MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 27/1980

Rand-Eigenwertprobleme und Spezielle Funktionen

8.6. bis 14.6.1980

Die Tagung fand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H.D. Nießen (Essen) und Herrn Prof. Dr. F.W. Schäfke (Konstanz) statt.
Im Mittelpunkt des Interesses standen einerseits Fragen aus dem Gebiet der Rand-Eigenwertprobleme, andererseits aus dem Bereich der Speziellen Funktionen und Differentialgleichungen im Komplexen. Beim ersten Themenbereich lagen die Schwerpunkte auf: Spektraltheorie von Differentialoperatoren, Eigenschaften des Spektrums, Kriterien zur Bestimmung der Defektindizes, Erweiterungen von symmetrischen Operatoren und Anwendung von Methoden aus der Funktionalanalysis.
Im zweiten Themenbereich wurden in erster Linie behandelt: Reihenentwicklungen, Integralrelationen und asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen spezieller Differentialgleichungen, Zusammenhangsprobleme und Stokesche Koeffizienten für Differentialgleichungen im Komplexen.
Obwohl beide Gebiete eine Reihe von Berührungspunkten aufwiesen, zeigte sich bei fortschreitender Spezialisierung eine deutliche Auseinanderentwicklung.

Vortragsauszüge (nach Gebieten geordnet)

H.E. Benzinger:

Rayleigh-Schrödinger Perturbation of Differential Operators

Let $\epsilon_0,\dots,\epsilon_m$ be complex numbers. Let $\epsilon = (\epsilon_0,\dots,\epsilon_m)$, and let $V(\epsilon)$: $L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ be a bounded linear operator, analytic in each ϵ_j for $|\epsilon_j|$ sufficiently small. Assume further that $\|V(\epsilon)\| \leq K|\epsilon|$, where $|\epsilon|$ is any convenient norm, and K is fixed. Let $H(\epsilon)$ denote the ordinary differential operator $H(\epsilon)u = u^{(2)} + V(\epsilon$ Asymptotic estimates for the eigenvalues and eigenfunctions of $H(\epsilon)$, as functions of ϵ, are obtained, and applied to investigate the structure of $H(\epsilon)$ and the structure of the semigroup generated by $H(\epsilon)$.

H. Frentzen:

Ein Grenzpunktkriterium für reelle Polynome in symmetrischen Differentialausdrücken beliebiger Ordnung

Es wird der symmetrische Differentialausdruck n-ter Ordnung

$$M = \sum_{j=0}^{m} D^j P_{2j} D^j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-m-1} (D^{j+1} P_{2j+1} D^j + D^j P_{2j+1} D^{j+1})$$

auf dem Intervall $I = [a,b)$ betrachtet, wobei $m = [\frac{n}{2}]$, $D = i\frac{d}{dt}$, $P_n = 1$ und $P_j \in C^\infty(I,\mathbb{R})$ $(0 \leq j \leq n-1)$. Reelle Polynome in M sind dann wieder von der gleichen Form. M ist im Grenzpunktfall, wenn die Anzahl der L^2-Lösungen von $My = iy$ und die von $My = -iy$ minimal ist.

Theorem. Sei $K \in [0,\infty)$, $v \in AC_{loc}(I,[0,\infty))$, $g \in L^1(I,[0,\infty))$, $|v| \leq K$, $|v'| \leq K$, $v^{n-1} \notin L^1(I)$ und $v^{n-j}|Q_j| \leq K + vg\,(0 \leq j \leq n-1)$, wobei $Q_{n-2} = P_{n-2} - \frac{1}{4}P^2_{n-1}\,(n = 2m)$ und $Q_j = P_j$ sonst. Dann ist $p(M)$ im Grenzpunktfall für alle reellen Polynome p.

Der Beweis wird mit Hilfe der Langrange-Sesquilinearform geführt. Es läßt sich eine Reihe von bekannten Grenzpunktkriterien einordnen, die in der Literatur mit asymptotischen Methoden bewiesen werden.

B. Schultze:

Eine störungstheoretische Methode zur Bestimmung der Defektindizes formal selbstadjungierter gewöhnlicher Differentialoperatoren

Die Anwendung eines allgemeinen Störungssatzes von Nießen auf klassische formal selbstadjungierte Differentialausdrücke m-ter Ordnung ($m \geq 1$) auf $I = [a,\infty)$ ($a \in \mathbb{R}$): $My = \sum_{j=0}^{[\frac{m}{2}]} (-1)^j (a_j y^{(j)})^{(j)} + i \sum_{j=0}^{[\frac{m-1}{2}]} (-1)^j \left\{(b_j y^{(j+1)})^{(j)} + (b_j y^{(j)})^{(j+1)}\right\}$, mit reellen Funktionen a_j, b_j, liefert folgenden

Störungssatz: Vor.: Seien M, N formal selbstadjungierte Differentialausdrücke auf I, M regulär, Ord(M) > Ord(N) und

(*) $\exists \alpha,\beta \geq 0 \quad \forall \tau \in [0,1] \; \forall f \in \overset{\circ}{C}{}_o^{\infty}(I) \; \|Nf\|_2^2 \leq \alpha \|(M+\tau N)f\|_2^2 + \beta\|f\|_2^2$.

Beh.: $\operatorname{def}(M+N) = \operatorname{def} M$.

Zusatz: Hinreichend für (*) ist:

(**) $\exists \alpha,\beta \geq 0,\ \alpha < 1 \; \forall f \in \overset{\circ}{C}{}_o^{\infty}(I) \|Nf\|_2^2 \leq \alpha \|Mf\|_2^2 + \beta \|f\|_2^2$

Durch geeignete Abschätzungen von $\|Mf\|_2^2$, die die explizite Gestalt der Koeffizienten von M^2 benutzen, gelingt es, mit diesem Störungssatz und einem Resultat von Kauffman (77) folgendes zu beweisen:

Satz: Vor.: Sei $n \geq 2$, $d > 0$, $\alpha,\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta > \alpha - 2n$, $I = [1,\infty)$

$$My = \sum_{j=0}^{n}{}' (-1)^j (a_j y^{(j)})^{(j)} + i \sum_{j=0}^{n-1}{}' (-1)^j \left\{(b_j y^{(j+1)})^{(j)} + (b_j y^{(j)})^{(j+1)}\right\},$$

$M_o y = (-1)^n (a_n y^{(n)}) + a_o y$ mit

$a_o = dt^{\delta}$, $a_j = c_j t^{\gamma_j}$ $(j = 1,\dots,n-1)$, $a_n = t^{\alpha}$, wobei

$c_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$ und $\gamma_j < \frac{1}{n}(j\alpha + (n-j)\delta)$ für $j = 1,\dots,n-1$ und

$b_j = d_j t^{\varepsilon_j}$, wobei $d_j, \varepsilon_j \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon_j < \frac{1}{n}((j+\frac{1}{2})\alpha + (n-(j+\frac{1}{2}))\delta)$

für $j = 0,\dots,n-1$.

Beh.: $\operatorname{def} M = \operatorname{def} M_o = (n,n)$

Nur in Spezialfällen war dies aus Arbeiten von Walker, Fedorjuk und Kauffman bekannt.
Für den Fall reeller Differentialausdrücke 4. Ordnung wird ein weiterer Störungssatz angegeben, mit dem es gelingt, auch Differentialausdrücke, die nicht im Grenzpunktfall sind, zu stören.

B.D. Sleeman:

Eigenvalues of the Laplacian

A classic problem in the study of boundary value problems for the Laplace operator for a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is to ask; in what way do the eigenvalues of the Laplacian determine Ω?
For example if $n = 2$ and we have the Dirichlet problem

$$\Delta u + ku = 0 \text{ in } \Omega$$

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

then if $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ are the eigenvalues associated with this problem the trace function

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$$

has the asymptotic form, for small $t > 0$,

$$\theta(t) = \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{L}{8(\pi t)^{\frac{1}{2}}} + c + O(t^{\frac{1}{2}}).$$

Here $|\Omega|$ = area of Ω, L = length of $\partial\Omega$.
In this lecture we study the fundamental question of asking what geometrical and boundary information can be determined from a knowledge of the eigenvalues.
Specifically we consider the problem $(n = 1,2)$

$$\Delta u + ku = 0 \text{ in } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

and suppose the eigenvalues $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ are known exactly. The problem then is to determine γ and the geometrical properties of Ω from a knowledge of these eigenvalues. By rigorous asymptotic analysis in the case $n = 2$ we derive an asymptotic expansion of $\theta(t)$ for the circle which, without additional information, is open to a variety of provoking interpretations. Similar results are shown to hold for the case of a general convex domain in $\mathbb{R}^2$.

G. Freiling:

Irreguläre Mehrpunkt-Eigenwertprobleme

Es werden irreguläre Mehrpunkt-Eigenwertprobleme vom Typ

$$(1)\quad \begin{aligned} l(y) &:= y^{(n)} + \sum_{\nu=2}^{n} f_\nu(x) y^{(n-\nu)} \\ U_\nu(y) &= 0 \quad \text{für } 1 \le \nu \le n \end{aligned}$$

betrachtet, dabei sei

$$U_\nu(y) := y^{(k_\nu)}(a_\nu) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j}\, y^{(j)}(a_\nu),$$

$0 \le k_\nu \le n-1,\ \alpha_{\nu j} \in \mathbb{C}$ und $0 = a_1 = a_2 = \cdots a_{\nu_1} < a_{\nu_1+1} = \cdots = a_{\nu_2} < \ldots < a_{\nu_{n-1}+1} = \ldots = a_n = 1$.

Man kann zeigen, daß das EWP (1) irregulär ist und daß die Greensche Funktion G dieses Problems für $|\lambda| \to \infty$ exponentiell bzgl. λ wächst.

Unter Verwendung der Theorie der l-analytischen Funktionen von Fage (vgl. Truduy Mosc. Mat. Obsc. 7, 227 - 268, 1958) wird folgender Konvergenzsatz für die Partialsummen

$$Sf_R(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \int_{|\lambda| = R} G(x,\xi,\lambda)\, f(\xi)\, d\lambda\, d\xi$$

der Entwicklung von f nach den Eigenfunktionen des Problems (1) bewiesen:

Theorem (i) Sei f l-analytisch und seien die Koeffizientenfunktionen reell-analytisch auf $[0,1]$.

(ii) $U_\nu(f) = 0$ für $\nu \in J = \begin{cases} \{1,\ldots,\nu_1\} \text{ oder} \\ \{\nu_{n-1}+1,\ldots,n\} \text{ oder} \\ \{1,\ldots,\nu_1\} \cup \{\nu_{n-1}+1,\ldots,n\} \end{cases}$

(iii) $U_\nu(l^q(f)) = 0$ für $\{1,2,\ldots,n\} \setminus J$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} Sf_R(x) = f(x)$ gleichmäßig auf $[0,1]$.

Die Bedingungen (i),(ii) und (iii) sind für eine große Klasse von EWP auch notwendig.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

F.V. Atkinson:

Sturm-Liouville asymptotics with a large negative potential

Let $F \in C''[0,\infty)$, $F, F', F'' > 0$, $F'F^{-3/2} \in BV[0,\infty)$, and $F^{-1/2} \in L(0,\infty)$. We consider the asymptotics of eigenvalues of the problem $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, $\lim W(y, v\cos\gamma + u\sin\gamma) = 0$ as $x \to \infty$, where u,v are suitable fixed solutions when $\lambda = 0$. We obtain (in joint work with C.T. Fulton) the "quantum conditions"

$$\int_0^\infty (\sqrt{(\lambda + F)} - \sqrt{F})dx = (n\pi + \gamma - \pi/2) + o(1), \text{ if } 0 < \alpha < \pi.$$

$$\text{or} = (n\pi + \gamma) + o(1), \text{ if } \alpha = 0,$$

for the positive spectrum and, with $\lambda = -\mu$,

$$\operatorname{Re} \int_0^\infty (\sqrt{F} - \sqrt{(F - \mu)})dx = m\pi + (\pi/4 - \gamma) + o(1)$$

For the negative spectrum (in which α does not appear). Earlier work on this topic was surveyed. The above improves on early work of P. Heywood (Proc. London Math. Soc. (3), 4 (1954), 456 - 470), and recent independent work of A.G. Alenitsyn (Diff. Urav. 12 (1976), 428 - 437).

T.T. Read:

Some applications of a criterion for the positive definiteness of a differential operator

Let $L = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j D^j p_j D^j$ be a formally symmetric differential expression on the interval (a,∞). A characterization is given, in terms of decompositions of the coefficients p_j, of the property that the minimal operator T_0 generated by $(1/w)L$ in the weighted Hilbert space $L^2_w(a,\infty)$ be positive definite.

Some applications will be given, in particular a condition sufficient for the self-adjoint extensions of T_0 to have discrete spectrum. The sufficient condition is somewhat in the spirit of the well-known result of Molchanov (and especially its extension in the second order case due to Brinck), but applies to a much wider class of differential expressions.

H.S.V. de Snoo:

Friedrichs extensions of ordinary differential expressions

In 1947 Kreinproved: if S is a densely defined nonnegative operator in a Hilbert space, then there exist two nonnegative selfadjoint extensions S_F and S_N (the Friedrichs and the Von Neumann extension respectively), such that for every nonnegative selfadjoint extension H of S we have $S_N \leq H \leq S_F$. This result was proved in the setting of multivalued operators (relations) by Coddington and de Snoo (Math. Z. 159 (1978) 203 - 214) and it turned out that $S_N = ((S^{-1})_F)^{-1}$. In the rest of the talk it was outlined how the factorization of an ordinary differential expression $M = N^+N$ can be used to describe its Friedrichs extension.

A. Schneider:

Selbstadjungierte Randeigenwertprobleme Integro-Differential-Randwertgleichungen

Betrachtet werden Eigenwertprobleme der Form

$$C(x)y'(x) + D(x)y(x) + H(x)[Py(a) + Qy(b)] + K(x)\int_a^b G(t)\,y(t)dt = \lambda B(x)y(x)$$

$$My(a) + Ny(b) + \int_a^b F(t)y(t)dt = 0$$

mit komplexwertigen und in einem kompakten Intervall [a,b] stetigen Koeffizientenmatrizen. Ist das Problem selbstadjungiert im Sinne von Zimmerberg (Ann. Mat. Pura Appl. 105 (1975), p. 241 - 256), so läßt es sich einordnen in die Theorie der S-hermiteschen Rand-Eigenwertprobleme (Schäfke-Schneider, Math. Ann. 162 (1965) p. 9-26). Nimmt man noch an, daß das Eigenwertproblem normal und reduzibel ist, so ist eine Resolvente A zu $\lambda = 0$ erklärt und die Abbildung id-λA, eingeschränkt auf geeignete Teilräume, hat für alle λ endliche Kerndimension, die mit der Kodimension des Bildraumes übereinstimmt. Für definite Probleme ergibt sich dann die Spektraltheorie aus einem Satz von Wielandt (Math. Nachr. 4 (1950/51) p. 308 - 314).

G.K. Immink

Asymptotics of analytic difference equations

We consider systems of difference equations of the form:

$y(s+1) = \varphi(s, y(s))$ where s is a complex variable, y and φ are n-dimensional vectorfunctions.

We assume that:

(1) φ is a holomorphic function of s and y in the region $S_0 \times \Delta(\delta_0)$:
where $S_0 = \{s \in \mathbb{C}: \varphi_1^0 < \arg s < \varphi_2^0, |s| > r_0\}$, $0 < \varphi_1^0 < \pi < \varphi_2^0 < 2\pi$, $r_0 > 0$ and $\Delta(\delta_0) = \{y \in \mathbb{C}^n; |y| < \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$.

(2) φ admits an asymptotic expansion into powers of $s^{-\frac{1}{p}}$, uniformly in $y \in \Delta(\delta_0)$

(3) There exists a formal solution f of the form: $f(s) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r s^{-\frac{r}{p}}$.

Harris and Sibuya have proved the existence of analytic solutions asymptotically equal to the formal ones in the case that $\varphi_y(\infty, 0)$ and $\varphi_y(\infty, 0) - I$ are invertible. They use Laplace transform techniques, and their results are valid only for sectors containing half-planes. We extend their results to other cases and also allow smaller sectors.

Furthermore we prove the existence of analytic solutions of homogeneous linear systems of the form: $y(s+1) = A(s)y(s)$ in the case that $A(\infty)$ is invertible.

W.N. Everitt:

The Titchmarsh-Weyl m-coefficient and special functions

The Titchmarsh-Weyl m-coefficient is associated with the solutions of the symmetric differential equation

$$-(py')' + qy = \lambda wy \text{ on } [a,b)$$

where $p,q,w: [a,b) \to \mathbb{R}$ and satisfy the conditions (i) $p^{-1},q,w \in L_{loc}[a,b)$, and (ii) $w(x) \geq 0$ (almost all $x \in [a,b)$). Special functions provide many explicit examples of m-coefficients which illustrate their ananlytic and asymptotic properties.

G. Bauer:

Störung von Spektraloperatoren

Störungssatz: Gegeben ist ein vollständig diskreter Spektraloperator (v.d.S.O.) T in einem Hilbertraum H (d.h. $(T-\lambda)^{-1}$ ist für ein $\lambda \in \rho(T)$ kompakt und $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = I$, wobei (P_n) die Eigenprojektoren von T sind), dessen Eigenwerte $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, außer endlich vielen, einfach sind. Es gelte $C_1 n^r \leq |\lambda_n| \leq C_2 n^r$ $(r > 0)$ und $|\lambda_n - \lambda_m|^{-1} \leq C_3 |n^r - m^r|^{-1}$ $(n \neq m)$ für Konstanten $C_1, C_2, C_3 \geq 0$. Falls C ein kompakter und B ein beschränkter Operator mit $\|B\| < \beta$ ist (wobei β von T abhängt und β klein ist), dann ist $T + (C+B)T^{\frac{r-1}{r}}$ wieder ein v.d.S.O., dessen Eigenwerte fast alle einfach sind. Der Beweis hierzu benützt Resolventenabschätzungen und eine Änderung eines Störungstheorems von T. Kato [Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 904 - 905].

B. Sagraloff:

Störungstheoretische Anwendung des Kettenbruchverfahrens

D.F. Scofield hat in zwei Arbeiten [Phys. Rev. Letters (1972) u. Rocky Mountain Journal (1974)] ein Kettenbruchverfahren zur Berechnung von Eigenwerten angegeben. Allgemeiner als in den Arbeiten von D.F. Scofield betrachtet der Vortragende einen linearen abgeschlossenen normalen Operator H_o in einem Hilbertraum $\mathfrak{X}$ und einen einfachen isolierten Eigenwert E_o von H_o. Bezeichnet V einen linearen stetigen Operator in $\mathfrak{X}$, $H = H_o + V$ den gestörten Operator und E einen Eigenwert zu H, so läßt sich die Berechnung von E auf die Bestimmung einer geeigneten Lösung der quadratischen Gleichung

$$Bh^2 + h = Y \quad (*)$$

mit Operatoren der Form

$$B = -(I + S_oV)^{-1}S_o,$$

$$Y = (I + S_oV)^{-1}P_oV$$

zurückführen. Dabei bezeichnet S_o die reduzierte Resolvente von H_o in E_o und P_o den Eigenprojektor zum ungestörten Eigenwert E_o. Es werden im weiteren Bedingungen an V mitgeteilt, unter denen der Kettenbruch

$$h_o = Y, \; h_{n+1} = (I + Bh_n)^{-1}Y$$

gegen eine Lösung h von (*), die den Eigenwert E liefert, konvergiert.

J. Meixner:

Orthogonale Polynome in der Theorie der Mathieu Funktionen

Bei der Entwicklung der vier Klassen von 2π-periodischen Mathieu Funktionen in Fourier-Reihen ergeben sich für die Koeffizienten jeweils dreigliedrige Rekursionsformeln. Sie können bei reellen Werten der Parameter λ, h^2 mit $h^2 \neq 0$ als Rekursionsformeln je eines Systems von Orthogonalpolynomen gelesen werden. Die zugehörigen Gewichtsfunktionen lassen sich einfach berechnen. Sie haben diskrete Gewichte an den Eigenwerten der betreffenden Klasse. Es bestehen Zusammenhänge zwischen den Polynomen zu den Klassen I,IV sowie zwischen den Polynomen zu den Klassen II, III der Mathieu Funktionen. Damit ergeben sich auch Zusammenhänge zwischen den Eigenwerten der Klassen I,IV sowie zwischen den Eigenwerten der Klassen II, III.

J. Meixner und F.W. Schäfke:

Entwicklung der Eigenwerte der Mathieuschen Differentialgleichung in der Umgebung ganzer charakteristischer Exponenten

Für die Eigenwerte $\lambda_\nu(h^2)$ der Mathieuschen Differentialgleichung zum charakteristischen Exponenten ν kennt man bei nicht ganzen ν Reihenentwicklungen nach h^4, die jedoch für $\nu \to n$, $n \in \mathbb{N}$ versagen. Berechnet man jedoch aus diesen Entwicklungen $\lambda_{n+\nu}(h^2) + \lambda_{n-\nu}(h^2)$ und $[\lambda_{n+\nu}(h^2) - \lambda_{n-\nu}(h^2)]^2$, so ergeben sich holomorphe Funktionen von (h^4, ν^2) in einer Umgebung von $(0,0)$ und damit Darstellungen von $\lambda_{n\pm\nu}(h^2)$, die sowohl in den stabilen (ν = reell) als auch in den instabilen (ν = imaginär) Gebieten der Eigenwertkarte in einer Umgebung von $\lambda = n^2$ brauchbar sind. Beweisverfahren und Aussagen lassen sich auf die Mathieuschen Funktionen selbst übertragen.

H. Volkmer:

Integralrelationen für Lamé-Funktionen

Es wird eine allgemeine Integralrelation für Lamé-Funktionen angegeben, die als Spezialfall der Riemann-Formel aus der Theorie der partiellen Dglen aufzufassen ist. Bekannte Integralgleichungen werden eingeordnet. Darüber hinaus werden die Eigenwerte der Integralgleichungen (wohl erstmals) angegeben.

E. Wagenführer:

Zur Eigenwertberechnung bei der Mathieuschen Differentialgleichung

Die zur Mathieuschen Differentialgleichung

(1) $y''(x) + 4(\lambda + 2t\cos(2x))y(x) = 0$

gehörende Eigenwertaufgabe besteht darin, bei vorgegebenen $\nu \in \mathbb{C}$ solche λ zu bestimmen, daß ν charakteristischer Exponent von (1) wird. Nach W. Maghus ist der charakteristische Exponent durch die Gleichung

$$\sin^2(\tfrac{\pi}{2}\nu) = -\frac{\pi^2}{4} \det C^{(0)}(\lambda) \cdot \det S^{(0)}(\lambda)$$

bestimmt, wobei die $C^{(0)}(\lambda), S^{(0)}(\lambda)$ unendliche Tridiagonalmatrizen sind, deren Determinanten existieren und in ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind. Somit ist die Eigenwertaufgabe auf die Nullstellenbestimmung einer holomorphen Funktion zurückgeführt. Hierzu wird das Newton-Verfahren vorgeschlagen, dieses gestattet eine umfassende Fehlerabschätzung der berechneten Eigenwerte.

R. Schäfke:

Stokesche Koeffizienten für eine Differentialgleichung von Birkhoff

Betrachtet wird das Dgl.system erster Ordnung in $\mathbb{C}^n$:

(D) $x'(t) = (B + \frac{1}{t}A)x(t)$

Dabei sei t komplexe Variable, $A = (\alpha_{jk})$ und B seien komplexe $n \times n$ Matrizen, B Diagonalmatrix mit den n verschiedenen Diagonalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Es ist bekannt, daß es für fast alle $\theta \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Fundamentalsysteme $y_{j\theta}(t), j = 1, \dots, n$ von (D) gibt, so daß

$$y_{j\theta}(t) = e^{\lambda_j t} t^{\alpha_{jj}} (e_j + O(\tfrac{1}{t})) \qquad (-\mathrm{Re}(te^{i\theta}) \to \infty).$$

Für das globale Verhalten der Lösungen von (D) sind Relationen

$y_{j\theta_1}(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk}\, y_{k\theta_2}(t)$ $(|\theta_1 - \theta_2| < \pi$, t geeignet) interessant. Die Koeffizienten γ_{jk} heißen Stokesche Koeffizienten.

Durch Anwendung u.a. der Laplacetransformation können die Stokeschen Relationen mit Zusammenhangsrelationen bei der Fuchsschen Differentialgleichung

$$(s - B)v' = (\rho - A)v$$

und der Differenzengleichung

$$(\lambda_j - B)g(\rho - 1) = (\rho - A)g(\rho)$$

verknüpft werden.

Dies liefert viele Aussagen über die γ_{jk} und führt in einigen nichttrivialen Fällen zu ihrer Bestimmung.

D. Schmidt:

Zusammenhangsprobleme bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen im Komplexen

Es wurde das folgende "two point connection problem" für die beiden (benachbarten) einfachen Singularitäten O und 1 der allgemeinen linearen Dgl. 1. Ordnung

$$y'(z) = \left(\frac{A_o}{z} + \frac{A_1}{z-1} + G(z)\right) y(z),$$

- wobei A_o, A_1 komplexe $n{\times}n$ Matrizen sind und G eine entsprechende Matrix-wertige in der Kreisscheibe $|z| < r$ mit $1 < r \leq \infty$ holomorphe Funktion ist - behandelt: Ist eine Floquetsche Lösung bei O

$$y(z) = z^{\alpha} \sum_{k=o}^{\infty} z^k d_k$$

und ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ von Floquetschen Lösungen bei 1

$$y_j(z) = (1-z)^{\alpha j} \sum_{k=o}^{\infty} (1-z)^k d_k^j , \quad (j = 1, \ldots, n)$$

gegeben, so besteht zwischen diesen eine lineare Zusammenhangsrelation der Form

$$y(z) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j y_j(z), \quad (z \in]0,1[)$$

mit Koeffizienten $\gamma_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1,\ldots,n)$. Es wurde über eine explizite Grenzwertformel für diese Zusammenhangskoeffizienten γ_j berichtet. Diese hat ein breites Anwendungsfeld in der Theorie der Speziellen Funktionen der mathematischen Physik, worauf kurz eingegangen wurde. Schließlich wurde auf eine Reihe von Verallgemeinerungen der Grenzwertformel hingewiesen.

(Die vorgetragenen Resultate entstammen einer gemeinsamen Arbeit mit R. Schäfke, die im SIAM Journal on Math. Analysis, Vol. 11, 1980 erscheint.)

Berichterstatter:

Dr. Hilbert Frentzen, FB Mathematik, Universität Essen - GHS, Universitätsstr. 2, 4300 Essen 1

Dr. Bernd Schultze, FB Mathematik, Universität Essen - GHS, Universitätsstr. 2, 4300 Essen 1.

Liste der Tagungsteilnehmer

Atkinson, F.V., Prof., Department of Mathematics, University of Toronto; Toronto, Ontario, Kanada

Bauer, G., Dipl. Math., FB Mathematik, Universität Regensburg, Universitätsstr. 31, 8400 Regensburg

Benzinger, H.E., Prof. Dr., Department of Mathematics, 273 Altgeldhall, University of Illinois, Urbana, Illinois 61801, USA

Dijksma, A., Dr., Department of Mathematics, University of Groningen; P.O. Box 800, Groningen, Niederlande

Eberhard, W., Prof. Dr., FB Mathematik, Universität Duisburg, Lotharstr. 65, 4100 Duisburg

Everitt, W.N., Prof., Mathematics Department, University of Dundee, Dundee, DD1 4HN, Großbritannien

Freiling, G., Dr., FB Mathematik, Universität Duisburg, Lotharstr. 65, 4100 Duisburg

Frentzen, H., Dr., FB Mathematik, Universität Essen, Universitätsstr. 2, 4300 Essen

Hoffmann, D., Dr., Abteilung Mathematik, Universität Dortmund, Postfach 50 05 00, 4600 Dortmund 50

Immink, G.K., Dr., Department of Mathematics, University of Groningen; P.O. Box 800, Groningen, Niederlande

Jansen, J.K.M., Dr., Technological University Eindhoven, Department of Mathematics, P.O. Box 513, Eindhoven, Niederlande

Kurz, Maria, Dr., Danzigerstr. 10, 6720 Speyer

Meixner, J., Prof. Dr., Am Blockhaus 31, 5100 Aachen

Mennicken, R., Prof. Dr., FB Mathematik, Universität Regensburg, Universitätsstr. 31, 8400 Regensburg

Neckermann, L., Dr., Mathematisches Institut der Universität Würzburg, Am Hubland, 8700 Würzburg

Nießen, H.-D., Prof. Dr., FB Mathematik, Universität Essen, Universitätsstr. 2, 4300 Essen

Read, T.T., Dr., Department of Mathematics, Western Washington State College, Bellingham, Washington 98 255, USA

Sagraloff, Boris, Dr., FB Mathematik, Universität Regensburg, Universitätsstr. 31, 8400 Regensburg

Schäfke, F.W., Prof. Dr., FB Mathematik, Universität Konstanz, Postfach 77 33, 7750 Konstanz

Schäfke, R., Dr., FB Mathematik, Universität Essen, Universitätsstr. 2, 4300 Essen

Schmidt, D., Prof. Dr., FB Mathematik, Universität Essen, Universitätsstr. 2, 4300 Essen

Schneider, A., Prof. Dr., Abteilung Mathematik, Universität Dortmund, Postfach 50 05 00, 4600 Dortmund 50

Schultze, B., Dr., FB Mathematik, Universität Essen, Universitätsstr. 2, 4300 Essen

Sleeman, B.D., Prof. Dr., Department of Mathematics, University of Dundee, Dundee, DD1 4HN, Großbritannien

de Snoo, H.S.V., Dr., Department of Mathematics, University of Groningen, P.O. Box 800, Groningen, Niederlande

Volkmer, H., Dr., FB Mathematik, Universität Essen, Universitätsstr. 2, 4300 Essen

Wagenführer, E., Dr., FB Mathematik, Universität Regensburg, Universitätsstr. 31, 8400 Regensburg