Math. Forschungsinstitut
Oberwolfach
E 20 /01645

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 18/1979

Mathematische Logik

22.4. bis 28.4.1979

Unter der Leitung von E.Specker (Zürich) und W.Felscher (Tübingen) fand in der Woche vom 22.4. bis 28.4.1979 im Forschungsinstitut in Oberwolfach die diesjährige Tagung über Mathematische Logik statt. Es wurden 32 Vorträge über verschiedene Gebiete der Mathematischen Logik gehalten.

Vortragsauszüge

H.BARENDREGT: *Recursion theoretic operators* (together with G.Longo)
An *operator* is a partial map $\Phi : P\omega \longrightarrow P\omega$. Using the Cantor and Scott topologies on $P\omega$ and a notion of effectiveness derived from the lambda calculus model T^{ω}, several classes of operators are defined: Turing-, enumeration- and weak operators. It is proved that

A is recursive in B iff there is a Turing operator Φ s.t. $\Phi(B)=A$
A is r.e. in B iff there is a weak operator Φ s.t. $\Phi(B)=A$
A is enumeration reducible to B iff
there is an enumeration operator Φ s.t. $\Phi(B) = A$
A is truthtable reducible to B iff
there is a total Turing operator Φ s.t. $\Phi(B) = A$

The results are essentially in Rogers' book. Our contribution consists in the natural way in which the operators are defined.

M.BEESON: *A Theory of Constructions and Proofs*
We introduce a theory C of constructions and proofs, intended to serve as an aid to precise discussion of the foundations of intui-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

tionism. The variables range over (partial) constructions. There is a relation App(f,x,y) to express $f(x) \simeq y$. C is arranged so that for each formula A of C, there is a predicate $Prf_A(p,x)$ to mean "p is a proof of A(x)". The axioms of C are in three groups:
(I) combinatorial axioms (II) axioms for $\rightarrow, \forall, \&, \exists$ like

$$Prf_{A\&B}(p,x) \longleftrightarrow Prf_A((p)_0,x) \,\&\, Prf_B((p)_1,x).$$

(III) $A(x) \longleftrightarrow \exists p\, Prf_A(p,x)$

Theorem 1: (i) C is consistent, even with Church's thesis.
(ii) C is equiconsistent with arithmetic.
(iii) C is conservative over HA.

Theorem 2: $C \vdash \neg\forall x,p\, (Prf_\Phi(p,x) \vee \neg Prf_\Phi(p,x))$ for a certain specific Φ.

E.BÖRGER: *Das Entscheidungsproblem für Klassen von Kromformeln mit Identität* (gemeinsam mit S.O.Aanderaa und Yu.Gurevich)

Sei Kr (resp. $Kr^=$) die Klasse aller erststufigen Ausdrücke in konjunktiver Präfixnormalform mit zweistelligen Alternationen ohne (resp. mit) Gleichheit, sei $Q^1 \ldots Q^n$ die Klasse aller abgeschlossenen Ausdrücke ohne Funktionssymbole, deren Präfix die Form $Q^1 x_1 \ldots Q^n x_n$ hat. Wir zeigen:

Satz 1: $\wedge\vee\wedge\vee \cap Kr^=$ ist ein konservativer Reduktionstyp bezüglich Erfüllbarkeit.

Satz 2: $\wedge\wedge\wedge\vee \cap Kr^=$ ist ein Reduktionstyp bzgl. Erfüllbarkeit.

Satz 3: $\wedge\vee\wedge \cap Kr^=$ hat ein rekursiv lösbares Entscheidungsproblem bzgl. Erfüllbarkeit.

Da $\vee^\infty\wedge^\infty$ und $\vee^\infty\wedge\vee^\infty$ - letztere Klasse sogar beim Zulassen eines einstelligen Funktionssymbols, S.Shelah: Decidability of a portion of the predicate calculus, in Israel J.Math.,1977 - ein rekursiv lösbares Entscheidungsproblem haben und $\vee\wedge\vee\wedge \cap Kr$, $\wedge\wedge\vee\wedge \cap Kr$, $\wedge\vee\vee\wedge \cap Kr$, $\wedge\vee\wedge\wedge \cap Kr$ Reduktionstypen sind, ist damit das Präfixproblem für Kromklassen mit Identität mit Ausnahme des Gödel-Kalmar - Schütte - Falles gelöst.

Satz 3 erweitert (und benutzt) das Entscheidbarkeitsergebnis für den Fall ohne = (Aanderaa / Lewis, JSL 1973), Satz 2 kontrastiert zur Entscheidbarkeit von $\vee^\infty\wedge^\infty\vee^\infty \cap Kr$ (s. S.Ju.Maslov, Steklov

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Sem. 1964). *Problem:* Offen bleiben die Entscheidungsprobleme folgender Klassen: $V^{\infty} \wedge^2 V^{\infty}$ und $\wedge V \wedge V^k \cap Kr$ für $k \in N \cup \{\infty\}$ sowie die Frage, ob $\wedge^3 V \cap Kr^{=}$ auch ein konservativer Reduktionstyp ist.

W.BUCHHOLZ: *Eine Bemerkung zur Beweistheorie induktiver Definitionen*

Sei $L[P]$ die Sprache der Arithmetik 1.Stufe erweitert um eine einstellige Prädikatenvariable P. Mit Pos^* bezeichnen wir die Menge aller Formeln aus $L[P]$, die nur mittels $\wedge, \vee, \forall, \exists$ aus Primformeln aufgebaut sind. Det sei die Menge derjenigen Formeln aus Pos^*, in denen $\vee, \exists$ nur in folgender eingeschränkter Weise vorkommen:
$(t = 0 \wedge A) \vee (t \neq 0 \wedge B)$, $\exists x(t(x) = 0 \wedge A(x))$ mit
$HA \vdash t(x_1) \wedge t(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$. Mit Acc^* bezeichnen wir schließlich die Menge aller Formeln $C \in L[P]$ von der Gestalt $A \wedge \forall z(B(z) \rightarrow Pz)$ mit $A \in \Pi^0_2$, $B \in \Sigma^0_1$. Eine Formel $A(P,x) \in L[P]$, die keine freien Variablen außer P,x enthält, und in der P nicht negativ auftritt, nennen wir eine (positive) Abschlußklausel. Ist M eine Menge von Abschlußklauseln, so sei $ID_1(M)$ die intuitionistische Theorie aller induktiven Definitionen P^A mit Abschlußklauseln $A \in M$, d.h.
$ID_1(M) := HA + \{(P^A.1),(P^A.2)\}_{A \in M}$, wobei $(P^A.1)$: $\forall x(A(P,x) \rightarrow Px)$,
$(P^A.2)$: $\forall x(A(F,x) \rightarrow Fx) \rightarrow \forall x(P^A x \rightarrow Fx)$ für jedes F.
(Die P^A $(A \in M)$ sind neue Praedikatskonstanten.) Es gilt:

1. Es gibt eine r-Realisierbarkeitsinterpretation von $ID_1(Pos^*)$ in $ID_1(Det)$. Daraus folgt u.a., daß $ID_1(Pos^*)$ konservativ über $ID_1(Det)$ bzgl. negativer arithmetischer Sätze ist, und daß beide Theorien dieselben beweisbar rekursiven Funktionen und dieselbe beweistheoretische Ordinalzahl haben.
2. Die Mengen Det und Acc^* stimmen bis auf Äquivalenz (in HA) überein.
3. Die Abschlußklausel von Kleene's O gehört gerade zu Acc^*.

Analoge Beziehungen gelten für die Theorien *iterierter* induktiver Definitionen.

G.L.CHERLIN: *$\aleph_0$-categorical Nilrings*

Notation: R = $\aleph_0$-categorical Ring , J = Jacobson radical of R.

Remarks: 1. R/J , J are $\aleph_0$-categorical.

2. J is a nilring of finite exponent.

New notation: J is an $\aleph_0$-categorical nilring.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Theorem: J is nilpotent.

Proof: The commutative case is easiest. The argument uses the finiteness of 3-types (see [1]). The noncommutative case is based on:

Definition: J is *critical* iff J is $\aleph_0$-categorical, nil, and not nilpotent, and in addition contains no subring definable without parameters.

Lemma: Let J be critical of nil-exponent n. Then J satisfies the identity: $x^{n-1}y^{n-1} = (-yx)^{n-1}$.

The noncommutative case then becomes a technical modification of the commutative case, using the finiteness of 6-types.

References:

1. G.Cherlin, $\aleph_0$-categorical nilrings; part I to appear in Algebra Universalis, part II to appear in JSL.
2. A.Macintyre, J.Rosenstein, $\aleph_0$ categoricity for rings without nilpotent elements and for Boolean structures, J.Alg.43(1976),129-154.

D.van DALEN: *DP and ED for intuitionistic analysis*

An analogue of the collection operation for Kripke models is defined for an extended semantics having the worst clauses from the Kripke and Beth semantics plus a variable domain. Interpreting choice sequences as in Beth models it is shown that the collection operation preserves (at least) Induction, AC-NF, BI_M, KS, WC!

As a consequence one gets the disjunction property (DP) and the existential definability property (ED) for Intuitionistic Analysis with choice sequences.

L.van den DRIES: *Solvability of diophantine equations in models of weak systems of arithmetic.*

I will discuss a problem posed by Alex Wilkie: is the set of diophantine equations with integer coefficients having solutions in a model of open induction recursive? A decision method is indicated for equations in 2 variables and homogeneous equations in 3 variables.

H.-D.EBBINGHAUS: *Interpolation in Theorien monotoner Strukturen* (gemeinsam mit M.ZIEGLER)

Eine monotone Struktur $(A;\mu)$ besteht aus einer Struktur A und aus

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

einem monotonen System μ über A. Q^n sei ein n-stelliger Quantor. $Q^n \bar{x}\varphi(\bar{x})$ besage in $(A;\mu)$, daß es ein $U \in \mu$ gibt, so daß $\varphi[\bar{a}]$ in $(A;\mu)$ gilt für alle $\bar{a} \in U^n$. Für eine Klasse K monotoner Strukturen bedeute $\models_K \varphi$, daß φ in allen Expansionen von monotonen Strukturen aus K gilt. Wir zeigen, daß für Klassen K, die in Zieglers Sprache L_{mon} durch Sätze einer gewissen syntaktischen Gestalt axiomatisierbar sind, in $L_{\omega\omega}(Q^n)$ der Interpolationssatz für $\models_K$ gilt. Hierzu gehören z.B. die Klassen der monotonen Systeme ($n = 1$: Makowsky, Tulipani), Filter, topologische Gruppen. Gegenbeispiele legen dar, daß die Ergebnisse scharf sind. Die Beweismethode läßt sich leicht auf verwandte Semantiken ausdehnen; sie liefert dann z.B. Interpolation für die Klasse der uniformen Räume und verallgemeinert Ergebnisse von Makowsky, Sgro und Ziegler über die Logiken $L_{\omega\omega}(I^n)$ mit "interior quantifier" I^n. Für die Klasse der Ultrafilter gelten Kompaktheit und Interpolation in $L_{\omega\omega}(Q^n)$ genau für $n = 1$.

E.ENGELER: *Algorithmische Logik*

Let $A \neq \emptyset$ and B the smallest set $\supseteq A$ with $(\alpha \to b) \in B$ for all finite $\alpha \subseteq B$ and $b \in B$. For $M,N \subseteq B$ define $M \cdot N = \{b : \exists \alpha \subseteq N . \alpha \to b \in M\}$ and let $A^\bullet$ be the power-set of B furnished with this operation.

Theorem: (1) $A^\bullet$ is a combinatorial algebra.

(2) Every algebra with only one binary operation $*$ is a subalgebra of some $A^\bullet$.

(3) Each $A^\bullet$ can be expanded to a model of the $\lambda\beta$-calculus.

Proofs: For (1) define $K = \{\sigma \to (\rho \to s) : \sigma,\rho \subseteq B , s \in \sigma\}$,

$S = \{(\tau \to (\{r_1,\dots,r_n\} \to s)) \to (\{\sigma_1 \to r_1,\dots,\sigma_n \to r_n\} \to (\sigma \to s)) :$

$n \geq 1,\ r_1,\dots,r_n \in B ,\ \tau \cup \bigcup \sigma_i = \sigma \subseteq B\}$, and verify.

The representation theorem (2) is obtained by embedding $A = \langle A , * \rangle$ in $A^\bullet$ with f defined for $a \in A$ by $f(a) = \bigcup_i f_i(a)$, where $f_0(a) = \{a\}$, $f_{i+1}(a) = f_i(a) \cup \{\alpha \to y : \exists b \in A . b \in \alpha \subseteq f_i(a) \wedge y \in f_i(a*b)\}$.

U.FELGNER: *Modelltheorie der FC-Gruppen*

Eine Gruppe G wird FC-Gruppe genannt, falls jedes Element $g \in G$ nur endlich viele Konjugierte in G besitzt, wenn also G Normalteiler in jeder Ultrapotenz G^ω/F ist. Die Theorie 1.Stufe der FC-Gruppen wurde mit der Theorie der abelschen Gruppen, der endlichen Gruppen und der BFC - Gruppen verglichen. Die Frage, bis zu

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

welcher Quantoren - Komplexität die jeweiligen Theorien übereinstimmen, wurde ausführlich beantwortet. Andere Resultate betrafen Unentscheidbarkeit, $\aleph_0$- und $\aleph_1$ - Kategorizität und Definierbarkeit von Untergruppen.

K.GLOEDE: *Bemerkungen zur ACKERMANNschen Mengenlehre*
ACKERMANN hat 1956 ein System der Mengenlehre A^* eingeführt, das - nach Ergebnissen von LEVY und REINHARDT - dieselben Aussagen über Mengen zu machen gestattet wie das System ZF. Mit Hilfe von Begriffen, die auf ALKOR und GREWE zurückgehen, wird gezeigt, daß ZA in A^{**} ($= A^* +$ Fundierungsschema) interpretierbar ist, woraus ein einfacherer Beweis (einer Abschwächung) des REINHARDTschen Ergebnisses folgt:

$ZF \vdash \sigma \Rightarrow A^{**} \vdash \sigma^V$ für Sätze der ZF - Sprache.

Weiterhin wird eine Erweiterung AS^{**} (analog einer Axiomatisierung von ZF nach SCOTT) eingeführt, in welcher die ZF - Axiome, relativiert nach V, direkt ableitbar sind, während die beim obigen (wie beim REINHARDTschen Beweis) erforderlichen metamathematischen Hilfsmittel erst dann benötigt werden, wenn man nachweisen will, daß AS^{**} in A^{**} interpretierbar ist. In AS^{**} kann man außerdem verschiedene innere Modelle von ZA definieren (entsprechend den inneren Modellen L und HOD im Falle von ZF).

R.GÖBEL: *Reflexive Moduln in V = L*
Sei S ein fester R - bimodul und $X^* = \mathrm{Hom}_R(X,S)$ für einen R - rechtsmodul X. Dann heiße X S - reflexiv, wenn der kanonische Homomorphismus $X \longrightarrow X^{**}$ ein Isomorphismus ist. Wir beweisen den folgenden *SATZ:* Seien X und Y S-reflexiv und sei jeder Untermodul von X^* projektiv. Falls $0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow G \longrightarrow 0$ exakt ist, gibt es einen direkten Summanden D von Y und einen R - linksmodul A derart, daß $K \cong A^*$ und $G \cong D \oplus \mathrm{Ext}_R(A,S)$.
Ein Spezialfall dieses Satzes umfaßt Shelah's Lösung des Whiteheadproblems unter V = L: Für G sind äquivalent:

(1) $0 \longrightarrow Z^I \longrightarrow Z^J \longrightarrow G \longrightarrow 0$

(2) $G \cong Z^L \oplus H$, wobei $|L| \leq |J|$ und H kompakt [also nach Hulanicki explizit bestimmt] ist.

Publikation: M.Dugas und R.G.: Math.Zeitschr.(1979), Fundamenta Math.(1979)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

R.J.GRAYSON: *Applications of Sheaf Models to Constructive Analysis and Topology*

Complete Heyting algebra - valued models provide a general framework for modelling higher-order intuitionistic theories. The set X_T of partial continuous functions from a space T to a space X can be given structure as an $\mathcal{O}(T)$-valued topological space; the case $\mathbb{R}_T$ acts as the space of (Dedekind) reals. Thus we have a nice class of models for investigating constructive analysis and topology; for full generality, however, one needs to consider non-topological complete Heyting algebras.

P.HAJEK: *Partiell konservative Erweiterungen der Peano - Arithmetik*

PA ist die Peano - Arithmetik. Eine Formel φ von PA ist Σ_n^0 - konservativ, wenn für jede Σ_n^0-Formel ψ aus $PA \vdash \varphi \to \psi$ schon $PA \vdash \psi$ folgt. Analog für Π_n^0. (Guaspari.) Eine Formel φ ist Σ_1^0 - konservativ genau dann, wenn $(PA + \varphi)$ in PA interpretierbar ist; φ ist Π_1^0 - konservativ genau dann, wenn φ schneidbar ist, d.h. jedes abzählbare Nichtstandardmodell M von PA hat ein Segment $I \subseteq_e M$ sodaß $I \models (PA + \varphi)$ (Guaspari). φ heiße stark schneidbar, wenn für jedes abzählbare Nichtstandardmodell $M \models PA$ und jedes $a \in M$ es ein $I \subseteq_e M$ gibt derart, daß $a \in I$ und $I \models (PA + \varphi)$.

Satz: φ ist stark schneidbar genau dann, wenn φ Π_2^0 - konservativ ist.

Es werden alle geltenden Abhängigkeiten zwischen den Begriffen "beweisbar, wahr, stark schneidbar, schneidbar, interpretierbar, konsistent" gefunden.

G.HESSE: *Einige Anwendungen der small-cancellation-Theorie*

Eine Gruppe G heißt κ-ungebunden, wenn zu jeder Teilmenge U von $G * \langle x \rangle$ ($\langle x \rangle$ unendlich zyklisch) mit $|U| < \kappa$ und $e \notin U(e)$ ein $a \in G - \{e\}$ existiert mit $e \notin U(a)$. Nach K.-P.Podewski gilt folgende Implikationskette: G $|G|$-ungebunden $\Rightarrow$ G hat $2^{2^{|G|}}$-viele Hausdorff-Topologien $\Rightarrow$ G hat eine nichtdiskrete Hausdorff-Topologie $\Rightarrow$ G $\aleph_0$-ungebunden. Mit Hilfe der von P.Schupp entwickelten small-cancellation-Theorie für freie Produkte mit amalgamierter Untergruppe lassen sich Gegenbeispiele der Kardinalität $\aleph_1$ konstruieren,

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

die zeigen, daß keine der Umkehrungen richtig ist. Dabei muß man im 2.Fall " $2^{2^{\aleph_0}} \neq 2^{2^{\aleph_1}}$ " voraussetzen. S.Shelah konstruierte auf ähnliche Weise in ZFC + CH eine Gruppe der Kardinalität $\aleph_1$, die außer den trivialen Topologien keine weitere besitzt.

H.R.JERVELL: *The foundational crisis around the turn of the century*

This is a historical lecture showing that the foundational crisis around the turn of the century was *not* about the set theoretical paradoxes but about Zermelos proof of the well-ordering theorem. In particular we trace both Zermelos axiomatization of set-theory and Brouwers choice-sequences back to discussions about the proof of the well-ordering theorem.

H.KLEINE BÜNING: *Unentscheidbare Klassen von Groupoiden mit monadischen Prädikaten*

Garfunkel/Schmerl haben gezeigt, daß die Klasse $(B,\circ,=,P^{(1)})$ der Logik 1.Stufe unentscheidbar in Bezug auf Erfüllbarkeit ist, wobei B ein Groupoid, "$\circ$" die zweistellige Operation und P ein monadisches Prädikatensymbol ist. Es wird nun die Klasse $(B,\circ,P^{(1)})$ [ohne "="] betrachtet. Mit $\Lambda(B,\circ,P^{(1)}) \cap Hf^n$ wird die Klasse der n-stelligen universellen Hornformeln aus $(B,\circ,P^{(1)})$ bezeichnet. Es wird gezeigt, daß $\Lambda(B,\circ,P^{(1)}) \cap Hf^2$ unentscheidbar ist für B endlich erzeugte abelsche Gruppe und für $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$ [$\cdot$ Multiplikation] und daß $(B,\circ,P_1^{(1)},\ldots,P_6^{(1)})$ unentscheidbar ist für $B \in \{\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ und $\circ$ = "+" oder = "$\cdot$".

P.H.KRAUSS: $\aleph_0$-*Categrocity in Quasi Primal Varieties* (together with D.M.Clark)

If $\mathcal{B} \subseteq A^I$ is a sub-Boolean power of A, let $A(\mathcal{B}) = \langle F,\cup,\cap,\bar{\ },\hat{x}_1\rangle_{1<r}$ be the corresponding augmented Boolean algebra of clopen sets.

Theorem: Suppose A is a homogeneous quasi primal algebra with a unique minimal subalgebra A_0 which is non-trivial. Suppose $a \in A_0$ such that for each $C \subseteq A$ there exists a unary term τ where for all $c \in A$, $c \in C$ iff $\tau^{A}(c) = a$. Then every countable $\mathcal{B} \in \mathbb{V}A$ (the variety generated by A) is isomorphic to a sub-Boolean power of A and a countable $\mathcal{B} \in \mathbb{V}A$ is $\aleph_0$-categorical iff $A(\mathcal{B})$ is $\aleph_0$-categorical.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Example (Macintyre and Rosenstein): Let $A = \langle F,+,-,0,\cdot,1\rangle$ be a field with p^m elements. Take $A_0 = \{0,1\}$, $a = 0$ and for each $1 \leq i \leq m$ take $\tau(x) = x^{p^i} - x$.

P.PÄPPINGHAUS: *Ein Färbungsalgorithmus für Graphen von beschränktem Eckengrad*

Sei $n \geq 2$ und G ein unendlicher, zusammenhängender Graph vom Eckengrad $\leq n$. Dann gibt es eine zulässige Färbung der Ecken von G mit n Farben. Dies ist der Satz von Brooks für unendliche Graphen. Es gilt folgende rekursive Verschärfung: Ist G stark rekursiv, so gibt es eine rekursive n - Färbung. (Ein Graph heißt stark rekursiv, wenn es eine rekursive Funktion gibt, die jeder Ecke einen Code ihrer Nachbarecken zuordnet.)
Der Beweis dieses Satzes für $n \geq 4$ wurde in dem Vortrag skizziert.

W.POHLERS: *Lokale Prädikativität*

Die Darstellung des kleinsten Fixpunkts einer induktiven Definition $\Gamma_\varphi : P\omega \longrightarrow P\omega$ in Schichten $I^\xi_\varphi = \Gamma(\bigcup_{\eta<\xi} I^\eta_\varphi)$ ist lokal prädikativ, d.h. prädikativ in jedem Definitionsschritt. Erst die Iteration entlang einer imprädikativen Wohlordnung macht $I_\varphi = \bigcup_{\xi<\omega_1 ck} I^\xi_\varphi$ zu einer imprädikativen Menge. Diese Tatsache wird benützt um ein Schnitteliminationsverfahren für infinitäre Systeme zu entwickeln, in die die formalen Theorien iterierter induktiver Definitionen eingebettet werden können. Das gleiche Verfahren läßt sich auf infinitäre Systeme für die konstruktible Hierarchie anwenden, die ja auch lokal prädikativ definiert ist. Damit erhält man eine uniforme und leistungsfähige Methode zur Bestimmung oberer Grenzen für Teilsysteme der Analysis und Mengenlehre. So ergibt sich z.B. das neue Ergebnis $|(\Sigma^1_2 - AC)+BI| \leq \theta\varepsilon_{I+1}0$ wobei I für die erste rekursiv unerreichbare Ordinalzahl steht.

W.RAUTENBAERG: *Splittings of Minimal logic*

Splitting a lattice is a kind of "omitting a model" argument and provides a powerfull tool in the investigation of certain lattices. We are concerned with the lattice J of extensions of JOHANSSON's minimal logic L_J which has first been studied by means of KRIPKE-semantics by K.SEGERBERG. J is considerably larger than the well-investigated lattice H of extensions of intuitionistic logic L_i

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

(intermediate logics). A basic fact is, that each finite initial KRIPKE-frame for L_j splits J. Among other things we give a lattice theoretic explanation for the preference of L_i among numerious extensions of L_j. Straight-forward applications of splittings are various axiomatization criteria. These are delightful model theoretic tests to decide the question wether the addition of a formula to a given logic axiomatizes another given logic. Based on splittings we shall give a complete analysis of the upper part of J, including tabular and pretabular extensions of L_j. J contains exactly 7 pretabular logics, i.e. there are 7 critical varieties of BROUWER-algebras.

J.REINEKE: *Algebraisch abgeschlossene Ringe*

Sei T_0 die Theorie aller kommutativen Ringe mit 1. Sei T eine Theorie in einer abzählbaren Sprache. T heiße nice non-comp. Theorie, falls gilt: 1) $T_0 \subseteq T$

2) $R \models T$, $a \in R \Rightarrow R[x]/_{(ax)} \models T$

3) $T = T_\forall$

Theorem 1: Sei T eine nice non-comp. Theorie. Dann besitzt T keinen Modellbegleiter.

Theorem 2: Sei T eine nice non-comp. Theorie. Dann existiert ein $\forall_3$ - Satz, der in allen endlich generischen Modellen von T und dessen Verneinung in allen unendlich generischen Modellen von T gilt.

RUCKER: *The Continuum Problem and Scales of Theories*

An ordering <M,<> admits a scale if it has a cofinal subset well-ordered by <. We consider the set NTh of all theories having a natural model V_α. The members of NTh thus represent possible conceptions of the class of all sets. We order NTh by the relation $S < T$ iff T defines a natural model of S.

THM: (ZF + V = OD) $2^{\aleph_0} = \aleph_1 \iff$ <NTh,<> admits a scale.

It can be argued that this condition is rather plausible if the universe of set theory is to be rationally intelligible; but on the other hand, perhaps the universe should *not* be rationally intelligible.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

U.SCHMERL: *Anwendungen iterierter Reflexionsformeln und ihrer Feinstruktur*

Mit Hilfe von Reflexionsprinzipien können über formalen arithmetischen Systemen T Hierarchien von immer stärkeren Erweiterungen von T gebildet werden. Dabei kann bei jedem Iterationsschritt entweder das volle Reflexionsschema oder aber auch nur das Reflexionsschema für eine bestimmte Π-Klasse von Formeln hinzugenommen werden. Für diese komplexitätsgebundenen Hierarchien über einem Basissystem T gelten für einige T charakteristische Feinstrukturrelationen, die Systeme verschiedener Komplexitäts- und Iterationsgrade bezgl. der Beweisbarkeit von Formeln gleicher Π-Klassen miteinander in Beziehung setzen; diese Relationen wurden zuerst von J.-Y. GIRARD vermutet.

Durch Vergleich der Hierarchien und ihrer Feinstruktur mit anderen beweistheoretischen Konzepten wie Induktion, transfiniter Induktion, Konsistenz, ω-Regel etc. ergibt sich eine Reihe interessanter Anwendungen.

H.SCHWICHTENBERG: *Infinite Terms and Recursion Schemata*

Infinite terms are used for analysing recursion schemata. This leads

1. to a natural notion of ordinal length of computations, and
2. to a uniform and simple method for comparing different recursion schemata. Extensions of these considerations to recursion schemata of higher types and to intuitionistic proofs are discussed.

G.SUNDHOLM: *A formalisation of Gentzen's original consistency - proof*

Gentzen's original version of his consistency-proof (Archiv f.M.L. Vol.16) is analysed as a functional - interpretation. An ordinal - estimate is given and it is shown that each provable sequent in the natural deduction - system for PA has an ε_0 - recursive "Reduktionsvorschrift". This gives a proof of CON_{PA} in PRA plus quantifier - free transfinite recursion up to ε_0. Similarly an easy proof of $\vdash$ consistency by means of $TR(\varepsilon_0)$ is obtained.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

L.W.SZCZERBA: *Means of elementary interpretations*

An interpretation is a functor from a subcategory of a category of structures of a given signature (morphisms are usual isomorphisms of structures) into a category of structures with (maybe another) signature. It will be given a characterisation of those functors which are interpretations.

The characterisation will be used to study the classification of interpretation according to need of usage of the following means:

a) defining new relations
b) taking n-tuples as elements of the new universe
c) restricting of universe
d) introducing new equality
e) use of parameters in definitions.

A.S.TROELSTRA: *Intuitionistic extensions of real numbers*

Starting from the notion of a Dedekind cut, two weakenings of $\mathbb{R}$ are introduced, $\mathbb{R}^e$ and $\mathbb{R}^{ee}$, with $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^e \subset \mathbb{R}^{ee}$. Where $\mathbb{R}$ is the metric completion of $\mathbb{Q}$ (the set of rationals), $\mathbb{R}^e$ is the unique order-completion of $\mathbb{Q}$ (each bounded set of elements of $\mathbb{R}^e$ has a least upper bound in $\mathbb{R}^e$; in $\mathbb{R}^{ee}$, each weakly bounded set has a least upper bound). Arithmetic on reals can be extended to $\mathbb{R}^e$, $\mathbb{R}^{ee}$ without problems, but there is no apartness relation. Under the Gödel negative translation $x \in \mathbb{R}$ translates into $x \in \mathbb{R}^{ee}$ which explains the principal properties of $\mathbb{R}^{ee}$. $\mathbb{R}^{ee}$ and $\mathbb{R}^e$ can be successfully used to reproduce classical phenomena (such as the existence of irreflexive Banach spaces) within a constructive framework. Addition of typically intuitionistic axioms or Church's thesis gives interesting phenomena of which we cite one:

if $\neg\forall A\,(\neg A \vee \neg\neg A)$ (A ranges over propositions), then all mappings $f : \mathbb{R}^e \longrightarrow \mathbb{R}$ are constant.

S.WAINER: *Recursion in Continuous Functionals and R.E.Constructions*

We study Kleene recursion in "non - normal" functionals F. The results are given for F of type 2, but they have appropriate generalizations to all higher types. [Normann & Wainer, "The 1-section of a countable functional", to appear in JSL]. A non - normal F is

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

continuous on 1-sc(F).

Theorem: Associate with F the real $h(s) = F(\lambda x.s_x)$. Then for each $\{e\}^F \in$ 1-sc(F) there is a primitive recursive - in - h sequence s_i of finite approximations to $\{e\}^F$, and an h - r.e. set $D_e = \{\langle x,n\rangle \mid \exists m > n\ (s_n(x) \neq s_m(x))\}$ such that $\{e\}^F = \lim s_i$ and $\{e\}^F \leq_T (h, D_e) \leq_K F$. Thus 1-sc(F) is generated by the Π^1_1 - in - h collection of h - r.e. sets D_e.

Theorem: F acts like a "jump" from h - r.e. sets to h - r.e. sets. There is an everywhere continuous h - enumeration operator J_F, of Kalmar rank $\leq\omega$, with 1-sc(J_F) = 1-sc(F).

RE constructions can, in a natural way, be regarded as enumeration operators, of exactly the same form as the J_F's. Thus "recursion in non-normal type-2 objects" is the theory of "effectively iterated RE constructions".

V.WEISPFENNING: *Induzierte Garbendarstellungen definierbarer Strukturen*

Seien L,L' Sprachen 1.Stufe, Σ eine Klasse von L-Strukturen, Σ' eine Klasse von L'-Strukturen, beide abgeschlossen unter Isomorphismen, und sei H eine Formelmenge in L. Dann heiße eine Zuordnung $\Sigma \ni A \overset{'}{\longmapsto} A' \in \Sigma'$ *schwach H-definierbar*, falls - grob gesprochen - A' in A kodiert werden kann durch eine Menge von Äquivalenzklassen endlicher Folgen von Elementen aus A, die H - definierbar ist, und falls atomare Relationen auf A' durch die Gültigkeit gewisser H - Formeln in A kodiert werden können. $\overset{'}{\longmapsto}$ heiße *H-definierbar* vom *Rang n*, falls zusätzlich die Länge n der kodierenden Folgen fixiert ist. Die Zuordnung heiße *treu*, falls alle Äquivalenzklassen einelementig sind.

Es wird gezeigt, daß eine solche Zuordnung $\overset{'}{\longmapsto}$ eine entsprechende Zuordnung $\overset{=}{\longmapsto}$ zwischen gewissen Klassen von globalen Schnitten in Garben von L-Strukturen mit Halmen in Σ und der Klasse der globalen Schnitte in Garben von L'-Strukturen mit Halmen aus Σ' induziert. Das Ergebnis läßt sich am besten präzisieren im Rahmen der die algebraische Garbentheorie umfassenden Theorie der Verbandsprodukte (siehe Weispfenning, 'Lattice products' Proc.Logic Symp. Mons 1978).

SATZ. Sei $\Sigma \longrightarrow \Sigma'$ (schwach) H-definierbar (und Σ elementar). Sei Δ eine Klasse von H-globalen Verbandsprodukten von Strukturen in Σ,

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

die das ∞-starke globale Flickprinzip erfüllen, und sei Δ^- die Klasse aller globalen Verbandsprodukte von Σ'-Strukturen. Dann existiert eine Zuordnung $\Delta \ni A \mapsto A^- \in \Delta^-$, derart daß

(i) Falls A glob. Verbandsprod. über (I,L), dann ist A^- globales Verbandsprodukt über (I,L).

(ii) Die Faktoren A_i^- von A^- sind isomorph zu $(A_i)'$.

(iii) A^- erfüllt das ∞-starke globale Flickprinzip (für Familien von beschränktem Rang).

ZUSATZ 1. Ist zudem $\mapsto'$ treu und sind die Einschränkungen über die kodierenden Folgen in $\mapsto'$ trivial *oder* erfüllen alle $A \in \Sigma$ das $\dot{3}$-starke globale Flickprinzip, so kann in dem Satz das ∞-st. glob. Flickprinzip durch das ∞-glob. Flickprinzip ersetzt werden.

ZUSATZ 2. Ist $H = \exists \wedge At$, so stimmt die Definition von $\mapsto$ formal (bis auf Isomorphie) überein mit der von $\mapsto'$.

Als Anwendungen ergeben sich insbesondere die Resultate von Burris & Werner (1976) über die Darstellung der Gruppen GL_n, SL_n, PSL_n über Ringen, die eine boolesche Produktdarstellung besitzen sowie die wesentlichen Resultate über algebraische Kurven über komm. regulären Ringen von Saracino - Weispfenning (1975), Springer Lecture Notes 498.

K.WOLFSDORF: *Polarisierte Partitionsrelationen und große Kardinalzahlen*

Es wird die Gültigkeit der Relation $\binom{\kappa}{\kappa^+} \to \binom{\kappa}{\kappa}$ für große Kardinalzahlen κ untersucht. Ferner wird eine äquivalente Formulierung für "schwach kompakt" vorgetragen.

M.ZIEGLER: *Topologische Vektorräume*

Wir untersuchen elementare Eigenschaften ($= L_t$ - Eigenschaften) topologischer Vektorräume. Es gilt: Zwei reelle lokalbeschränkte Vektorräume sind genau dann elementar äquivalent, wenn sie die gleiche endliche Dimension haben oder beide von unendlicher Dimension sind.

Die (vollständige) Theorie dieser Vektorräume (fester Dimension) kann einfach axiomatisiert werden, im wesentlichen durch eine elementare Version des Lemmas von Riesz.

Ähnlich kann man lokal - beschränkte VRe mit ausgezeichnetem Unterraum behandeln. Weitere Ergebnisse gehen über VRe mit V - topolo-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

gischen Körpern als Skalarkörper, lineare stetige Abbildungen und duale Paare. Diese Sätze sind in der geplanten Dissertation von Herrn Sperrschneider (Karlsruhe) enthalten und wurden teilweise gemeinsam gefunden.

Berichterstatter: J.Schulte Mönting , Tübingen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Liste der Tagungsteilnehmer

Baer, Prof.Dr.Dr. R. , Neuhausstr.10, CH - 8044 Zürich
Barendregt, Prof.Dr. H. , Math.Inst., Budapestlaan 6,
3508 TA Utrecht, Niederlande
Beeson, Prof.Dr. M. , Math.Inst., Wegelerstr.6, D - 3500 Bonn
Börger, Prof.Dr. E. , Tannenhofallee 23 i , D - 4400 Münster
Buchholz, Doz.Dr. W. , Inst.f.Math., Theresienstr.39, D - 8000 München 2
Carstens, Prof.Dr. H.G. , Asternstr.47 , D - 3000 Hannover 1
Cherlin, Prof.Dr. G.L. , Dept.of Math., Rutgers Univ.,
New Brunswick, NJ 08903, USA
van Dalen, Prof.Dr. D. , Math.Inst., Budapestlaan 6,
3508 TA Utrecht, Niederlande
Diener, Doz.Dr. K.H. , Math.Inst.d.Univ.Köln, Weyertal 86 - 90,
D - 5000 Köln 41
Diller, Prof.Dr. J. , Inst.f.math.Logik, Roxeler Str.64, D - 4400 Münster
van den Dries, Dr. L. , Math.Inst., Budapestlaan 6,
3508 TA Utrecht, Niederlande
Ebbinghaus, Prof.Dr. H.-D. , Abt.f.math.Logik, Albertstr.23 b ,
D - 7800 Freiburg
Engeler, Prof.Dr. E. , ETH - Zentrum, CH - 8092 Zürich
Felgner, Prof.Dr. U. , Math.Inst.d.Univ., Auf der Morgenstelle 10,
D - 7400 Tübingen
Felscher, Prof.Dr. W. , Math.Inst.d.Univ., Auf der Morgenstelle 10,
D - 7400 Tübingen
Gloede, Prof.Dr. K. , Math.Inst., Im Neuenheimer Feld 288, D - 6900 Heidelberg
Göbel, Prof.Dr. R. , FB 6 , Math., Univ. Essen GHS, Universitätsstr.13
D - 4300 Essen
Grayson, Dr. R.J. , Math.Inst., Roeterstraat 15, Amsterdam, Niederlande
Hajek, Doz.Dr. P. , Math.Inst., CSAV, 11567 Prague, Žitná 25,
Czechoslovakia
Hesse, Dr. G. , Inst.f.Math.d.Univ.Hannover, Welfengarten 1,
D - 3000 Hannover
Hoering, Prof.Dr. W. , Phil.Seminar, Alte Burse, D - 7400 Tübingen
Jervell, Prof.Dr. H.R. , Math.Inst.d.Univ.München, Theresienstr.39,
D - 8000 München 2
Kleine Büning, Dr. H. , Inst.f.math.Logik, Univ.Münster,
Roxeler Str.64, D - 4400 Münster

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Krauss, Prof.Dr. P. , GhK, Fachbereich 17, Heinrich - Plett - Str. 40,
D - 3500 Kassel

Läuchli, Prof.Dr. H. , Math.Seminar, ETH - Zentrum, CH - 8092 Zürich

Luckhardt, Prof.Dr. H. , Math.Seminar, Robert - Mayer - Str. 6 - 10,
D - 6000 Frankfurt a.M.

Müller. Prof.Dr. G.H. , Math.d.Univ.Heidelberg, Im Neuenheimer Feld,
D - 6900 Heidelberg

Päppinghaus, Dr. P. , Inst.f.Math., Welfengarten 1, D - 3000 Hannover 1

Pfeiffer, Prof.Dr. H. , Inst.f.Math., Welfengarten 1, D - 3000 Hannover 1

Pohlers, Doz.Dr. W. , Inst.f.Math., Theresienstr.39, D - 8000 München 2

Potthoff, Prof.Dr. K. , Philosophisches Seminar d.Univ.,
Ohlhausenstr. 40 - 60, D - 2300 Kiel

Prestel, Prof.Dr. A. , Fachbereich Math., Universität, D - 7750 Konstanz

Rautenberg, Prof.Dr. W. , II.Math.Inst., Königin - Luise - Str.24,
D - 1000 Berlin 33

Reineke, Doz.Dr. J. , Math.Inst. TU Hannover, Welfengarten 1,
D - 3000 Hannover 1

Richter, Prof.Dr. M.M. , Lehrst.f.Angew.Math.insbes.Informatik,
Technische Hochschule, Templergraben 64, D - 5100 Aachen

Rucker, Prof.Dr. R.v.B. , Math.Inst.d.Univ.Heidelberg,
Im Neuenheimer Feld, D - 6900 Heidelberg

Schmerl, Dr. U. , Math.Inst.d.Univ., Theresienstr.39, D - 8000 München 2

Schulte Mönting, Dr. J. , Math.Inst.d.Univ., Auf der Morgenstelle 10,
D - 7400 Tübingen

Schwabhäuser, Prof.Dr. W. , Inst.f.Informatik, Univ.Stuttgart,
Azenbergstr.12, D - 7000 Stuttgart 1

Schwichtenberg, Prof.Dr. H. , Math.Inst.d.Univ., Theresienstr.39,
D - 8000 München 2

Specker, Prof.Dr. E. , Math.Seminar, ETH - Zentrum, CH - 8092 Zürich

Sundholm, Dr. G. , Math.Inst., 24 - 29 St.Giles, Oxford, England

Szczerba, Prof.Dr. L.W. , Zakład.Matematyki Universitetu Warszawskiego
Filia w Białymstoku, Akademicka 2, Białystok, Poland

Troelstra, Prof.Dr. A.S. , Math.Inst., Roeterstraat 15, Amsterdam,Niederlande

Volger, Doz.Dr. H. , Math.Inst.d.Univ.Tübingen, Auf der Morgenstelle 10,
D - 7400 Tübingen

Wainer, Prof.Dr. S. , School of Mathematics, The University,
Leeds L32 9JT, England

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Weispfenning, Prof.Dr. V. , Math.Inst.d.Univ.Heidelberg,
Im Neuenheimer Feld 288, D - 6900 Heidelberg
Wolfsdorf, Dr. K. , Fachbereich Mathematik, Technische Universität,
Hardenbergstr. 4/6 , D - 1000 Berlin
Ziegler, Prof.Dr. M. , Fachbereich Mathematik, Techn.Univ.,
Hardenbergstr. 4/6 , D - 1000 Berlin

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©