MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 48 /1979

Numerische Behandlung von Integralgleichungen

18. 11. - 24. 11. 1979

Die diesjährige Tagung über "Numerische Behandlung von Integralgleichungen" stand unter der Leitung von J. Albrecht (Clausthal-Zellerfeld) und L. Collatz (Hamburg). Das Interesse an der Tagung war so groß, daß nicht alle Interessenten eingeladen werden konnten. Etwa die Hälfte der Teilnehmer kam aus dem Ausland. Folgende Gebiete kamen in den Vorträgen zur Sprache: Volterrasche Integralgleichungen, Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art, Fredholmsche Integralgleichungen erster Art in Verbindung mit inkorrekt gestellten Problemen, Integrodifferentialgleichungen sowie Verzweigungsprobleme bei nichtlinearen Integralgleichungen. Zur numerischen Behandlung wurden als Methoden herangezogen: Runge-Kutta-Verfahren, Ersatzkernverfahren, Fixpunktsätze, Iterationsverfahren, Einschließungssätze, Finite Elemente, Quadraturverfahren, Intervallanalysis.

Herrn Prof. Dr. M. Barner und den Mitarbeitern des Mathematischen Forschungsinstituts sei herzlich für die Ermöglichung und die Durchführung der Tagung gedankt.

Berichterstatter: P. Klein

Vortragsauszüge

K. E. ATKINSON: The numerical solution of Laplace's equation in three dimensions

Consider the Dirichlet problem for Laplace's equation, on a simply-connected three dimensional region with a smooth boundary. This problem is easily converted to the solution of a Fredholm integral equation of the second kind, based on representing the harmonic solution as a double layer potential function. We solve this integral equation formulation by using Galerkin's method, with spherical harmonics as the basis functions. This approach leads to small linear systems; and once the Galerkin coefficients for the region have been calculated, the computation time is small for any particular boundary function. The major disadvantage of the method is the calculation of the Galerkin coefficients, each of which is a four-fold integral with a singular integrand. Theoretical and computational details of the method will be presented.

C. T. H. BAKER: An aspect of the numerical treatment of Volterra integral equations of the second kind (Runge-Kutta methods with error estimates)

We outline the structure of Runge-Kutta (RK) methods, defined for Volterra integral equations of the second kind, and present a result on the order of convergence in mixed and extended methods. A method of Lomakovic & Iscuk for providing error estimates is presented, along with a (new) modification, in the form of a mixed method which, per step, is more economical than the original method. New methods based on Fehlberg-type embedded formulae, are also presented, including an A-stable diagonally implicit RK method and its mixed variant. The numerical performance of all these methods is assessed, for a test set of 15 test equations, and proves promising; the theoretical basis for the error estimates is in the asymptotic expressions for the errors, as the step-size parameter tends to zero.

C. BANDLE: A priori Schranken für eine Klasse von Integralgleichungen

Durch Zurückführung auf eine Integralgleichung werden obere und untere Schranken für die Lösungen des nichtlinearen Dirichletproblems

$$\Delta u + \lambda e^{u+v} + h = 0 \quad \text{in } D \subset \mathbb{R}^2, \quad u = \phi \quad \text{auf } \partial D$$

konstruiert. Diese Schranken hängen mit dem konformen Radius zusammen und sind scharf.

M. BESTEHORN: Numerische Berechnung pharmakokinetischer Parameter - Ein Bericht aus der Praxis

Die Pharmakokinetik beschäftigt sich mit Konzentrations-Zeitverläufen verabreichter Medikamente im Körper. Die biologische Vorstellung von Verteilungsvorgängen im Körper ermöglicht die Herleitung eines Differentialgleichungssystems, dessen Parameter die Austauschraten des Arzneimittels zwischen verschiedenen Körperregionen sind. Es wurden 2 Lösungswege zur Bestimmung der Parameter vorgestellt und durch praktische Beispiele illustriert.

H. BRUNNER: Superconvergence in collocation and implicit Runge-Kutta methods for Volterra integral equations

If a given functional equation, e.g. a Volterra integral equation of the first or second kind, is solved numerically on some compact interval I by collocation in an appropriate piecewise polynomial space, and if the resulting global order of convergence is equal to r, there arises the question of whether there exists a (finite) subset Q of I such that the order of convergence p^* on that subset exceeds r. This phenomenon is called superconvergence on Q. In the present talk it will be shown that the study of superconvergence, not only for the equations mentioned above but also for ordinary differential equations, for Volterra integrodifferential equations, and for Fredholm integral equations of the second kind, can be carried out in a unified way by relating the approximate solution to the variation of constant formula associated with the given equation. Some open problems regarding implicit Runge-Kutta methods for Volterra integral equations of the second kind will be indicated, and numerical examples will be given to illustrate the analysis.

S. CHRISTIANSEN: <u>Numerical treatment of an integral equation originating from a 2-dimensional Dirichlet boundary value problem</u>

For the solution of a 2-D Dirichlet BVP, with boundary Γ, Green's third identity leads to an integral equation (a Kupradze "functional equation") in which is introduced an auxiliary curve Γ_1. It is known that for some curves Γ and Γ_1 the equation does not have a unique solution, and that for some other neighbour curves the solution may contain a large and alien component (of constant sign). From a mathematical-physical point of view it is also known how to eliminate the non-uniqueness. A numerical implementation of the integral equation and the method for elimination of the non-uniqueness leads to a system of linear algebraic equations with rectangular matrix. We shall here investigate the equation and the elimination method by means of the condition number formed from the singular values of the rectangular matrix. The prescribed boundary values do not enter the right hand side of the integral equation directly but through an integral transformation. In general the transformation has to be carried out numerically, which fact gives rise to an error which causes the large and alien component of the solution to occur. Numerical methods for treating this difficulty are considered.

J. DAVIS (joint work with L. WINTER): Rigorous Computer Solution of Fredholm and Urysohn Equations

Interval arithmetic and a few results from Anselone (1) are used to solve Fredholm and Urysohn equations. Automatic existence proofs and error bounds are provided for $C^0 \cap PWC^1$ kernels and right hand sides which have interval extensions. The linear case is considered first and the Kantorovich theorem for Newton's method is used to extend the result to the nonlinear case. Details in (2).

(1) Anselone, P. M., Collectively Compact Operator Approximation Theory, Prentice-Hall, 1971

(2) Winter, Lynn, "Computer Techniques Yielding Automatic and Rigorous Solutions to Linear and Nonlinear Integral Equations", Technical Report No. 50, Dept. of Mathematics, Oregon State University, Corvallis, OR 97331.

U. ECKHARDT (gemeinsam mit K. MIKA): Eine Integralgleichung aus der Festkörperphysik

Bei der Bestimmung der Wechselwirkung von Fremdionen in einem Kristallgitter erhält man eine Integralgleichung erster Art. Sie entspricht einer "endlichen Laplace-Transformation" der gesuchten Funktion. Das durch diese Integralgleichung dargestellte Problem ist inkorrekt gestellt. Im vorliegenden Falle kann man anhand der Singulärwertzerlegung darauf schließen, daß die der Modellformulierung zugrundeliegenden Annahmen nicht richtig sein können.

G. HÄMMERLIN: Error bounds for the approximation of Green's kernels by smooth surfaces

Bei Greenschen Funktionen liegt die folgende typische Situation vor: Seien $U := [a,b] \times [a,b]$, T_1 und T_2 die beiden Dreiecke, die bei Teilung von U durch die Diagonale $y = x$ entstehen. Dann ist die Greensche Funktion eine Fläche $K \in C^{\sigma}[U] \cap C^{\sigma+2}[T_1] \cap C^{\sigma+2}[T_2]$. Wird diese Fläche durch Tensor-Produkt-Splines der Ordnung (m-1) approximiert, so gilt mit dem Approximationsoperator Q die Abschätzung

$\|K - QK\|_q = O(h^{\sigma+1+\frac{1}{q}})$, $1 \leq q \leq \infty$, für $0 \leq \sigma+2 \leq m$. Für den Kern

$$K(x,y) := \begin{cases} (x-y)^{\sigma+1} & \text{für } y \geq x \\ -(x-y)^{\sigma+1} & \text{für } y < x \end{cases}, \quad U := [0,1] \times [0,1],$$

gilt $\|K - QK\|_q \geq c \cdot h^{\sigma+1+\frac{1}{q}}$, so daß die obige Abschätzung scharf ist. Die Abschätzung kann z. B. auf Näherungslösungen der homogenen Fredholmschen Integralgleichung 2. Art angewandt werden, die nach einem Ersatzkernverfahren gewonnen sind. Verallgemeinerungen bezüglich des Approximationsoperators Q sind möglich.

K. P. HADELER: <u>Numerische Berechnung instabiler periodischer Lösungen von Differenzen-Differentialgleichungen</u>

Die Berechnung von instabilen Grenzzyklen und von Bifurkationsdiagrammen bei Differenzen-Differentialgleichungen wird i. a. als ein kompliziertes numerisches Problem angesehen; es wurde bisher nur mit konstruktiven topologischen Methoden angegangen. Es wird ein Verfahren angegeben, das sich aus ganz klassischen Methoden der numerischen Analysis zusammensetzt (Newton-Verfahren, Runge-Kutta-Verfahren, Lineare Gleichungssysteme) und das mit geringem Aufwand dieses Problem zu behandeln gestattet.

W. HOCK: <u>An extrapolation method for second kind Volterra integral equations</u>

Analogously to extrapolation methods for IVP's in ODE's, an extrapolation method for the numerical treatment of Volterra equations

$$y(x) = g(x) + \int_a^x K(x,t,y(t))dt \quad (a \le x \le b)$$

is considered. $[a,b]$ is subdivided in a coarse mesh $a = a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_m = b$; for $x \in [a_{j-1}, a_j]$, the integral $\int_a^{a_{j-1}}$ is approximated by a Gauss type quadrature formula, and the resulting modified Volterra equation

$$\tilde{y}(x) = \tilde{g}(x) + \int_{a_{j-1}}^x K(x,t,\tilde{y}(t))dt \quad (x \in [a_{j-1}, a_j])$$

is solved by an extrapolation method for certain points $x_{ji} \in [a_{j-1}, a_j]$. Convergence and stability properties are considered, a few numerical results are given.

H. KARDESTUNCER: The simultaneous use of differential and integral equations in one physical problem

The governing equations of most physical problems can be expressed in differential, integral or empirical form. Not only may every one of these forms have advantage over the others, the alternate use of them in different regions of the domain, in time and space, appears to be more advantageous than the employment of any one of them alone for the entire region. The presentation will explore such possibilities, in particular, the use of finite differences, finite elements, and the calculus of variations in one physical problem. Such a combination of methodologies is primarily dictated by the complexities of the boundary conditions.

D. KERSHAW: An error analysis for a numerical solution of the eigenvalue problem for compact positive operators

It is required to find f and λ such that

$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)f(t)dt, \quad (0 \le x \le 1),$$

where K is positive and continuous in the unit square. The equation is solved approximately by Nyström's method. Computable rigorous error bounds are given for the approximate smallest eigenvalue. The method of analysis (which is based on the mean value theorem) is extended to cover the case when K is totally positive although the error bounds are not computable in this case.

The method is applied to the analysis of the numerical solution of the eigenvalue problem for certain types of differential equations.

H.-J. KORNSTAEDT: Zum inversen Stefan-Problem

Geeignete Glattheitseigenschaften der Anfangs- und Randdaten des eindimensionalen Zweiphasen-Stefan-Problems (mit Neumannschen Randbedingungen) garantieren Existenz- und Eindeutigkeit einer klassischen Lösung. Mit Hilfe eines nichtlinearen Systems von Volterraschen Integralgleichungen werden a-priori Schranken und Stabilitätsaussagen für die Lösung hergeleitet, die den Nachweis ermöglichen, daß der Randoperator, der den Randdaten den eindeutig bestimmten "freien" Rand zuordnet, F-differenzierbar ist. Das zugehörige (inkorrekt gestellte) inverse Stefan-Problem wird durch Übergang zu einem endlich-dimensionalen linearen Optimierungsproblem mit nichtlinearen Nebenbedingungen regularisiert, welches sich aufgrund der F-Differenzierbarkeit des Randoperators effektiv mit dem Osborne-Watson-Verfahren behandeln läßt.

An einigen numerischen Beispielen wird die regularisierende Wirkung dieses Vorgehens mit der anderer Methoden verglichen.

R. KRESS: Über die Integralgleichungsmethode bei Randwertaufgaben für die Maxwellschen Gleichungen

Bei der Behandlung von Außenraumproblemen für die Helmholtzgleichung nach dem klassischen Potentialansatz entstehen Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art, welche - im Gegensatz zu den

Randwertproblemen selbst - nicht eindeutig lösbar sind für solche Frequenzen, welche Eigenwerte zugehörender Innenraumprobleme sind. Von Brakhage, Werner, Leis und Panich stammt eine Modifikation des Ansatzes, welcher zu Integralgleichungen führt, die für alle Frequenzen eindeutig lösbar sind. Die gleiche Problematik liegt vor bei Außenraumproblemen für die zeitharmonischen Maxwellgleichungen. Es wird ein Analogon der oben genannten Modifikationen für die Maxwellschen Gleichungen beschrieben und über numerische Erfahrungen damit berichtet.

J. T. MARTI: On the numerical stability in solving ill-posed problems

For the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind or ill-posed problems in general, a method is proposed which gives the minimum norm solution by solving a nonlinear matrix problem. However, as in the finite element method, the entries of some matrices have to be evaluated by quadrature formulas. These formulas are introducing an undesired discretization error. Since the problems usually turn out to be ill-conditioned, this error may have a disastrous effect on the final result. In this paper, this effect has been studied for the above mentioned algorithm. The main theorem gives an upper bound for the relative error of the minimum norm solution f_o of the problem for the case where the perturbations of the matrices (of order at most n, say) lie below some given bound. For instance, if the perturbations are of the order of λ_n^p for some $p \geq 5/2$ then the relative error of f_o is of the order of $\lambda_n^{p-5/2}$, where λ_n is a small positive parameter determined by the algorithm and such that $\lim_n \lambda_n = 0$.

S. McCORMICK: Mesh Refinement Methods for Integral Equations

Recent developments in the area of nonlinear differential boundary value problems include two general techniques that involve grid manipulation, namely, deterministic mesh refinement and multigrid methods. They can be combined very effectively to produce a safe, efficient algorithm for many classes of problems. The object of the present talk is to consider the application of those methods to the solution of nonlinear integral equations, including eigenproblems for integral operators. The talk will also include a report on some numerical experiments with these methods.

G. OPFER: Evaluation of weakly singular integrals

The numerical computation of $\phi(f)=\int_0^1 f(x)dx$ is treated where f may be singular only at x=0. In order to compute $\phi(f)$ the function f is replaced by a bounded function f_μ such that $f_\mu(x)=f(x)$, for $x\in]\mu,1]$ and the integral ϕ is replaced by a quadrature formula ϕ_n with n knots in $[0,1]$. Convergence results and other applications are contained in a paper by P. M. Anselone and the above author (ISNM 45 (1979), 11 - 43). Because of $\varepsilon(f)=\phi(f)-\phi_n(f_\mu)=(\phi-\phi_n)f_\mu+\phi(f-f_\mu)=\varepsilon_Q(f)+\varepsilon_S(f)$ we can split the total error $\varepsilon(f)$ into a quadrature error $\varepsilon_Q(f)$ and an error $\varepsilon_S(f)$ which we will call singular error. For four test functions ($f(x)=x^{-\lambda}$, $\lambda=0.1,0.5,0.9$, $f(x)=-\log x$) we computed ε_Q, ε_S using different types of quadrature rules. The results show that μ should be taken small, that n should be taken considerably smaller than $1/\mu$ and that an optimal choice of f_μ is still missing.

O. POKORNÁ: Aggregation bei der Lösung diskretisierter Probleme

Die Aggregationsmethode zur Inversion regulärer Matrizen (veröffentlicht von M. Fiedler und V. Pták 1963) wird für die Berechnung der Pseudoinversen von singulären Matrizen verallgemeinert. Die Methode könnte für Matrizen nützlich sein, welche als die Summe von zwei Matrizen ausgedrückt werden können, von denen eine gut invertierbar ist und die andere so in Blöcke zerteilt werden kann, daß in jedem Block alle Elemente fast denselben Wert haben.

Die Frage entsteht, ob es in der Praxis Probleme gibt, die durch Integralgleichungen beschrieben werden und bei Diskretisierung zu solchen Matrizen führen.

K. REKTORYS: Solution of Parabolic Integro-differential Equations of the Volterra type by the Method of Discretization in Time

Initial-boundary value problems for equations of the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = \int_0^t K(x,\tau,u(x,\tau))d\tau,$$

where A is an elliptic operator (in E_N) of order 2k, are solved by the method of discretization in time. Existence and convergence questions in appropriate spaces are discussed.

Similar questions will be treated for equations of the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = K(x,t,u,z)$$

with an integral condition

$$z(x,t) = \int_0^t K(x,\tau,u(x,\tau),z(x,\tau))d\tau$$

(application in the problem of hydratational heat in a water dam).

A short note on application of the method in rheology will be presented.

E. SCHÄFER: Fehleranalyse bei Ersatzkernverfahren

Für die lineare Eigenwertaufgabe bei Integraloperatoren (mit Kern k) wird die Diskretisierung durch Ersatzkernverfahren (mit Kernen k_h) betrachtet. Übliche Fehleranalysen beruhen auf dem Approximationsfehler $\|k-k_h\|_{L_p}$, d. h. auf der Approximationsgüte der

Schemata, durch die k_h definiert wird. Durch eine geeignete Umformulierung und Abschätzung des führenden Fehlerterms wird unsere Analyse durch den Quadraturfehler der Schemata bestimmt. Dadurch werden gewisse Superkonvergenzphänome theoretisch geklärt. Korrekturmöglichkeiten zur Erzielung höherer Konvergenzordnungen ergeben sich im Kontext. An Beispielen wird gezeigt, daß die numerisch beobachteten Konvergenzordnungen mit den theoretisch vorhergesagten übereinstimmen.

A. SPENCE: A convergence analysis for turning points of nonlinear integral equations

A convergence analysis for turning points of nonlinear integral equations is given. A turning point is shown to be an isolated solution of a larger system of nonlinear equations. Approximations to the turning point are obtained by discretizing the larger system using standard techniques and the convergence of the approximations is proved using results of P. M. Anselone (Collectively Compact Operator Approximation Theory, Prentice Hall, 1971) and R. Weiss (SIAM J. Num. Anal. Vol. 11, (1974) p. 550 - 553).

J. SPREKELS: Temperaturregulierung durch Thermostaten: Eine mengenwertige Integralgleichung

Betrachtet wurde ein Modellproblem zur Temperaturregulierung durch Thermostaten:

$$(1)\quad \begin{cases} y_t = y_{xx}, & 0<x<1,\ t>0 \\ \left.\begin{array}{l} y_x(0,t)=0 \\ \alpha y_x(1,t)+y(1,t)=u(t) \end{array}\right\} & t>0\ , \quad \text{mit } \alpha>0, \\ y(x,0)=0, & 0\le x\le 1, \end{cases}$$

mit u(t) gegeben als:

$$(2) \quad \begin{cases} \beta\dot{u}(t)+u(t)=f(y(0,t),\dot{y}(0,t)), \; t>0, & \text{mit } \beta>0, \\ u(0)=0. \end{cases}$$

f ist eine unstetige Funktion. Das Problem (1) + (2) wurde in eine äquivalente mengenwertige Integrodifferentialgleichung transformiert, für die der Fixpunktsatz von Bohnenblust-Karlin die Existenz einer Lösung liefert. Numerische Rechnungen zeigen, daß das Modell die physikalischen Gegebenheiten korrekt wiedergibt. Diese Resultate wurden in Zusammenarbeit mit K. Glashoff, Hamburg, gewonnen.

A. TESEI: On Volterra integro-partial differential equations of parabolic type

The following problem for Volterra integro-partial differential equations is studied:

$$(P) \begin{cases} \partial_t u(t,x)=D^2u(t,x)-u(t,x)\cdot\int_{-\infty}^{t} ds\; k(t-s,x)u(s,x) \; - \\ \qquad -b(x)u^2(t,x) \qquad\qquad \text{in } (0,+\infty)\times\Omega \\ u(t,x)=u_o(t,x) \qquad\qquad \text{in } (-\infty,0]\times\Omega \\ \text{plus homogeneous boundary conditions on } (0,+\infty)\times\partial\Omega. \end{cases}$$

Here $\Omega\subseteq R^d$ ($d\leq 3$) is an open bounded subset with smooth boundary $\partial\Omega$ and

$$(D^2u)(x)=\sum_{i,j=1}^{d}\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u)(x) + a(x)u(x) \qquad (x\in\Omega)$$

defines a linear, second-order formally self-adjoint elliptic operator; $b,k,u_o\geq 0$ are given functions. A sufficient condition of Paley-Wiener type for the asymptotical stability of the unique nontrivial equilibrium $u^*\geq 0$ (which exists if the principal eigenvalue λ of $-D^2$ is positive) in the supremum norm is given, under suitable assumptions on the delay kernel k. The numerical investigation of such condition in the Neumann case for a class of delay kernels reveals the existence of time periodic solutions to problem (P).

H.-J. TÖPFER: Numerische Behandlung von Fredholmschen Integralgleichungen 2. Art mit Splines

Bei der Approximation von Fredholmschen Integralgleichungen 2. Art durch eine Folge von Ersatzproblemen können verschiedene Verfahren mit unterschiedlichem Konvergenzverhalten angewendet werden. Hier wird die Kollokation mit Hilfe von Interpolationssplines als Spezialfall der Projektionsverfahren benutzt.

Durch Modifikation der Kollokation durch (Quasi-) Interpolation des Kerns (in der Integrationsvariablen) mit Splines kann das Problem ohne Verlust der Konvergenzqualität von Näherungsquadraturen frei gehalten werden.

H. VOSS: Quotienteneinschließungssätze für kritische Parameter

Für das nichtlineare, parameterabhängige Fixpunktproblem $u=T(\lambda,u)$ im halbgeordneten Banachraum wird ein Einschließungssatz für den kritischen Parameter $\lambda^{*}:=\sup\{\lambda>0:\ u=T(\lambda,u)\ \text{lösbar}\}$ bewiesen. Dieser kann für Integralgleichungen als Analogon des Quotienteneinschließungssatzes für lineare Eigenwertaufgaben interpretiert werden. Numerische Beispiele belegen die Güte der Einschließung. Die Ergebnisse entstanden in Zusammenarbeit mit B. Werner.

W. L. WENDLAND: Über Galerkin-Kollokationsverfahren bei Integralgleichungen zu elliptischen Randwertproblemen

In neuerer Zeit gewinnen Integralgleichungsmethoden zur Lösung elliptischer Randwertprobleme auch für numerische Verfahren in den Ingenieurwissenschaften zunehmend an Bedeutung. Bei einer Vielzahl von Anwendungen haben die Integralgleichungen ein positiv definites Hauptsymbol, d. h. für sie gilt eine Gårdingsche Ungleichung. Außerdem ist der Hauptteil ein Faltungsoperator oder die Identität. Benutzt man finite Elemente zur approximativen Lösung, so ermöglichen o. g. Eigenschaften die Entwicklung modifizierter Kollokationsformeln, die zu diskreten Analoga von Galerkin-Verfahren führen. Diese Galerkin-Kollokationsverfahren konvergieren asymptotisch von optimaler Ordnung. Außerdem sind sie schnell und einfach programmierbar. Das Verfahren wurde für eine Klasse Fredholmscher Integralgleichungen erster Art mit logarithmischem Kern vollständig durchgeführt. Numerische Experimente mit konformen Abbildungen und der Berechnung der ersten beiden Näherungen der Stokes-Entwicklung einer zweidimensionalen zähen Strömung um einen elliptischen Körper bestätigen Wirksamkeit und Genauigkeit des Verfahrens.

B. WERNER: Über nichtlineare Eigenwertaufgaben

Wir betrachten Eigenwertaufgaben der Form $T(\lambda)u=0$ mit selbstadjungierten, beschränkten $T(\lambda)$ in einem Hilbertraum H $(\lambda \in I=(a,b))$. Wir geben eine Beziehung zwischen den Eigenwerten $\lambda \in I$ und den sup inf -, bzw. inf sup-Werten λ_j eines "Rayleighfunktionals" $p: D \to \mathbb{R}$ an, das im wesentlichen durch $(T(p(u))u,u)=0$ definiert ist.

$$\left[\lambda_j = \sup_{\substack{\dim V=j \\ V\cap D \neq \emptyset}} \inf_{u\in V\cap D} p(u)\right]$$

Die bekannte Theorie für den Fall $D=H-\{0\}$ wird hier für $D\neq H-\{0\}$ in einem gewissen Sinne lokalisiert. Anwendungen auf gedämpfte, aber nicht übergedämpfte Schwingungen werden diskutiert.

Die Resultate wurden in Zusammenarbeit mit H. Voß erhalten.

J. R. WHITEMAN: Numerical Solution of Elliptic Boundary Value Problems Containing Singularities using Integro-differential Equations

Difficulties in the numerical solution of elliptic problems containing boundary singularities are first considered. The asymptotic forms of the solutions of such problems in the neighbourhoods of singularities have in many cases been found. These give insight into the form of the singularity and also can be exploited either to adapt standard finite element or finite difference techniques, or to produce special numerical methods, which deal effectively with the singularities. An integral equation formulation of a mixed boundary value problem is given and the special adaptation, using the appropriate asymptotic form, to the case of singularities due to Symm is described. For the differential problem the method of Steinberg, again using the asymptotic forms but now in conjunction with Green's boundary formula, is explained and the appropriateness of using such a formula for the weak form of the singular problem is discussed.

Numerical results for a problem in an L-shaped region are presented. Finally, by way of motivation for solving such singular problems, a coupled thermo-potential problem with a singularity, which is found in the aluminium industry, is given.

R. A. WILLOUGHBY: The Lanczos Recursion in Linear Algebra

The Lanczos recursion for an nxn real symmetric matrix, A, is given by

$$\beta_{i+1}v_{i+1} = Av_i-\alpha_i v_i-\beta_i v_{i-1}, v_o = 0, v_1 \text{ random}$$

$$\alpha_i = v_i^T(Av_i-\beta_i v_{i-1})$$

$$\beta_{i+1} = ||Av_i-\beta_i v_{i-1}-\alpha_i v_i||.$$

This generates symmetric tridiagonal matrices, T_m,

$$T_m(i,i) = \alpha_i, \; T_m(i,i+1) = \beta_{i+1}.$$

The eigenvalues of A on user specified intervals can be efficiently calculated for large sparse A and at increased expense the eigenvectors can also be calculated. One can also solve Ax = b for symmetric indefinite A via the T's and v's provided

$$|\beta_{m+1} \, e_m^T \, T_m^{-1} e_1|$$

is sufficiently small for large m. This is joint work with Dr. Jane Cullum.

Liste der Tagungsteilnehmer

Adamczyk, Prof. Dr. H., Institut für Mathematik, Polytechnika Warszawska, Plac Jednosci Robotniczej 1, Warschau, Polen

Albrecht, Prof. Dr. J., Institut für Mathematik der TU Clausthal, Erzstr. 1, 3392 Clausthal-Zellerfeld

Ansorge, Prof. Dr. R., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13

Atkinson, Prof. K., Department of Mathematics, The University of Iowa, Iowa City, USA

Baker, Prof. C. T. H., Reader in Mathem., University of Manchester, Manchester, England

Bandle, Prof. Dr. C., Mathemat. Anstalt, Universität Basel, Rheinsprung 21, Basel, Schweiz

Bertram, Prof. Dr. G., Lehrstuhl und Institut für Praktische Mathematik und Darstellende Geometrie, Welfengarten 1, 3000 Hannover

Bestehorn, Dr. M., Gablonzer Weg 1, 6242 Kronberg 2

Bohl, Prof. Dr. E., Fachbereich Mathematik der Universität Konstanz, Postfach 7733, 7750 Konstanz

Brunner, Dr. H., Department of Mathematics, Dalhousie University, Halifax, N. S., Canada, B3H 4H8

Christiansen, Dr. S., The Technical University of Denmark, Laboratory of applied mathematical physics, Building 303 B, DK 2800 Lyngby, Dänemark

Collatz, Prof. Dr. L., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13

Crank, Prof. Dr. J., Institute of Computational Mathematics, Brunel University, Uxbridge, Middlesex, UB8 3PH, England

Davis, Prof. J., Oregon State University, School of Science, Department of Mathematics, Corvallis, Oregon 97331, USA

Eckhardt, Prof. Dr. U., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13

Glashoff, Prof. Dr. K., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13

Goerisch, Dr. F., Institut für Mathematik der TU Clausthal, Erzstr. 1, 3392 Clausthal-Zellerfeld

Hadeler, Prof. Dr. K. P., Mathematisches Institut der Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen

Hämmerlin, Prof. Dr. G., Mathematisches Institut der Universität, Theresienstr. 39, 8000 München 2

Hock, Dr. W., Institut für Angewandte Mathematik und Statistik der Universität Würzburg, Am Hubland, 8700 Würzburg

Hoffmann, Prof. Dr. K. H., Institut für Mathematik III der Freien Universität, Arnimallee 2-6, 1000 Berlin 33

Joubert, Prof. Dr. G. R., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13

Kardestuncer, Prof. H., University of Connecticut, School of Engineering, Dep. of Civil Engineering, Storrs, Connecticut 06268, USA

Kershaw, Prof. D., University of Lancaster, Department of Mathematics, Cartmel College, Bailrigg, Lancaster LA1 4YL, England

Klein, Dr. P. P., Institut für Mathematik der TU Clausthal, Erzstr. 1, 3392 Clausthal-Zellerfeld

Kornstaedt, Prof. Dr. H. J., Hahn-Meitner-Institut, Glienicker Str. 100, 1000 Berlin 39

Kreß, Prof. R., Lehrstuhl für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Göttingen, Lotzestr. 13, 3400 Göttingen

Kwapisz, Prof. M., Institute of Mathematics, University of Gdansk, Poland

Marti, Prof. Dr. J. T., ETH Zürich, Institut für Angewandte Mathematik, Hönggerberg, 8049 Zürich, Schweiz

McCormick, Prof. St., Colorado State University, Department of Mathematics, Fort Collins, Colorado 80523, USA

Meinardus, Prof. Dr. G., Gesamthochschule Siegen, Lehrstuhl für Mathematik IV, Hölderlinstr. 3, 5900 Siegen-Weidenau

Meyer-Spasche, Dr. R., Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 8046 Garching bei München

Morton, Prof. K. W., Department of Mathematics, Whiteknights, Reading, England

Nixdorff, Prof. Dr.-Ing. K., Hochschule der Bundeswehr, Fachbereich Maschinenbau, Holstenhofweg 85, 2000 Hamburg 70

Opfer, Prof. Dr. G., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13

Pokornâ, Dr. O., Katedra Numericke Matematiky, Na Matematicko-Fyzikalni Fakulte, University Karlovy, Malostranske nam. c. 25, 11800 Praha 1, CSSR

Rektorys, Prof. K., Technische Universität Prag, Trojanova 13, 12134 Praha, CSSR

Richert, Prof. Dr. W., Mathematisches Institut der Universität München, Theresienstr. 39, 8000 München 2

Schäfer, Dr. E., Mathematisches Institut der Universität München, Theresienstr. 39, 8000 München 2

Schmidt, R., Hahn-Meitner-Institut für Kernforschung, Sektor Mathematik, Glienickerstr. 100, 1000 Berlin 39

Spence, Prof. Dr. A., School of Mathematics, University of Bath, Claverton Down, Bath BA2 7AY, Avon, England

Sprekels, Dr. J., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13

Tesei, Prof. A., Istituto per le Applicazioni del Calcolo (IAC) "Mauro Picone", Viale del Policlinico 137, 00161 Roma, Italien

Töpfer, Prof. Dr. H. J., Institut für Mathematik III, Freie Universität, Arnimallee 2-6, 1000 Berlin 33

Velte, Prof. Dr. W., Institut für Angewandte Mathematik und Statistik der Universität Würzburg, Am Hubland, 8700 Würzburg

Voß, Dr. H., Gesamthochschule Essen, FB 6 Mathematik, Universitätsstr. 2, 4300 Essen

Wendland, Prof. Dr. W., Fachbereich Mathematik der TH Darmstadt, Schloßgartenstr. 7, 6100 Darmstadt

Werner, Doz. Dr. B., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13

Werner, Prof. Dr. H., Institut für Numerische und Instrumentelle Mathematik, Roxeler Str. 64, 4400 Münster

Wetterling, Prof. Dr. W., Technische Hogeschool Twente, Postbus 217, Enschede-Drienerlo, Niederlande

Whiteman, Prof. Dr. J. R., Institute of Computational Mathematics, Brunel University, Uxbridge, Middlesex, UB8 3PH, England

Willoughby, Dr. R. A., IBM, Thomas J. Watson Research Center, P. O. Box 218, Yorktown Heights, New York 10598, USA