MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 32/1979

Anwendung automorpher Funktionen auf Zahlentheorie

29.7. bis 4.8.1979

Die Tagung wurde von den Herren L. Goldstein (College Park, Maryland), C. Meyer (Köln) und W.H. Petersson (Münster) geleitet.

In ausführlichen Vorträgen wurde über neue Entwicklungen auf dem Gebiet der automorphen Funktionen und der mit ihnen zusammenhängenden Dirichletreihen berichtet. Als Anwendung auf die Zahlentheorie ergaben sich unter anderem Aussagen über Ganzheitsbasen, Klassenzahlen, Darstellungsanzahlen quadratischer Formen und zum Hilbertschen Klassenkörperkonstruktionsproblem. Anregende Diskussionen führten zu weiteren, fruchtbaren Vorträgen in kleinerem Kreis.

Teilnehmer

Berndt, Rolf	Hamburg
Böcherer, Siegfried	Freiburg
Bruggeman, Roelof	Ysselstein
Cohen, David	Boston
Cohen, Henri	Grenoble
Cohn, Harvey	New York

Deninger, Christopher	Köln
Deuring, Max	Göttingen
Elstrodt, Jürgen	Münster
Fröhlich, Albrecht	London
van der Geer, Gerard	Amsterdam
Goldfeld, Dorian	Cambridge/Mass.
Goldstein, Larry	Maryland
Grosswald, Emil	Philadelphia
Gundlach, Karl-Bernhard	Marburg
Halbritter, Ulrich	Köln
Herrmann, Oskar	Heidelberg
Jehne, Wolfram	Köln
Kann, Carl-Hermann	Köln
Koecher, Max	Tecklenburg
Kramer, David	Maryland
Kulle, Rolf-Dieter	Göttingen
Lang, Heinrich	Münster
Maaß, Hans	Heidelberg
Mennicke, Jens	Bielefeld
Meyer, Curt	Köln
Petersson, W. Hans	Münster
Pohst, Michael	Köln
Resnikoff, H.L.	Washington
Schertz, Reinhard	Köln
Schoeneberg, Bruno	Norderstedt
Stark, Harold	Cambridge/Mass.
Sunley, Judith	Washington
Terras, Audrey	San Diego
Wohlfahrt, Klaus	Heidelberg
Zagier, Don	Maryland

Vortragsauszüge

R. BERNDT:

Über einige automorphe Funktionen auf $\mathbb{C}\times\mathfrak{H}$

Für eine Untergruppe $\Gamma\subset SL(2,\mathbb{Z})$ bezeichne

$$G := \mathbb{Z}^2 \ltimes \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & l_1 & l_2 \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} : \begin{array}{l} l_1, l_2 \in \mathbb{Z} \\ \alpha\in\Gamma \end{array} \right\}$$

und

$\mathcal{F}_G$ den Körper der Funktionen f mit

1.) f meromorph auf $\mathbb{C}\times\mathfrak{H}$

2.) f ist G-invariant, d.h.

$f(v+l_1\omega+l_2,\omega) = f(v,\omega)$ für alle $l_1, l_2\in\mathbb{Z}$ und $(v,\omega)\in\mathbb{C}\times\mathfrak{H}$

$f(\frac{v}{c\omega+d},\alpha(\omega)) = f(v,\omega)$ " " $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$

3.) f hat in allen Spitzen von Γ meromorphe q_N-Entwicklung, d.h.

$$f(v,\omega) = \sum_{n>-\infty} b_n(f)q_N^n \quad \text{mit} \quad b_n(f)\in\mathbb{Q}(\zeta_N,\varepsilon),\ \varepsilon = e^{2\pi i\omega}$$

$$q_N = e^{\frac{2\pi i\omega}{N}},\quad \zeta_N = e^{\frac{2\pi i}{N}},\ N = \text{Stufe von } \Gamma,$$

für $\operatorname{Im}\omega$ groß genug (entsprechend für die übrigen Spitzen).

Es werden die folgenden beiden Sätze bewiesen

<u>Satz 1:</u> Für $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ gilt

$$\mathcal{F}_G = \mathbb{Q}(j,z) \quad \text{mit} \quad z = -2^7 3^5 \frac{g_2 g_3}{\Delta}\wp .$$

<u>Satz 2:</u> Für $\Gamma = \Gamma_{12}$, die Invarianzgruppe von $\sqrt[12]{\Delta}$, gilt

$$\mathcal{F}_G = \mathbb{Q}(\zeta_{12},\gamma_2,\gamma_3,x,y) \quad \text{mit} \quad \gamma_3 = \sqrt[2]{j-12^3}\ ;\quad \gamma_2 = \sqrt[3]{j}\ ,$$

$$x = 12\frac{\wp}{\sqrt[6]{\Delta}}\ ,\quad y = \frac{\wp'}{\sqrt[4]{\Delta}}\ ,$$

also $\gamma_3^2 = \gamma_2^3 - 12^3$; $3\cdot 12^2 y^2 = x^3 - 3\gamma_2 - \gamma_3$.

Es wird auf naheliegende Verallgemeinerungen für die Fälle der Kongruenzuntergruppen $(N\mathbb{Z}^2)\propto\Gamma(N)$ sowie der Operation von $\mathbb{Z}^r\propto Sp(2r,\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{C}^r \times \mathcal{G}_r$ hingewiesen sowie auf die Frage nach dem Zahlkörper $K_?$, für den gilt

$$f \in \mathcal{F}_G \text{ holomorph in } (v,\omega)\text{, elliptischer Fixpunkt} \Rightarrow f(v,\omega) \in K_? .$$

R. BRUGGEMAN:

The Ramanujan-Petersson conjecture for real analytic modular forms

If $f_1, f_2, \ldots$ form a basis of the space of modular cusp forms of weight zero and all f_j are eigenfunctions of all Hecke operators, then the Fourier coefficients $\gamma_j(n)$ of f_j satisfy

$$\gamma_j(p^l) = p^{-\frac{1}{2}}(u_{jp}^{-l} + u_{jp}^{-l+2} + \ldots + u_{jp}^{l}) \qquad (p \text{ prime})$$

with $u_{jp} \in \{u \mid \in \mathbb{C} : |u| = 1 \text{ or } u \in [-p^{\frac{1}{2}}, -p^{-\frac{1}{2}}] \cup [p^{-\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}}]\}$.
The Ramanujan-Petersson conjecture for these forms states that only $|u_{jp}| = 1$ is possible.
Recently, N.V. Kuznetsov (Khabarovsk, USSR) has given a proof of this conjecture.
The basical theorem of the proof gives a formula relating the Fourier coefficients of cusp forms and Eisenstein series to Kloosterman sums. A second theorem is used to get rid of those Kloosterman sums again. Combining these two theorems Kuznetsov expresses

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Phi(s_j)\gamma_j(N)\overline{\gamma_j(1)}$$

as the sum of a number of terms involving the test function Φ,

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Fourier coefficients of Eisenstein series and Bessel functions. A special choice of the test function Φ enables him to obtain estimates for those terms; these estimates are sufficiently sharp to prove the Ramanujan-Petersson conjecture.

H. COHN:

Parametrized Ring Class Fields and the Modular Equation

The ring class field for the principal forms of discriminant d (< 0) is $K[d] = Q(\sqrt{d}, j(\frac{d+\sqrt{d}}{2}))$. If $d_t = d_o b^{2t}$, the field $K[d_t]$ can be constructed by an iterative process deriving $j(bz)$ from $j(z)$. For $b = 2, 3, 4, 5$ the Galois closure of the modular equation is of genus 0 leading to simplifications in the work of Fricke, Klein, Weber, etc. (already simplified by the use of rotation groups to find conjugates).
We find algebraic functions $F_b(\eta)$ so that $K[d_t] = Q(\sqrt{d}, \eta^{(t)})$ where $\eta^{(t+1)} = F_b(\eta^{(t)})$.
Typical result: Let $p = x^2 + 4y^2$ then $2^t \| y$ where $r_1, \ldots, r_t$ can be found (mod p) to satisfy $a_1 = \frac{9}{8}$, $a_s \equiv r_s^2 \pmod{p}$, $a_{s+1} \equiv (r_s+3)^2/8(r_s+1)$. Such determinations require algorithmically $(\log p)^{\text{const.}}$ steps (and not $\sqrt{p}$ steps) . Similar results hold for $4p = x^2 + 27y^2$, $3^t \| y$; $p = x^2 + 5y^2$, $5^t \| y$; etc.
For $b = 2$, the first four iterates $\eta^{(t)}$, $t \leq 3$, can be found in easy enough form to deal with forms of class number one and to produce a Stark-type finiteness proof. The mapping $\eta \to F_b(\eta)$ is of further interest as an algebraic correspondence.

A. FRÖHLICH:

Some Operators on Modular Forms which Arise from Normal Basis Problems

A description of Lagrange resolvents for certain ray class fields in terms of modular forms and functions was given and a programm of attacking problems of Galois module structure in fields of complex multiplication via the use of modular forms and functions was outlined. This involved the definition of new operators from level 1 to higher level.

D. GOLDFELD:

The Average Rank of a Fixed Elliptic Curve over a Sequence of Quadratic Fields

Assuming the extended Riemann hypothesis and the Birch-Swinnerton-Dyer conjecture, we show that the average rank of the Mordell-Weil group of a fixed elliptic curve over a sequence of quadratic number fields lies between $\frac{1}{2}$ and $2\frac{1}{2}$. Here rank means: the rank over the quadratic field minus the rank over the rationals. On the basis of numerical evidence we expect that the average value of the rank may actually be $\frac{1}{2}$.

O. HERRMANN:

Numerische Untersuchungen an Fourierkoeffizienten Siegelscher Modulfunktionen dritten Grades

In dem Vortrag wurde über die Resultate einiger numerischer Berechnungen von Eisensteinschen Reihen berichtet. Die numerischen

Rechnungen wurden interpretiert unter Verwendung des Siegelschen Hauptsatzes. Sei $G_k(Z) = \sum_T a(T)e^{\pi i \, Sp TZ}$ eine Eisensteinreihe - d.h. $a(0) = 1$ und $G_k(Z)$ orthogonal zu den Spitzenformen im weitesten Sinne - ; dann gilt folgende Vermutung:

Sei $d = \frac{1}{2}\det(T)$, $p^\nu | d$, $p^{\nu+1} \nmid d$, $A_4 = 240$, $A_6 = -504$, $A_8 = 480$, ...

$$a(T) = A_k \cdot |A_{2k-2}| \cdot \beta_{k-2}(T)$$

$$\beta_{k-2}(T) = \prod_{p|d} \beta_{k-2}(p,T).$$

Die Zahlen $\beta_{k-2}(p,T)$ sind ganze Zahlen, die nur von der p-adischen Klasse von T abhängen. Mit $q = p^{k-2}$ ist im Falle $\nu = 1$

$$\beta_{k-2}(T) = q + c_p(T) .$$

Dabei ist $c_p(T)$ das Hassesymbol.

Im Falle $\nu = 2$ ist ggT_3 der größte gemeinsame Teiler der Elemente der adjungierten Matrix $\det(T) \cdot T^{-1}$ zu setzen und es gilt die Vermutung

$$\beta_{k-2}(p,T) = \begin{cases} q^2 - 1 & \text{falls } c_p(T) = -1 . \\ q^2 + 1 & \text{falls } c_p(T) = +1 , \ p | ggT_3 . \\ q^2 - q + 1 & \text{falls } c_p(T) = +1 , \ p \nmid ggT_3 \\ & \text{und die adj. Form stellt quadr. Reste dar.} \\ q^2 + q + 1 & \text{falls } c_p(T) = -1 , \ p \nmid ggT_3 \\ & \text{und die adj. Form stellt Nichtreste dar.} \end{cases}$$

Eine analoge Vermutung wurde im Falle $\nu = 3$ ausgesprochen. Der Fall $\nu > 3$ wurde wegen mangelnden Beispielen nicht behandelt.

R.-D. KULLE:

Idealklassenzahl von Eichler-Ordnungen

Es seien Q eine definite Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$ mit der Grundzahl F_1 , $F_1 \geq 5$, $F_2 \in \mathbb{N}$ mit $(F_1,F_2) = 1$ und $I \subset Q$ eine Eichler-Ordnung der Stufe F_1F_2 . Sei h die Anzahl der Klassen linksäquivalenter I-Linksideale, also die Idealklassenzahl von I . Sei $M_1,\ldots,M_h$ ein Repräsentantensystem der I-Linksklassen mit den Rechtsordnungen $I_1,\ldots,I_h$ und h_i die Anzahl derjenigen unter den $I_1,\ldots,I_h$, deren Einheitengruppe die Ordnung $2i$ hat. Dann gilt $h = h_1 + h_2 + h_3$. Zur Bestimmung der h_1, h_2, h_3 wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt, dessen rechte Seite die Spuren der verallgemeinerten Brandt-Matrizen vom Index 1 und Gewicht 4, 6, 8 sind. Nach Hijikatas Spurformel lassen sich diese durch Spuren von Hecke-Operatoren auf gewissen Räumen von Spitzenformen zu Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe ausdrücken. Dadurch ergeben sich explizite Formeln für h_1, h_2, h_3 und h .

J. MENNICKE:

Eine Variante der Jacobischen Thetafunktionen und Maaß-Selbergsche Reihen

Sei $H = \{(z,r) , z \in \mathbb{C} , r \in \mathbb{R}^+\}$ der 3-dim. hyperbolische Raum mit der üblichen Metrik und $G = PSL_2(\mathbb{C})$ als Gruppe von Isometrien. Sei $\delta = (|z-z'|^2 + r^2 + r'^2)/2rr'$ die Punkt-Paar-Invariante; der hyperbolische Abstand ist also eine Funktion von δ . Sei $\Gamma < G$ eine diskrete Untergruppe mit $\mathrm{vol}\ \Gamma\backslash G < \infty$. Für $M \in \Gamma$ sei $\delta_M := \delta(z,r,Mz',Mr')$. Die Funktion $\varphi = \dfrac{(\delta+\sqrt{\delta^2-1})^{-s}}{\sqrt{\delta^2-1}}$

ist die einzige Lösung der Laplaceschen Dgl. $L\varphi = (s^2-1)\varphi$, die nur von δ abhängt. Die Reihe

$$F(z,r,z',r',s) := \sum_{M\in\Gamma} \frac{(\delta_M + \sqrt{\delta_M^2-1})^{-s}}{\sqrt{\delta_M^2-1}}$$

heißt eine Maaß-Selbergsche Reihe. Sie ist invariant unter Γ , Lösung der Laplace-Gleichung $LF = (s^2-1)F$ und konvergiert für $\sigma > 1$. Sie ist nicht vom Eisenstein-Typ. Bei $s = 1$ hat sie eine Singularität. Die Reihe

$$\sum_{M\in\Gamma} \left\{ \frac{(\delta_M + \sqrt{\delta_M^2-1})^{-s}}{\sqrt{\delta_M^2-1}} - \frac{2^{-s}}{\delta_M^{1+s}} \right\}$$

ist für $\sigma > -1$ holomorph. Die Funktion $\sum \frac{1}{\delta_M^{1+s}}$ hat als Mellin-Transformierte

$$\vartheta^*(t) = \sum_{M\in\Gamma} e^{-\delta_M t} .$$

$\vartheta^*(t)$ hat viele Eigenschaften mit den Jacobischen Thetafunktionen gemeinsam. Für den Punkt $(0,1) \times (0,1) \in H \times H$ hat man für $M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \Gamma$: $\delta_M = \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2)$. Schreibt man

$$\vartheta_0^*(t) = \vartheta^*(0,1,0,1,t) = \sum_{n=2}^{\infty} c(n) e^{-\frac{nt}{2}} ,$$

so kann man für $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}[i])$ die Koeffizienten $c(n)$ mit Hilfe des Siegelschen Hauptsatzes über quadratische Formen berechnen. Es ergibt sich z. B. für $n \equiv 1 \bmod 2$: $c(n) = 32H(16-4n^2)$. Für andere n und andere arithmetische Gruppen Γ gelten ähnliche Formeln. $H(d)$ ist die Klassenzahl für definite binäre quadratische Formen der Diskriminante d .

C. MEYER:

Die Kroneckersche Grenzformel für reell-quadratische Zahlkörper

Es sei $\Omega = Q(\sqrt{d_\Omega})$ ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d_\Omega > 0$. Es sei ferner $\mathfrak{K}$ eine (absolute) Klasse von Ω sowie $\mathfrak{r}$ ein Divisor aus $\mathfrak{K}^{-1}$, $\mathfrak{r} \in \mathfrak{K}^{-1}$. Dann ist der relevante Term in der Kroneckerschen Grenzformel für die Klassen-Zetafunktion $\zeta(s|\mathfrak{K})$ gegeben durch das Hecke-Integral $\frac{1}{\log \varepsilon} \int_1^\varepsilon \log D(\mathfrak{r}(x))d\log x$, wo $\varepsilon > 1$ die Grundeinheit von Ω bezeichnet. $D(\mathfrak{r}(x))$ ist die Modulnormfunktion für das komplexe Gitter $\mathfrak{r}(x)$, welches dem reellen Gitter $(\mathfrak{r})$ eindeutig zugeordnet ist. Berechnet wird nun hier das scheinbar kompliziertere Integral $\exp(\frac{1}{\log \varepsilon} \int_1^\varepsilon \log D(\mathfrak{r}(x))\, d\log x)$, welches als geometrisches Mittel der Funktion $D(\mathfrak{r}(x))$ mit der Theorie der orthogonalen Polynome aufs engste verknüpft ist. Für die Berechnung dieses Mittels sind die Fourierkoeffizienten von $D(\mathfrak{r}(x))$ von entscheidender Bedeutung. Ihre Berechnung wiederum gelingt mittels einer von Kronecker stammenden Summendarstellung (abgeleitete binäre Thetareihe) für $D(\mathfrak{r}(x))$. Überraschenderweise ergeben sich so für die Fourierkoeffizienten unendliche Reihen, die mit einem Größencharakter behaftet sind und als "singuläre" Werte Maass'scher automorpher Wellenfunktionen angesehen werden können.

W.H. PETERSSON:

Several new formulae on the number of representations of a natural number by positive-definite integral quadratic forms

Es sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index der Modulgruppe

$\Gamma := SL(2,\mathbb{Z})$ mit $-I := -\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \in \Gamma$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, v ein Multiplikatorsystem zu Γ und $-r$, $K := \{\Gamma,-r,v\}$ die Klasse der Modulformen ($f \in K$ erfüllt $f(L\tau) = v(L)(\gamma\tau+\delta)^r f(\tau)$ für $L = \begin{pmatrix}*&*\\\gamma&\delta\end{pmatrix} \in \Gamma$, $\operatorname{Im}\tau > 0$) .

Weiter sei K^o die lineare Schar der ganzen Formen aus K, $K^+ \subset K^o$ die der ganzen Spitzenformen, $K^\perp$ die Orthogonalschar von K^+ in K^o . Jedes $f \in K^o$ kann eindeutig in der Gestalt $f = \mathcal{E} + \varphi$ ($\mathcal{E} \in K^\perp$, $\varphi \in K^+$) dargestellt werden; für $r > 2$ wird $K^\perp$ von den (dann absolut konvergenten) Eisenstein-Reihen der Klasse K aufgespannt; dies gilt auch für $r = 2$ und $r = 1$, falls K eine Kongruenzklasse ist und die Eisenstein-Reihen durch das Heckesche Summationsverfahren definiert werden.

Die erzeugenden Fourier-Reihen der obigen Darstellungsanzahlen sind ganze Modulformen der Klassen $\{\Gamma,-\frac{1}{2}h,v\}$ (Thetareihen), wo jeweils Γ eine Kongruenzgruppe und h die Anzahl der Variablen in der betr. quadratischen Form bezeichnet; die explizite Bestimmung von v bietet i.a. mehr oder minder ernste Schwierigkeiten, die in jedem konkreten Falle erneut zu beseitigen sind.

Die spezielle Systematik der vier einfachen Thetareihen

$$\vartheta_3(\tau) := \sum_m e^{\pi i m^2 \tau} , \quad \vartheta_4(\tau) := \sum_m \left(\frac{2}{m}\right) e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{8}} ,$$

$$\eta(\tau) = \vartheta_5(\tau) := \sum_{m\equiv 1(6)} \left(\frac{-1}{m}\right)\cdot e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{12}} , \quad \vartheta_6(\tau) := \sum_{m\equiv 1(6)} \left(\frac{-2}{m}\right)\cdot e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{24}} ,$$

die mit $\Gamma_\vartheta :=$ Thetagruppe $= \left\langle \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \right\rangle$ die Inklusion $\vartheta_\nu \in \{\Gamma_\vartheta,-\frac{1}{2},v_\nu\}^o$ erfüllen ($\nu = 3, 4, 5, 6$), führt zu einigen expliziten Formeln über Darstellungsanzahlen.

Sei q eine Primzahl > 2, $a_q^{(j,j')}(n)$ die Anzahl der Darstellungen von $n \in \mathbb{N}_0$ in der Gestalt

$$n = m_1^2 + \ldots + m_j^2 + q(m_{j+1}^2 + \ldots + m_{j+j'}^2) \quad (m_1,\ldots,m_{j+j'} \in \mathbb{Z}\ ;\ j,j' \in \mathbb{N});$$

offenbar gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_q^{(j,j')}(n) e^{\pi i n\tau} = \vartheta_3^j(\tau)\vartheta_3^{j'}(q\tau) \in \{\Gamma_o[q] \cap \Gamma_\vartheta, -\tfrac{1}{2}(j+j'), v_{3*q}\}.$$

Man findet im quaternären Fall $j+j' = 4$ $(n \in \mathbb{N})$

$$a_3^{(2,2)}(n) = 4 \sum_{\substack{d>0,\ d|n \\ d \not\equiv 0(3)}} (-1)^{n-d} d\ ;$$

$$a_3^{(1,3)}(n) = \sum_{\substack{d,d'>0, \\ d\cdot d'=n}} \left(2\left(\frac{-4}{d'}\right) - \left(\frac{-4}{d}\right)\right)\left(\left(\frac{d}{3}\right) + \left(\frac{d'}{3}\right)\right) d\ ;$$

$a_3^{(3,1)}(n)$ läßt sich auf $a_3^{(1,3)}(qn)$ zurückführen; für $(n,3) = 1$ läßt sich aus $a_3^{(1,3)}(n)$ der Faktor $(1 + (\frac{n}{3}))$ herausheben, was $a_3^{(1,3)}(n) = 0$ für $(\frac{n}{3}) = -1$ in Evidenz setzt. Ähnliches gilt für die $a_q^{(1,3)}(n)$. - Ferner

$$a_5^{(1,3)}(n) = \sum_{\substack{d,d'>0, \\ d\cdot d'=n}} (-1)^{n-d}\left(\left(\frac{d}{5}\right) + \left(\frac{d'}{5}\right)\right) d\ ;\ \text{analog}\ a_5^{(3,1)}(n)\ ;$$

mit

$$\sigma_1^!(n) = \sum_{\substack{d>0,\ d|n \\ d \not\equiv 0(4)}} d \quad \text{und} \quad \beta_5(n) := \sum_{\substack{m_1,m_2, \\ m_3,m_4}} \left(\frac{-1}{m_1 m_2 m_3 m_4}\right) \quad \text{u.d.B.}$$

$$\left\{ \begin{matrix} m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv m_4 \equiv 1(6) \\ m_1^2 + m_2^2 + 5(m_3^2 + m_4^2) = 12n \end{matrix} \right\}$$

gilt

$$a_5^{(2,2)}(n) = \frac{4}{3}\left(\sigma_1^!(n) + 5\sigma_1^!\left(\frac{n}{5}\right)\right) + \frac{8}{3}\beta_5(n)\ ;$$

für $n \equiv 0 \bmod 2$ ist $\beta_5(n) = 0$, man erhält dann also eine Jacobische Identität.

$$a_7^{(1,3)}(n) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{d,d'>0 \\ d\cdot d'=n}} \left(2\left(\frac{-4}{d'}\right) - \left(\frac{-4}{d}\right)\right)\left(\left(\frac{d'}{7}\right) + \left(\frac{d}{7}\right)\right)d + \beta_7'(n)$$

$$a_7^{(2,2)}(n) = \frac{4}{3} \sum_{\substack{d>0,\, d\mid n \\ d\not\equiv 0(7)}} (-1)^{n-d} d + \frac{2}{3}\,\beta_7(n)$$

$$\beta_7(n) := \sum_{\substack{m_1,m_2, \\ m_3,m_4}} \left(\frac{2}{m_1 m_2}\right) \quad \text{u.d.B.} \left\{ \begin{array}{l} m_1 \equiv m_2 \equiv 1 \bmod 2 \\ m_1^2 + 7m_2^2 + 8m_3^2 + 56m_4^2 = 8n \end{array} \right\} ;$$

$\beta_7'(n)$ ist ebenso definiert; nur ist die quadr. Form

$$= m_1^2 + 7m_2^2 + 56m_3^2 + 392m_4^2 \,.$$

(u.d.B. bedeutet: unter der Bedingung).

Zum Schluß wird eine sehr komplizierte Formel für die Anzahl der Darstellungen von n in der Gestalt

$$n = m_1^2 + \dots + m_7^2 \quad \text{mit} \quad m_1 \equiv \dots \equiv m_7 \equiv 1 \bmod 6$$

mitgeteilt.

H. L. RESNIKOFF:

Modular Forms on the Complex 2-Ball

The complex 2-ball is the domain $\{(z_1,z_2) : z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 < 1\}$, equivalent to the Siegel domain of type $2 : D = \{(z,w) : y - \frac{1}{2}w\bar{w} > 0\}$,

---

$z = x+iy$, $w \in \mathbb{C}$. Set $J = \begin{pmatrix} & & i \\ & -1 & \\ -i & & \end{pmatrix}$, $SU(2,1) = \{g \in SL(3,\mathbb{C}) : g^* J g = J\}$, $\Gamma = SU(2,1) \cap SL(3,\mathbb{Z}[i])$. $SU(2,1)$ acts on D :

if $g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in SU(2,1)$, then

$$(z,w) \overset{g}{\longmapsto} \left(\frac{a_1 z + a_2 w + a_3}{c_1 z + c_2 w + c_3} \, , \quad \frac{b_1 z + b_2 w + b_3}{c_2 z + c_2 w + c_3}\right) \quad .$$

A Γ-modular form of weight k is a holomorphic function $\varphi \colon D \to \mathbb{C}$ such that $\forall\ \gamma \in \Gamma : \varphi(\gamma(z,w)) = (c_1 z + c_2 w + c_3)^k \varphi(z,w)$. φ is a cusp form if $\lim\limits_{y \to \infty} \varphi(z,w) = 0$.

<u>Thm:</u> (i) The graded ring of Γ-modular forms is generated by forms $\varphi_4, \psi_8, \psi_{10}, \psi_{12}, \psi_{17}$. Subscripts denote weights; φ_4 is non cusp; the ψ_k are cusp forms.

(ii) $\psi_{10}^2 = \psi_8 \psi_{12}$.

(iii)
$$\psi_{17}^2 = \psi_{10}(\varphi_4^3 \psi_{12} - 1728\psi_{12}^2 - 2304\varphi_4\psi_8\psi_{12} + \varphi_4^4\psi_8 - 512\varphi_4^2\psi_8^2 + 65536\psi_8^3) .$$

Set $\Phi_{11}(u) = \{\theta_{11}(u)\theta_{11}(iu)\}^2$, $\Phi_{10}(u) = \theta_{11}(iu)\theta_{00}(iu)\theta_{11}(u)\theta_{00}(u)$, $\Phi_{00}(u) = \{\theta_{00}(iu)\theta_{00}(u)\}^2$, $\Phi_{odd}(u) = \theta_{11}(iu)\theta_{00}(iu)\theta_{01}(u)\theta_{10}(u)$, where $\theta_{jk}(u) = \theta_{jk}(i,u)$ is the Jacobi theta function evaluated at modulus u . Then the Fourier-Jacobi expansions of the generators of the ring of modular forms are (with $\theta_{00} = \theta_{00}(i,0)$) :

$$\varphi_4(z,w) = 1 + \frac{240}{\theta_{00}{}^4} \left[\Phi_{00}\left(\tfrac{w}{1+i}\right) + \tfrac{1}{3}\Phi_{11}\left(\tfrac{w}{1+i}\right)\right] e^{2\pi i z} + \dots ,$$

$$\psi_8(z,w) = \Phi_{11}\left(\tfrac{w}{1+i}\right) e^{2\pi i z} + \dots ,$$

$$\psi_{10}(z,w) = \Phi_{10}\left(\tfrac{w}{1+i}\right) e^{2\pi i z} + \dots ,$$

$$\psi_{12}(z,w) = \Phi_{00}\left(\tfrac{w}{1+i}\right) e^{2\pi i z} + \dots ,$$

$$\psi_{17}(z,w) = (1-i)\Phi_{odd}\left(\tfrac{w}{1+i}\right) e^{2\pi i z} + \dots .$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

The generators $\psi_8, \psi_{10}, \psi_{12}$ can be constructed as described in Math. Ann. 238 (1978), 97-117. ψ_{17} can be constructed using the differential operator J: if $\varphi_i \in (\Gamma, k_i)$, then $J(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \in (\Gamma, k_1+k_2+k_3+3)$ and is a cusp form, where

$$J(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial w} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial w} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial w} \\ k_1\varphi_1 & k_2\varphi_2 & k_3\varphi_3 \end{pmatrix} .$$

Then $J(\varphi_4,\psi_8,\psi_{12}) = c\psi_{10}\psi_{17}$ where $c \neq 0$.

φ_4 can be constructed using the basic 'Thetanullwert' on D:

$$\theta((z,w),0) = \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{Z}[i]} \exp i\pi\,(\lambda\bar{\lambda}\cdot z + (1+i)\lambda\mu w + i\mu\bar{\mu}) .$$

Corresponding to Γ-modular forms are Dirichlet series.
Let $(\Gamma,k) \ni \varphi(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{k+n}(z)w^n$. Then φ_{k+n} is a modular form of weight $k+n$ for $SL(2,\mathbb{Z})$. Set $V = \{(y,w) : y - \frac{1}{2}w\bar{w} > 0\}$, and define, for $\mathrm{Re}\, s > 1$, $t \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$,

$$\xi_\varphi(s,t) = \int_V \{\varphi(iy,w) - \varphi(i\infty,w)\}(y - \tfrac{1}{2}w\bar{w})^{s-2}\left(\tfrac{\bar{w}}{w}\right)^{t/2} dy\, \frac{dw d\bar{w}}{2i} ,$$

$$\xi_{\varphi_{n+k}}(s) = \int_0^\infty \{\varphi_{n+k}(iy) - \varphi_{n+k}(i\infty)\}\, y^{s-1}\, dy .$$

Then $$\xi_\varphi(s,t) = (2\pi)2^{s+\frac{t}{2}-2}\, \frac{\Gamma(\frac{t}{2}+1)\Gamma(s-1)}{\Gamma(s+\frac{t}{2})}\, \xi_{\varphi_{k+t}}(s+\tfrac{t}{2})$$

and $$\xi^*_\varphi(s,t) = \frac{2^{-s}\Gamma(k-s)}{\Gamma(k-s+\frac{t}{2})}\, \xi_\varphi(s,t)$$ is invariant under $s \to k-s$ for each t.

R. SCHERTZ:

Klassenzahlen, Ganzheitsbasen, Erzeugung von Klassenkörpern

Bei der Lösung des Klassenzahl-Eins-Problems durch Heegner und Stark spielen algebraische Zahlen, die durch Quotienten der Modulform Δ dargestellt werden, eine entscheidende Rolle. Diese Quotienten stellen in gewisser Weise das Analogon der Kreiseinheiten für die Ringklassenkörper über imaginärquadratischen Körpern dar. So lassen sich zum Beispiel aus diesen Zahlen vollständige Einheitengruppen konstruieren ((1) Schertz, Crelle, 295 (1977) , 296 (1977)), und man kann die im Gegensatz zum Kreiskörperfall nicht triviale Tatsache beweisen, daß diese Quotienten die Ringklassenkörper über dem imaginär-quadratischen Grundkörper erzeugen. (Schertz, J. of Number Theory, Vol. 10, No. 1.) .
Was die Erzeugung von Ganzheitsbasen durch diese Quotienten betrifft, so sind bislang nur numerische Einzelfälle bekannt.
Aus diesen ergibt sich die folgende Vermutung:
Sei Σ ein imaginär-quadr. Zahlkörper der Diskriminante $D \equiv 5(8)$, $3 \nmid D$ und seien K_1, K_2 die maximal-reellen Teilkörper der Ringklassenkörper modulo 1 und 2 . Dann erzeugt die Zahl

$$e^{-\frac{\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\frac{\sqrt{D}+1}{2}\right)}{\eta(\sqrt{D})}$$

eine relative Potenzganzheitsbasis von K_2/K_1 . Könnte man diese Vermutung allgemein beweisen, so ergäbe sich daraus eine neue Lösung des Klassenzahl-Eins-Problems und darüber hinaus auch die Lösung einiger höherer Klassenzahlprobleme.

Betrachtet man anstelle der Ringklassenkörper die vollen Strahlklassenkörper über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper, so wird das Analogon der Kreiseinheiten durch die Ramachandra-Invariante $\Phi_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{K})$ dargestellt. Hierüber ist bisher nicht bekannt, ob sie den Strahlklassenkörper mod $\mathfrak{f}$ über Σ erzeugt. Gestützt auf die Klassenzahlformeln aus (1) kann man dies unter gewissen Voraussetzungen über die Klassenzahlen von Teilkörpern beweisen.

B. SCHÖNEBERG:

Weierstraß-Punkte in Körpern elliptischer Modulfunktionen

Die Theorie der Weierstraß-Punkte (W.P.) wird nach Hurwitz begründet. Dann werden Aussagen über die Lagen und Lücken der W.P. in den Körpern der elliptischen Modulfunktionen der Stufe N hergeleitet, und zwar durch topologische, gruppentheoretische und arithmetische Betrachtungen: Die nach $\Gamma(1)$ mit ρ, i, ∞ äquivalenten Punkte sind W.P. für $N \geq 12$; für $N < 12$ gibt es noch ein paar unbekannte Fälle. Die Bestimmung der Eigenwerte gewisser Automorphismen ergibt Aussagen über Weierstraß-Lücken, in einigen Fällen vollständige Aussagen. Elementare Kongruenzrechnungen ergeben erwähnenswerte, aber nicht weittragende Ergebnisse. Die Kenntnisse über W.P. in den Körpern der elliptischen Modulfunktionen sind minimal.

H. STARK:

Applications of automorphic forms to number theory

The symplectic θ-function is

$$\theta(W,\binom{x}{y}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \exp\{\pi i W[m-y] + 2\pi i\,{}^t x m - \pi i\,{}^t x y\}$$

where $W \in H_n$, the Siegel upper half plane, and x and y are column vectors. It is known that for $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ in the θ-subgroup of $Sp(2n,\mathbb{R})$,

$$\theta(M\cdot W, M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \psi(M)[\det(CW + D)]^{1/2}\theta(W,\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) ,$$

where $\psi(M)$ is an eighth root of unity. It is possible to determine $\psi(M)$ in a very easy fashion in the special case that pD^{-1} is a matrix of integers for some odd prime p. This evaluation suffices to produce the transformation formulas for the modular functions of half integral weight and integral weight that arise from number fields and quadratic extensions of these fields.

A. TERRAS:

Automorphic Forms for $SL(n)$ and Kaori Imai's Generalization of Hecke's Correspondence to Siegel Modular Forms of Degree 2

Suppose that $f(Z)$ is a Siegel cusp form of degree 2, weight k (even) with Fourier expansion $f(Z) = \sum_{T>0} A(T)\exp\{2\pi i Tr(TZ)\}$, $Z \in H_2$. Kaori Imai (Ph. D. Thesis U.C.S.D.) studies the Mellin transform:

$$Mf(s,\lambda) = \int_{Y^{(2)}>0/SL(2,\mathbb{Z})} f(iY)\cdot|Y|^s\, \nu_\lambda(|Y|^{-1/2}Y)\frac{dY}{|Y|^{3/2}} ,$$

with $s \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \Lambda$ = spectrum, $\Delta = y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ on $H_1/SL(2,\mathbb{Z})$.

Here we identify $x+iy \in H_1$ with the 2×2 positive matrix $\begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y > 0$, using the notation $Y[A] = {}^tAYA$,

$|Y| = \det Y$. The ν_λ are assumed to form a complete orthonormal set of eigenfunctions of Δ on $H_1/SL(2,\mathbb{Z})$; i.e., the ν_λ are automorphic forms for $SL(2,\mathbb{Z})$ first studied by Maass in the 1940's . The spectrum Λ is both discrete and continuous. Imai uses results of Maass to express the $Mf(s,\lambda)$ as Dirichlet series converging for Re s sufficiently large: if $\lambda = u(u-1)$, then $Mf(s,\lambda) = 2(2\pi)^{-2s}\sqrt{\pi}\;\Gamma(s-\frac{u}{2})\Gamma(s+\frac{u-1}{2}) \sum_{T>0/SL(2,\mathbb{Z})} A(T)|T|^{-s}\nu_\lambda(|T|^{-1/2}T)$. Further, she proves that $Mf(s,\lambda)$ is entire and bounded in vertical strips (EBV) with functional equation $Mf(k-s,\lambda) = Mf(s,\lambda)$ for all $\lambda \in \Lambda$. Imai's main result is the converse theorem. Suppose the $A(T)$ given so that $A(T) = O((t_{11}t_{22})^{\alpha})$, for some α , with $A(T[U]) = A(T)$ for all $U \in GL(2,\mathbb{Z})$. Then form $f(Z) = \sum_{T>0} A(T)\exp\{2\pi i \operatorname{Tr}(TZ)\}$ and the transforms $Mf(s,\lambda)$. If the $Mf(s,\lambda)$ are EBV in s with functional equation $Mf(s,\lambda) = Mf(k-s,\lambda)$ for all $\lambda \in \Lambda$, then f is a Siegel cusp form of degree 2 , weight k . The proof uses Roelcke and Selberg's inversion of the preceeding Mellin transform. The generalization to Siegel modular forms of degree n would require automorphic forms for $SL(n,\mathbb{Z})$ generalizing Maass wave forms.

D. ZAGIER:

Eisensteinsche Reihen, Zetafunktionen quadratischer Körper und Modulfunktionen

Ausgangspunkt ist die folgende Formel für die Zetafunktion eines quadratischen Körpers K , welche mehrere klassische Formeln (z.B. die Funktionalgleichung und die Integraldarstellung von Hecke) enthält: sei Φ eine schnell abfallende, integrierbare

Funktion auf $\mathbb{R}$ und $L_D\Phi$ (D = Diskriminante von K) die durch

$$L_D\Phi(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{Z}\\ b^2-4ac=D}} \Phi\left(\frac{a|z|^2+bx+c}{y}\right) \qquad (z=x+iy\in H = \text{obere Halbebene})$$

erklärte Funktion. Dann ist $L_D\Phi$ unter $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ invariant, und es gilt

$$\int_{H/\Gamma} L_D\Phi(z)\, E(z,s) \frac{dx\,dy}{y^2} = \zeta_K(s) \int_H \Phi\left(\frac{|z|^2-D/4}{y}\right) y^s \frac{dx\,dy}{y^2},$$

wobei $E(z,s)$ die übliche Eisensteinsche Reihe bezeichnet. Hieraus erhält man u.a.:

i) eine Formel für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)^2}{n^{s+11}}$ (τ = Ramanujan Funktion) und verwandte L-Reihen als unendliche Linearkombination von Zetafunktionen quadratischer Körper,

ii) als Anwendung davon Identitäten wie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)^2}{n^{20}} = \frac{2}{245}\, \frac{4^{20}}{20!}\, \pi^{29}\, \frac{\zeta(9)}{\zeta(18)}\, (\Delta,\Delta)\ ,$$

iii) eine Verallgemeinerung der Selbergschen Spurformel (im holomorphen sowie im nichtholomorphen Fall) ,

iv) die Existenz einer Darstellung von $SL_2(\mathbb{R})$, deren Spektrum mit den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion zusammenhängt.

Liste der Tagungsteilnehmer

Berndt, Prof. Dr. R., Mathematisches Seminar der Universität
Hamburg, Bundesstr. 55, D-2000 Hamburg 13

Böcherer, Dipl.-Math. S., Mathematisches Institut, Hebelstr. 29,
D-7800 Freiburg

Bruggeman, Dr. R., Saffierpad 8, NL-3402 GM Ysselstein, Nederland

Cohen, Dr. D., Northeastern University, Boston, Mass. 02115, USA

Cohen, Prof. H., Math. Pures, Université de Grenoble I, B.P. 116,
F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France

Cohn, Prof. H., Department of Mathematics, City College of N.Y.,
138 St. and Convent Ave, New York, New York 10023

Deninger, Chr., Mathematisches Institut der Universität zu Köln,
Weyertal 86-90, D-5000 Köln 41

Deuring, Prof. Dr. M., Merkelstr. 45, D-3400 Göttingen

Elstrodt, Prof. Dr. J., Mathematisches Institut der Universität
Münster, Roxeler Str. 64, D-4400 Münster

Fröhlich, Prof. A., Depart. of Math., King's College, London,
England

van der Geer, Dr. G., Mathematisches Instituut, Universiteit van
Amsterdam, Roetersstraat 15, NL-1018 WB Amsterdam, Nederland

Goldfeld, Prof. D., Dept. Math. M.I.T. Cambridge, Mass. 02139, USA

Goldstein, Prof. L., Dept. of Mathematics, University of Maryland,
College Park, Md. 20742, USA

Grosswald, Prof. E., Dept. of Mathematics, Temple University,
Philadelphia, PA-19122, USA

Gundlach, Prof. Dr. K.-B., Fachbereich Mathematik der Universität
Marburg, Lahnberge, D-3550 Marburg

Halbritter, Dr. U., Mathematisches Institut der Universität Köln,
Weyertal 86-90, D-5000 Köln 41

Herrmann, Prof. Dr. O., Zeppelinstr. 100, D-6900 Heidelberg 1

Jehne, Prof. Dr. W., Mathematisches Institut der Universität zu
Köln, Weyertal 86-90, D-5000 Köln 41

Kann, Dr. C.-H., Mathematisches Institut der Universität zu Köln,
Weyertal 86-90, D-5000 Köln 41

Koecher, Prof. Dr. M., Hofbauers Kamp 26, D-4542 Tecklenburg

Kramer, D., Department of Mathematics, University of Maryland,
College Park, Maryland 20742, USA

Kulle, Dr. R.-D., Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3/5,
D-3400 Göttingen

Lang, Prof. Dr. H., Mathematisches Institut der Universität Münster,
Roxelerstr. 64, D-4400 Münster

Maaß, Prof. Dr. H., Hirtenaue 50, D-6900 Heidelberg

Mennicke, Prof. Dr. J., Moosweg 34, D-4800 Bielefeld

Meyer, Prof. Dr. C., Mathematisches Institut der Universität zu
Köln, Weyertal 86-90, D-5000 Köln 41

Petersson, Prof. Dr. W.H., Ochtrupweg 42, D-4400 Münster

Pohst, Dr. M., Mathematisches Institut der Universität zu Köln,
Weyertal 86-90, D-5000 Köln 41

Resnikoff, Dr. H.L., National Science Foundation, Washington,
D.C. 20550,USA

Schertz, Dr. R., Mathematisches Institut der Universität zu Köln,
Weyertal 86-90, D-5000 Köln 41

Schoeneberg, Prof. Dr. B., Breslauer Str. 10, D-2000 Norderstedt

Stark, Prof. H., 2-235 Math. Dept., M.I.T., Cambridge, Mass. 02139,
USA

Sunley, Dr. J., Mathematics Department, The American University,
Washington, D.C. 20016, USA

Terras, Prof. A., Mathematics Dept. C-012, University of
California at San Diego, La Jolla, California 92093, USA

Wohlfahrt, Prof. Dr. K., Im Eichwald 2, D-6900 Heidelberg

Zagier, Prof. D., Dept. of Math., University of Maryland,
College Park, MD 20742, USA

Berichterstatter: C. H. Kann, Köln

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft