by

$$\{u \in M \mid \langle u, N \rangle = D\} \text{ and } N_D \text{ by } \{v \in N \mid \langle M, v \rangle = D\} \text{ then } \beta \text{ is called}$$

dual; in that case  $N_D^\beta M \cong \Sigma^\beta = \Omega_{1,1}^\beta$ . Under the weaker assumption

$\langle M, N \rangle = D$  we have  $N_D^\beta M \cong \Sigma^\beta$ ; the semigroups homomorphically between  $N_D^\beta M$  and  $\Sigma^\beta$  are just the semigroups of the form  $S = SeS$ ,  $e = e^2 \in S$ .

If  $D^M$  and  $N_D$  are free then  $N_D^\beta M$  is essentially a Rees matrix semigroup as can be seen by choosing bases. Assuming  $\langle M, N \rangle = D$  these semigroups can be characterized internally in terms of 0-disjoint



decompositions. Under successively stronger assumptions the semi-groups of Steinfeld (1967) and of Lallement and Petrich (1969) are obtained.

G. JACOB: Matrix semigroups; finiteness and decidability

Using, as a basic result our constructive proof of the Burnside theorem on matrix groups, we intend to explain the proof of the following: "One can effectively decide, for any finitely generated semigroup of matrices over a commutative field, if it is finite". (Journal of Algebra, 1978)

Our proof needs the statement of iteration and factorization properties of "long enough" products of matrices, and leads to defining a new structural object: The "characteristic groups" of a matrix semigroup.

The combinatorial nature of the main tool allows us to generalize our technique and results in some "ordered representations" of finitely generated subsemigroups.

K.H. KIM: Generalized Fuzzy Matrices and Applications

We give a systematic development of fuzzy matrices. Many of our results generalize to matrices over the two element Boolean algebra, over the nonnegative real numbers, over the nonnegative integers, and over other semirings, and we present these generalizations. Our first main result is that while spaces of fuzzy vectors do not have a unique basis in general they have a unique standard basis and the cardinality of any two bases are equal. Thus concepts of row and column basis, row and column rank can be defined for fuzzy matrices than we studied Green's equivalence classes of fuzzy matrices. Next we give criteria for a fuzzy matrix to be regular and prove that the row and column rank of any regular fuzzy matrix are equal. Various inverses are also studied. In the next section, we obtain bounds for the index and period of a fuzzy matrix and in the final section we apply this to fuzzy automata.



We also survey some applications of binary relations (Boolean matrices) to political equilibrium, automata, game theory, social welfare theory, sociology of small groups, hierarchical clusterings and organizational structure. We state a number of results, give examples, and list some unsolved problems.

U. KNAUER: Kranzprodukte von Monoiden mit 0 und Endomorphismenmonoiden freier Operanden

Kranzprodukte von Monoiden und Halbgruppen sind von verschiedenen Autoren untersucht worden. Für Monoide mit 0 ergibt sich jedoch eine andere Situation. Nach der Definition des üblichen Kranzproduktes  $T = (R, S, A)$ , wo R, S Monoide mit 0, A ein linkes  $R/Act$  ist, werden vier Kongruenzen auf T und ihre Beziehungen zu dem Endomorphismenmonoid eines freien Actes über einem Monoid mit 0 diskutiert. Es wird eine vollständige Beschreibung der Annulatoreigenschaften eines der Faktorenmonoide (Kranzprodukt von Monoiden mit 0) gegeben und es werden reguläre Kranzprodukte von Monoiden mit 0 charakterisiert. Als Folgerungen werden die entsprechenden Eigenschaften für Endomorphismenmonoide von freien Acten angegeben.

(Zusammen mit A.V. Mikhalev.)

M. KUNZE: Die Halbgruppe der Größenklassen eines geordneten lokalen Rings

Sei  $R, +, \cdot, \leq$  ein geordneter kommutativer Ring mit  $1 \neq 0$ , und die Menge I der Nichteinheiten von R sei konvex. Dann ist R lokal und  $R/I$  ein geordneter Körper. Um die Struktur von R im Bereich der Nichteinheiten zu studieren, betrachten wir im Positivbereich P von R die Größenklassen  $\kappa(a) := \{x \in P \mid \exists c, d \in P: a \leq cx \wedge x \leq da\}$ .

Diese Größenklassen bilden eine geordnete kommutative Halbgruppe  $S(R)$  mit  $\kappa(0) = \{0\}$  als kleinstem und  $\kappa(1) = P \setminus I$  als größtem Element. In  $S(R)$  gilt die Kürzungsregel  $a \cdot c = b \cdot c \neq 0 \implies a = b$ , und  $a \mapsto \kappa(a)$  ist ein Homomorphismus von  $P, +, \leq$  auf  $S(R), \cdot, \leq$ .

Die Größenklassen hängen eng mit den konvexen Idealen von R zusammen. In den konstruierten Beispielen ist die Struktur des geordneten Rings vollständig festgelegt durch den Restklassenkörper einerseits und die Halbgruppe der Größenklassen andererseits.



S. LAJOS: (m,n)-ideal characterizations of certain classes of semigroups

Let  $S$  be a semigroup. A subsemigroup  $A$  of  $S$  is said to be an  $(m,n)$ -ideal of  $S$  if  $A^m S A^n \subseteq A$ . The product of two  $(1,1)$ -ideals is again a  $(1,1)$ -ideal. Thus the collection of all bi-ideals of  $S$  is a semigroup with respect to set product. This semigroup will be denoted by  $B(S)$ .

Theorem 1:  $S$  is a semilattice of groups iff  $B(S)$  is a regular monoid.

Theorem 2:  $S$  is a semilattice of left groups iff  $B(S)$  is regular and  $S$  is a right identity of it.

Theorem 3:  $S$  is a homogroup iff  $B(S)$  is a semigroup with zero.

Theorem 4:  $S$  is the union of groups iff for every element  $a \in S$  there is an idempotent  $e_a$  in  $S$  so that  $\{a\}_{(m,n)} = \{e_a\}_{(m,n)}$ , where  $m, n \geq 1$ , or, equivalently, every principal  $(m,n)$ -ideal is a monoid.

Corollary: Let  $M_n$  be the multiplicative semigroup of all  $n$  by  $n$  complex matrices. An element  $A$  of  $M_n$  has a group inverse iff there is an idempotent matrix  $E$  in  $M_n$  so that  $AM_nA = EM_nE$ .

L.C.H. VAN LEEUWEN: Semigroup extensions

A semigroup extension of a semigroup  $A$  by a semigroup  $S$  is an ordered pair  $(E, \theta)$  consisting of a semigroup  $E$ , containing a sub-semigroup  $A$  isomorphic with  $A$  and a congruence  $\theta$  on  $E$  such that  $A$  is a  $\theta$ -class and  $E/\theta$  is isomorphic with  $S$ . A particular type of semigroup extensions are the union extensions, defined by L.A.M. Verbeek. One requires that the semigroup  $E$  has carrier  $E = A \cup (S \setminus i)$ ,  $i$  idempotent in  $S$  and that the restriction to  $E \setminus A$  of the isomorphism of  $E/\theta$  onto  $S$  is the identity mapping of  $S \setminus i$ . Verbeek constructed all union extensions for some  $S$  and gave an algorithm for finding union extensions using the composition of  $S$ . This program was extended by Bröck and Jürgensen and the computations were finished by J. van Leeuwen. Jürgensen extended the notion of union extension of semigroups to that of union extensions.



of sets and obtained some analogous results with the ideal extensions of Clifford, by introducing the Rees kernel. In contrast to ideal extensions and union extensions of sets an example can be given, due to Jürgensen and Bröck, that union extensions of semigroups need not exist, even if A is finite and has idempotents. Generally, union extensions of sets exist, which can easily be shown.

E.S. LJAPIN: Teiloperationen in der Halbgruppentheorie

Jede Untermenge einer Halbgruppe kann man als Teilgruppoid (d.h. eine Menge mit Teiloperation) betrachten. Die umgekehrte Aufgabe besteht in der Erkenntnis, welche Halbgruppoide auf diese Weise bestimmt, d.h. in eine Halbgruppe eingebettet werden können. Eine besondere Rolle spielt das Einbetten von verschiedenen speziellen Typen. Von den notwendigen Bedingungen sind die Eigenschaften vom Assoziativitätstypus von Bedeutung. Zwischen ihnen gelten bestimmte Abhängigkeiten. Die Klasse der aus den Halbgruppen durch die Operation des Homomorphismus und der Beschränkungen bestimmten Halbgruppoide wird durch eine Quasiidentität definiert. Für einige wichtige Klassen von konkreten Teilgruppoiden, die aus den Halbgruppen bestimmt werden, sind abstrakte Charakterisierungen gefunden.

J.K. LUEDEMAN: The Generalized Ring of Quotients of a Semigroup Ring.

Given an idempotent filter,  $\Sigma$ , on a commutative ring with identity, R, and a special filter,  $\Delta$ , on a commutative monoid with zero, S, a collection of ideals,  $\Sigma(\Delta)$ , is defined on the semigroup ring  $R(S)$ . It is shown that if every dense ideal of R and S, respectively, contains a cancellable element,  $\sigma$  is the collection of all dense ideals of R, and  $\Delta$  is the collection of all dense ideals of S, then  $\Sigma(\Delta)$  is a  $\sigma$ -set on  $R(S)$  and the Utumi quotient ring  $Q_{\Sigma(\Delta)}[R(S)]$  is ring isomorphic to the semigroup ring of Utumi quotients,  $Q_{\Sigma}(R)[Q_{\Delta}(S)]$ .

Sufficient conditions are given guaranteeing that  $\Sigma(\Delta)$  is a  $\sigma$ -set on  $R(S)$ . When S is a semilattice with zero and 1 and  $\Sigma$  and  $\Delta$  are



of finite type, it is proven that  $Q_{\Sigma(\Delta)}[R(S)] \cong Q_{\Sigma}(R)[S]$ .

For  $M = (S, \Lambda, \Delta, P)$  a Rees matrix semigroup over the semigroup  $S$  with arbitrary index set  $\Lambda$ , the structure of  $\sigma$ -sets  $\bar{\Delta}$  on  $M$  is given in terms of  $\sigma$ -sets  $\{\Delta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  on  $S$  and the structures of  $Q_{\bar{\Delta}}(M)$  and  $Q_{\Sigma(\bar{\Delta})}[R(M)]$  are determined.

#### L. MARKI: Decompositions into unions of quasi-ideals

Similar to the case of semisimple Artinian rings or semisimple rings with minimum condition on principal left ideals, several decomposition type characterizations of primitive regular semigroups are known. One of them is the following (due to O. Steinfeld): a semigroup with zero is primitive regular iff it is the union of a complete system of quasi-ideals. According to a recent result of the author, the latter notion can be characterized as follows: it is a system  $Q_{\lambda\lambda'}, (\lambda, \lambda' \in \Lambda)$  such that

- 1)  $Q_{\lambda\lambda'}$  is either 0 or a 0-minimal quasi-ideal of the semigroup;
- 2)  $Q_{\lambda\lambda'} \cdot Q_{\mu\mu'} \subseteq Q_{\lambda\mu'}$ ;
- 3)  $Q_{\lambda\lambda'} \neq 0 \implies Q_{\lambda\lambda'} \cdot Q_{\lambda'\lambda} \neq 0$ . This shows that this notion is a generalization of a matrix decomposition; here  $\mathcal{H}$  is a congruence and the  $Q_{\lambda\lambda'}$  are just the  $\mathcal{H}$ -classes with zero adjoined. From the egg-box picture - or, equivalently, from this complete system - we can easily see whether our semigroup has some properties (e.g. simplicity, inverseness, finiteness conditions). - Similar decomposition type results can be obtained for semiprime semigroups.

#### L. MEGYESI: Independent subsemigroups

The notion of independent subsemigroups was introduced by E.S. Ljapin in 1969. He raised the following problem: What are the conditions in order that a semigroup amalgam can be embedded in a semigroup  $S$ , in such a way, that the semigroups of the amalgam should be independent. This problem is solved by E.S. Ljapin in the case of the amalgam containing two semigroups. A generalization of Ljapin's theorem is given for amalgams having an arbitrary set of semigroups.



Theorem. Let  $A$  be a weak associative amalgam of a set of semigroups  $A_\xi$  ( $\xi \in J$ ,  $J$  is an index set). The amalgam  $A$  can be embedded in a semigroup  $B$  with the property that the system of semigroups  $A_\xi$  ( $\xi \in J$ ) in  $B$  is independent - iff every semigroup pair  $A_\alpha, A_\beta$  ( $\alpha, \beta \in J$ ) fulfills the conditions in Ljapin's theorem.

T. MERLIER: Totally orderable semigroups and locally finite semigroups

A semigroup  $S$  is called a totally orderable semigroup if there exist a total order  $\leq$  on  $S$  satisfying the condition

$$\forall x \forall y \forall z \in S \quad x \leq y \implies xz \leq yz \wedge zx \leq zy$$

A semigroup  $S$  is called locally finite, if its finite subsets generate finite subsemigroups. It is well known that a periodic semigroup (or group) is not locally finite in general (Burnside's Problem).

A nilsemigroup  $S$  is a semigroup with zero  $0$ , such that for every  $x \in S$ , there is a natural number  $n = n(x)$  such that  $x^n = 0$ .

Then we have the following results:

Theorem 1: Every totally orderable nilsemigroup is locally finite.

Theorem 2: Every semigroup periodic with identity and totally orderable is locally finite.

R. MLITZ: Normal radicals of monoids

The aim of the investigations is to construct a radical theory for monoids which includes the classical Kuroš-Amitsur-theory for groups. For any variety  $V$  of monoids define  $A \in V$ :

$B \triangleleft A \iff \exists S \in V$ , epim.  $\phi : S \rightarrow A$  and a normal submonoid  $T$  of  $S$  with  $\phi T = B$ . A normal radical on  $V$  will be a radical on  $V$  as defined by Höhnke for universal algebras with the supplementary condition:  $A$  semisimple iff there is no radical  $B \triangleleft A$  excepted  $B = \{1\}$ . The main results:

1.)  $B \triangleleft A$  iff  $B$  is a submonoid of  $A$  - if  $V$  is not a variety of torsion groups

$B \triangleleft A$  iff  $B$  is a normal subgroup of  $A$  in the other case.



- 2.) To every  $A \in V$ , there is a unique  $B$  maximal with resp. to  $B$  radical and  $B \triangleleft A$ .
- 3.) A subclass  $R$  of  $V$  is the class of all radical monoids in  $V$  for some normal radical iff  $R$  is closed under homomorphic images, under unions in the lattice of all  $B \triangleleft A$  ( $\forall A \in V$ ) and under minimal extensions (minimal means that one has to take the smallest congruence with the considered class of "1").
- 4.) If  $V$  is a variety of commutative monoids, the normal sub-monoid generated by some radical  $B \triangleleft A$  is itself radical. Hence in this case the whole theory can be developed as an exact analogue of the classical theory for groups.

(results obtained in cooperation with L. Márki and R. Strecker)

W.R. NICO: Extensions of monoids and categories

The central problem is that of interpreting a congruence on a monoid  $A$  as an entity separate from the monoid itself. Such an interpretation is had if one interprets a congruence as a small category  $K$  whose objects are the congruence classes and whose morphisms are elements of  $A$  which take one class to another under left multiplication.  $A$  itself may be considered as a one-object category  $\mathcal{A}$ . Then the natural projection  $\kappa : K \rightarrow \mathcal{A}$  is a functor.  $K$  has a distinguished object  $1$ , and the pair  $(\kappa, 1)$  can be described axiomatically so that it both determines, and is determined by, the congruence on  $\mathcal{A}$ .

Letting  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  be the quotient functor, where  $\mathcal{B}$  is the one-object category with object  $*$ , and letting  $\Omega = \pi \kappa : K \rightarrow \mathcal{B}$ , call  $\{K, \mathcal{B}, \Omega, 1\}$  an extension setting. This can also be described axiomatically. Extensions for this setting correspond to functors  $T : \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ , called extension functors, such that  $T(*)$  is a subcategory of  $K$  containing all morphisms with domain  $1$  and satisfying simple axioms. The extension  $E = E(T)$  is the one object category (monoid) whose morphisms are  $\bigcup \{K(1, \sigma) : \sigma \in (K)\}$ . Composition  $*$  is given by  $f * g = T(\Omega g)(f) \circ g$ , where  $\circ$  is composition in  $K$ .





Isomorphic extensions correspond to naturally isomorphic extension functors.

L. O'CARROLL: Semilattices of E-unitary Inverse Semigroups

Let  $S$  be an inverse semigroup with semilattice of idempotents  $E$ .

Let  $\sigma$  denote the minimum group congruence on  $S$ . Then  $S$  is said to be E-unitary if  $E\sigma = E$ . The structure of E-unitary inverse semigroups was determined by McAlister in terms of groups acting on partially ordered sets. A congruence  $\eta$  on  $S$  is called

idempotent-determined if it has the property that  $U\{en : e \in E\} = S/\eta$ . Then  $S$  is said to be strongly E-reflexive if and only if there exists an idempotent-determined congruence  $\eta$  on  $S$  such that  $S/\eta$  is a semilattice of groups. It is known that an inverse semigroup is strongly E-reflexive if and only if it is a semilattice of E-unitary inverse semigroups.

Thus strongly E-reflexive inverse semigroups form a common generalization of E-unitary inverse semigroups and semilattices of groups, and they have a detailed theory which reflects this fact. There remains much to be done in this area; here we confine ourselves to the following results.

Theorem 1. Let  $S$  be an inverse semigroup which is the union of inverse subsemigroups  $S_i$  satisfying the following properties:  
(a) each  $S_i$  is strongly E-reflexive; and  
(b)  $x \mathcal{D} y, y \in S_i \implies x \in S_i$ .

Then  $S$  itself is strongly E-reflexive.

Corollary. Let  $S$  be an inverse semigroup which is a disjoint union of strongly E-reflexive inverse semigroups. Then  $S$  itself is strongly E-reflexive.

We remark that condition (b) is essential, and that when each  $S_i$  is a group, the theorem (and its proof) specialise to Clifford's well known results on semilattices of groups.

Previously McAlister has shown that the free product (in the category of inverse semigroups) of two E-unitary inverse semigroups is also E-unitary. Here we show that the free product of two certain very elementary semilattices of groups is no longer strongly E-reflexive. This fact gives rise to obvious open questions.



D. PERRIN: Groups in finite monoids

Consider a finitely generated submonoid  $X^*$  of a free monoid  $A^*$  and the syntactic monoid  $M$  of  $X^*$ :

$$\begin{array}{ccccc} A^* & \xrightarrow{\phi} & M & \searrow & \\ | & & | & & \\ X^* & \xrightarrow{\psi} & P & \searrow & Q \\ & & & & | \\ & & & & G \end{array}$$

$M = \text{Synt}(X^*)$   
 $X^* = P\phi^{-1}$

For any group  $G$  in  $M$ , we may find a copy of  $G$  that meets  $P$  (Schützenberger, 1956); let  $Q = P \cap G$ .

We prove the following result:

Theorem: If the restriction of  $\phi$  to  $G\phi^{-1}$  may be extended to a morphism  $\psi : A^* \rightarrow G$  then one has the inequality:

$$[G : Q] \leq \frac{\text{Card}(X)-1}{r(G)-1}$$

where  $r(G)$  is the rank of  $G$ , i.e. its minimal number of generators.

The proof uses Schreier's formula. This result is related to a theorem of Schützenberger asserting that  $[G : Q] \leq k$  unless  $G$  is cyclic; the proof of the latter rests upon a result on periods of words [Cesari, Duval (1978)].

J.-F. PERROT: Monoides réguliers et codes préfixes finis

On ne sait pas en général quelles conditions doit vérifier un langage (rationnel)  $L$  pour que son monoïde syntaxique  $\text{Synt}(L)$  soit régulier - même et surtout lorsque  $L$  est le sous-monoïde  $A^*$  engendré par un code préfixe fini  $A$ . Dans cette direction, nous avons établi le

Théorème: Soit  $A$  un code préfixe fini et pour un entier  $n$  soit  $B = A^n$  (qui est aussi un code préfixe fini). Si  $\text{Synt}(A^*)$  est régulier, alors  $\text{Synt}(B^*)$  est également régulier, et réciproquement.

La preuve utilise certaines propriétés des automorphismes des automates finis sur lesquels sont naturellement représentés les monoïdes syntaxiques des codes préfixes (cf. les



actes du colloque de Szeged à paraître prochainement).

Ce résultat permet d'obtenir une part d'un théorème de Keenan et Lallement (Semigroup Forum 1974) : "Soit A un code préfixe fini et  $B = A^n$ : si  $\text{Synt}(A^*)$  est inversif alors  $\text{Synt}(B^*)$  est inversif et réciproquement".

Comme pour le résultat précédent, la partie réciproque se déduit immédiatement de ce que  $\text{Synt}(A^*)$  est image homomorphe de  $\text{Synt}(B^*)$ . Pour la partie directe, observons que le monoïde  $\text{Synt}(C^*)$  lorsque C est un code préfixe fini est inversif ssi d'une part il est régulier et si d'autre part  $C^*$  vérifie ( $\ast \ast$ ) dans l'automate minimal reconnaissant  $C^*$  toutes les transitions sont des bijections partielles: cette dernière condition ayant pour conséquence que les idempotents commutent.

Il reste donc à montrer que si A est un code préfixe fini vérifiant ( $\ast \ast$ ) alors le code  $B = A^n$  pour n entier quelconque vérifie aussi ( $\ast \ast$ ). Ceci peut être établie directement par une analyse des automates. On propose ici de l'obtenir comme conséquence d'un résultat de C. Reutenauer (à paraître dans Semigroup Forum) qui caractérise les sous-monoïdes vérifiant ( $\ast \ast$ ) comme les sous-monoïdes rationnels fermés dans la topologie induite sur le monoïde libre par la topologie du groupe libre ayant pour base de voisinage de l'unité les sous-groupes d'index fini (due à M. Hall). La preuve "topologique" est-elle plus simple que la preuve "combinatoire"?

#### M. PETRICH: Congruences on inverse semigroups

Let S be an inverse semigroup. If  $\rho$  is a congruence on S, then  $\rho$  is uniquely determined by its kernel,

$$\ker \rho = \{a \in S \mid a \rho e \text{ for some } e \in E_S\}$$

and its trace,  $\text{tr } \rho = \rho|_{E_S}$ . Conversely, we can abstractly characterize a pair  $(K, \tau)$  such that there exists a necessarily unique congruence  $\rho$  on S for which  $K = \ker \rho$ ,  $\tau = \text{tr } \rho$ . Based on this, one can formulate an extension problem for inverse semigroups analogous to the extension problem for groups. One can also classify certain special congruences on an arbitrary inverse semigroup as well as characterize all congruences on some special types of inverse semigroups. The former is done by considering



extremal properties of the kernel and the trace, and the latter by taking, e.g., simple  $\omega$ -semigroups and constructing all congruences on them.

G. POLLAK/L. MEGYESI: Combinatorial simple principal ideal semigroups (PIS)

A semigroup is called a PIS if every left and every right ideal is principal. In [1] the investigation of PIS-s is in a certain sense reduced to that of combinatorial simple ones (CSPIS). The  $\mathcal{L}$ -classes of such a semigroup S form a well-ordered antichain  $L_0, L_1, \dots$  and  $\forall x \exists y (xy \in L_0)$ .  $L_0$  itself forms a semigroup isomorphic to the additive semigroup of all ordinals (possibly excluded 0) less than some (additively) irreducible ordinal  $\lambda$  ( $L_0 = \{a, a^2, \dots, a^\alpha, \dots\}_{\alpha < \tau}$ ; possibly also  $a^0 \in L_0$ ).

Put  $A_{\alpha\beta} = \{x | xa^\beta = a^\alpha, xa^\gamma \notin L_0 \text{ for } \gamma < \beta\}$ ,  $A_{\alpha 0} = \{a^\alpha\}$ .

Then  $A_{\alpha\beta} \neq \emptyset$  for  $1 \leq \alpha < \lambda$ ,  $0 \leq \beta < \lambda$ .

The relation  $x \sim y$  iff  $x, y \in A_{\alpha\beta}$  is a congruence and  $S/\sim$  is a CSPIS which is a generalization of the bicyclic semigroup (or is the subsemigroup of such a generalization obtained by deleting its first  $\mathcal{R}$ -class). The diagonal blocks  $A_{11}, A_{\omega\omega}, \dots, A_{\sigma\sigma}, \dots$  ( $\sigma$  irreducible) can be arbitrary PIS-s, are independent from each other and determine uniquely the rest of the  $A_{\alpha\alpha}$ -s except possible those of the form  $A_{\beta+1, \beta+1}$  where 3 slightly different cases can occur. The knowledge of the classes  $A_{\rho\sigma}$  ( $\rho, \sigma$  irreducible) and of  $A_{21}, A_{22}, A_{12}, A_{13}$  determines the whole semigroup; besides, the  $A_{\rho\sigma}$ -s are independent and if one knows  $A_{11}$ , there remains a small number of different possibilities for  $A_{21}, A_{22}, A_{12}$  and  $A_{13}$ .

- [1] L. Megyesi und G. Pollák: Über die Struktur der Hauptidealhauptgruppen I,  
Acta Sci. Math. 29 (1968), 261-270.



W. RUPPERT: Halbtopologische Halbgruppen auf kompakten zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten

Sei  $S$  eine kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Auf  $S$  sei eine assoziative Multiplikation  $\mu : S \times S \rightarrow S$ ,  $(x,y) \mapsto xy$ , gegeben, außerdem möge  $S$  ein Einselement  $1$  enthalten. Nach einem wohlbekannten Satz von Mostert & Shields (1959) folgt für stetige Multiplikation  $\mu$ , daß  $S$  eine kompakte Liegruppe ist. Für den Fall, daß nur die Translationen  $x \mapsto xy$  und  $y \mapsto xy$  stetig sind, folgt nach Lawson (1974), daß die Gruppe der Einheiten  $H(1)$  offen in  $S$  ist. Der folgende Satz gibt näheren Aufschluß über die Struktur von  $S$  für diesen Fall:

Satz: Sei  $S$  wie oben eine Halbgruppe mit Einselement, die auf einer kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit definiert ist; die Translationen  $x \mapsto xy$  und  $x \mapsto yx$  seien stetig. Dann gilt:

- (i)  $S$  ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit
- (ii)  $H(1)$  ist offen, zusammenhängend und dicht in  $S$
- (iii)  $S$  hat nur endlich viele Idempotente und alle Idempotenten sind zentral
- (iv)  $S$  ist die Vereinigung der maximalen Untergruppen  
 $S = \bigcup_{e^2=e \in S} H(e)$
- (v) Für jedes Idempotent  $e \in S$  ist  $H(e) = eH(1)$  und  $H(e)$  ist offen in  $eS$ .

J. SAKAROVITCH: Transversale rationnelle pour les monoïdes libres et les groupes libres

Soit  $\phi$  une application  $\phi : X^* \rightarrow E$ .  $\phi$  possède la propriété de transversale rationnelle si, par définition :

$\forall R \in \text{Rat } X^*$ ,  $\exists T \in \text{Rat } X^* : T \subset R$   $\phi$  est une bijection entre  $T$  et  $\phi(R)$ .

Un monoïde  $M$  possède la propriété de transversale rationnelle si pour tout monoïde libre  $X^*$ , tout homomorphisme  $\phi : X^* \rightarrow M$  possède la propriété de transversale rationnelle. On a le



Théorème 1 (Eilenberg): Tout monoïde libre possède la propriété de transversale rationnelle.

Un ordre sur  $X^*$  est dit "coherent" avec un homomorphisme  $\phi : X^* \rightarrow Y^*$  si  $\forall x, y \in X$  ( $\phi(x) \neq 1_{Y^*}$  et  $\phi(y) = 1_{Y^*} \Rightarrow x < y$ ).

Dans ce cas on montre que la transversale lexicographique existe et on a

Théorème 2: La transversale lexicographique est rationnelle.

qui précise la théorème 1. Par ailleurs on peut montrer

Théorème 3: Le groupe libre possède la propriété de transversale rationnelle.

M. SATYANARAYANA: Complete totally ordered semigroups

Let  $S$  be a totally ordered semigroup.  $S$  is positively ordered (negatively ordered) in the strict sense if  $ab \geq a, b$  ( $ab \leq a, b$ ) for every  $a$  and  $b$  in  $S$ .  $S$  is o-Archimedean if for every  $x, y$  in  $S$  there exists natural numbers  $p, q, r, s$  such that  $x^p \leq y^q$  and  $y^r \leq x^s$ .  $S$  is complete if every non-empty set which is bounded from above, has a least upper bound. In this paper we shall characterize o-Archimedean semigroups and find conditions when a globally idempotent complete semigroup is o-Archimedean. This is a continuation of Hölder and Huntington's enquiry when a complete commutative naturally totally ordered cancellative semigroup (which is positively ordered in the strict sense) is o-Archimedean. The "complete" property has been utilized by Hölder to obtain that the above semigroups are subsemigroups of the additive semigroup of positive real numbers.

J.-C. SPEHNER: Présentations et présentations simplifiables d'un monoïde simplifiable

S.I. ADJAN a montré que pour présenter un monoïde simplifiable, il est impossible de remplacer une règle de simplification par un nombre fini de relateurs. Il a obtenu ce résultat à l'aide de monoïde définis par 6 générateurs et 5 relateurs. Nous retrouvons le théorème de S.I. ADJAN à l'aide d'exemples plus simples définis par 4 générateurs et 2 relateurs. Nos exemples



sont optimaux quant au nombre de relateurs. Ils montrent, en outre, que l'action des deux règles de simplification sur la présentation d'un monoïde simplifiable peut être asymétrique.

A.I. MALCEV a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un monoïde soit immersible dans un groupe. Pour de tels monoïdes, nous introduisons la notion de présentation de Malcev et nous montrons qu'ils peuvent admettre une présentation de Malcev finie sans admettre de présentation simplifiable finie.

#### J. SZENDREI: Semirings embeddings

Let  $T$  be the set of all transformations of a semiring  $(S, +, \cdot)$ . The transformations will be written as operators on the right. Defining operations  $+, \cdot$  on  $T$  in the familiar way  $(T, +, \cdot)$  becomes a left seminearring.  $(T^*, +, \cdot)$  denotes the opposite left seminearring. On the set  $\Delta = T^* \times T$  define addition and multiplication componentwise. On the set  $S \cup \Delta$  one extends both operations of  $S$  and  $\Delta$  to all mixed pairs  $a(\in S)$ ,  $\omega = (x, \tau)$  ( $\in \Delta$ ) by

$$\omega + a = \omega + \omega_a, \quad a + \omega = \omega_a + \omega; \quad \omega a = ax, \quad a\omega = \tau a,$$

where  $\omega_a = (\lambda_a, \rho_a)$  means the pair of left and right translation of  $(S, \cdot)$  induced by  $a$ .

A set  $S \cup \bar{\Delta}$  ( $\subseteq \cup \Delta$ ) is a semiring containing  $S$  as a semiring ideal iff the elements of  $\bar{\Delta}$  are simultaneously biendomorphisms of  $(S, +)$  and permutable linked bitranslations of  $(S, \cdot)$ . Every such a semiring is contained in a maximal one, which is called a holomorph of  $(S, +, \cdot)$ .

The notion of semiring holomorphs can be applied for proving several theorems concerning semirings embeddings.

The notion of semigroup holomorphs can be defined in a similar way and can be applied for extensions of semigroups.



M. SZENDREI: On closed subsets of termfunctions of completely regular semigroups

From universal algebraic point of view completely regular semigroups are considered as algebras with a binary operation - the multiplication and a unary operation which to every element corresponds its group-inverse. Of this type of algebras completely regular semigroups form a variety defined by the following identities: associativity,  $xx^{-1}x = x$ ,  $(x^{-1})^{-1} = x$ ,  $xx^{-1} = x^{-1}x$ .

A set of termfunctions of an algebra is called a clone if it contains all the projections and is closed under superposition. We term a clone idempotent if all the termfunctions in it are idempotent, that is  $f(a, \dots, a) = a$  ( $\forall a \in A$ ) holds for them.

Denote the lattice of all idempotent clones of termfunctions of a completely regular semigroup  $S$  by  $\mathcal{L}_S$ . The following theorems give a necessary and sufficient condition for  $S$  to have the property that  $\mathcal{L}_S$  is a chain.

Theorem 1. Let  $S$  be a completely regular semigroup which is not band. Then  $\mathcal{L}_S$  is a chain iff  $S$  is commutative and is of prime power exponent or  $S$  is a left or right regular band of Abelian groups and is of prime exponent.

Theorem 2. Let  $E$  be a band. The following three assertions are equivalent:

- (i)  $\mathcal{L}_E$  is a chain.
- (ii)  $\mathcal{L}_E$  is finite.
- (iii)  $E$  satisfies a non-trivial identity in 5 variables.

J. SZEP: Über eine algebraische Struktur mit zwei Verknüpfungen

Es werden die folgenden algebraischen Strukturen untersucht.

$S$  sei eine Menge mit den Verknüpfungen " $\times$ " und " $\cdot$ ", so daß  $S(x)$  eine Halbgruppe und  $S(\cdot)$  eine Gruppe ist. Dabei sollen die beiden Verknüpfungen durch die folgenden Regeln zusammenhängen:



Fall I

$$c(axb) = (ca)x(cb)$$
$$(axb)c = (ac)x(bc)$$

Fall II

$$c(axb) = (ca)x(cb)$$
$$(axb)c = (ac)x(bc^{-1})$$

Fall III

$$c(axb) = (c^p a)x(c^p b)$$
$$(axb)c = (ac^q)x(ac^q)$$

für alle  $a, b, c \in S$  und gegebene ganze Zahlen  $p$  und  $q$ .

In den Fällen I und II werden die Strukturen vollkommen beschrieben. Im Fall III wird gezeigt, daß diese Struktur eine Beziehung zu dem Satz von Feit und Thompson (Gruppentheorie) hat. In sämtlichen Fällen (I,II,III) wird angenommen, daß  $S(\cdot)$  eine endliche Gruppe oder eine periodische Gruppe ist.

G. THIERRIN: Decomposition of subsets in a semigroup

Let  $S$  be a semigroup, let  $A$  be a subset of  $S$  and let  $\text{rad}(A) = \{x | x^n \in A\}$ .  $A$  is said to be (1)  $c$ -prime if  $ab \in A$  implies  $a \in A$  or  $b \in A$ . (2)  $cs$ -prime if  $a^n \in A$  implies  $a \in A$  (3)  $rc$ -prime if  $\text{rad}(A)$  is  $c$ -prime.

If  $\rho$  is a compatible preorder relation on  $S$ , then  $A$  is said to be  $\rho$ -closed if  $apx, a \in A$ , implies  $x \in A$ .

We have the following results:

1. If  $A$  is  $\rho$ -closed, then  $\text{rad}(A)$  is  $\rho$ -closed and  $\text{rad}(A)$  is the intersection of  $c$ -prime  $\rho$ -closed sets.
2. A  $\rho$ -closed set  $A$  is  $cs$ -prime iff  $A$  is the intersection of  $c$ -prime  $\rho$ -closed sets.

In the special case where  $\rho$  is the identity, then every subset  $A$  of  $S$  is  $\rho$ -closed and  $A$  is the intersection of  $rc$ -prime sets.

W. THOLEN: Einige kategorIELLE Bemerkungen über Amalgamierungen

Halbgruppenkategorien zeichnen sich i.a. durch einige negative Eigenschaften aus, z.B.: 1. Es existieren echte epimorphe Erweiterungen. 2. Saturierte Objekte sind nicht notwendig absolut abgeschlossen (Isbell). 3. Es existieren i.a. keine freien Produkte mit Amalgam (Amalgamierungen). Im allgemeinen kategoriellem Rahmen, der auch topologische Kategorien einbezieht, wird gezeigt, daß die Eigenschaften 1 und 2 daraus folgen, daß



die existierenden Amalgamierungen i.a. nicht (wie in der Kategorie der Gruppen) die Durchschnittseigenschaft erfüllen. Eigenschaft 2 hat zur Folge, daß für keine (noch so geschickt gewählte) Monomorphismenklasse alle Amalgamierungen mit Durchschnittseigenschaft existieren können. Schließlich werden einige hinreichende Bedingungen für die Existenz von Amalgamierungen diskutiert.

E. VALKEMA: On some relations between formal languages and groups

Let  $X$  be a finite set,  $L \subseteq X^*$ , define  $\mu_L$  to be the smallest congruence on  $X^*$ , such that  $L$  is contained in one  $\mu_L$ -class; since  $X^*$  can be embedded into  $F(X)$ , (the free group on  $X$ ),  $\gamma_L$  can be defined to be the smallest congruence on  $F(X)$ , such that  $L$  is contained in one  $\gamma_L$ -class. Denote  $X^*/\mu_L =: \mathfrak{M}(L)$ ,  $F(X)/\gamma_L =: \mathcal{G}(L)$ .

Theorem 1: If  $\mathfrak{M}(L)$  is a group, then  $\mathfrak{M}(L) \cong \mathcal{G}(L)$ .

Let  $G = (V, X, \sigma, P)$  be a grammar.  $G$  is called reduced iff

$\forall a \in V \exists w_a \in X^* : a \xrightarrow{*} w_a$  and if  $\forall (u, v) \in P$

$\exists f_1, f_2 \in (V \cup X)^*: \sigma \xrightarrow{*} f_1 \cup f_2$ . Denote  $\langle V \cup X | P \rangle =: \mathcal{G}(G)$ .

Theorem 2: If  $L$  is generated by a reduced grammar  $G$ , then

$$\mathcal{G}(G) \cong \mathcal{G}(L).$$

Corollary 1: (Hotz, 1978) If  $G_1, G_2$  are reduced grammars and if

$$L(G_1) = L(G_2), \text{ then } \mathcal{G}(G_1) \cong \mathcal{G}(G_2).$$

$L \subseteq X^*$  is called a group language : $\iff \mathfrak{M}(L)$  is a group and  $\phi^{-1}(1) = L$   
( $\phi$  being the canonical homomorphism from  $X^*$  onto  $\mathfrak{M}(L)$ )

$\mathcal{G}$  is a context-free group : $\iff \exists$  contextfree language  $L \subseteq X^*: \mathfrak{M}(L) \cong \mathcal{G}$

Corollary 2: (Anisimov, 1972) If  $\mathcal{G}$  is a contextfree group,  
then  $\mathcal{G}$  is finitely presented.



H.J. WEINERT: On S-sets and semigroups of quotients

Let  $S$  be an arbitrary semigroup and  $M_S$  a (right)  $S$ -set without any assumption on fixed elements. Extending concepts and results of F.R. McMorris, C.V. Hinkle and M.M. Botero de Meza, we define  $Q_r$ -filters  $F$  of  $M_S$  and right quotient semigroups  $Q_r(M_S, F, K)$  of  $M_S$  with respect to two such  $Q_r$ -filters  $F$  and  $K$ . Also dense, intersection-large as well as weakly intersection-large  $S$ -subsets of  $M_S$  are introduced and investigated in this general manner. Let us denote by  $M_S^\Delta$  the  $Q_r$ -filter of all dense, by  $M_S^\lambda$  the  $Q_r$ -filter of all intersection-large  $S$ -subsets of  $M_S$ . Then  $Q_r(M_S, M_S^\Delta)$  or  $Q_r(S_S, S_S^\Delta)$  correspond to the right quotient ring  $Q_r(R, R^\Delta)$  of Y. Utumi and similarly  $Q_r(M_S, M_S^\lambda)$  or  $Q_r(S_S, S_S^\lambda)$  to the right quotient ring  $Q_r(R, R^\lambda)$  of R.E. Johnson. As examples of results, we consider the well-known ring theoretical theorem

$$(*) \quad R^\Delta = R^\lambda \iff Q_r(R, R^\Delta) \text{ is regular} \iff J(R) = (0).$$

This situation is known to become rather complicated if one deals with semigroups  $S$  instead of rings  $R$ , even in the case  $S = S^0$  only investigated so far. Now let  $S$  be any semigroup, and denote by  $O_L$  the set of all left zeros of  $S$ , which may be empty. Defining two (right) singular ideals  $J^*(S)$  and  $J(S)$  of  $S$  such that  $O_L \subseteq J^*(S) \subseteq J(S)$ , we obtain:

$$Q_r(S, S^\lambda) \text{ is regular} \implies J^*(S) = J(S)$$

$$Q_r(S, S^\Delta) \text{ is regular} \implies O_L = J(S)$$

$$O_L = J(S) \text{ and } |O_L| \leq 1 \implies Q_r(S, S^\lambda) \text{ is regular.}$$

In particular, if  $|O_L| \leq 1$  and  $S^\Delta = S^\lambda$ , then  $Q_r(S, S^\Delta)$  is regular iff  $J(S) = O_L$ , and these statements are in fact all of  $(*)$  what remains true for semigroups.

There will appear an article in the Semigroup Forum on this matter, containing also a detailed bibliography.



R. WIEGANDT: Semisimple classes of semigroups with 0

A subclass S of all semigroups with 0 is a semisimple class (in the sense of Kurosh and Amitsur) iff S is closed under extensions and subdirect products and satisfies: (1)

If  $A \in S$ , then every nonzero ideal of A has a nonzero Rees-factor semigroup in S. S is a semisimple class and the upper radical US is hereditary iff S is closed under subdirect product and satisfies (1) and: (2) If L is a large ideal of A and  $L \in S$ , then also  $A \in S$ . It is remarkable that for associative rings the validity of the corresponding characterizations is not known. Further, a hereditary radical R is supernilpotent iff the semisimple class SR is "weakly closed" under Rees-factor semigroups.

Berichterstatter: M. Kunze

