MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 44/1980

Arbeitsgemeinschaft über Kohomologie arithmetischer Gruppen

5.10. bis 11.10.1980

Die Tagung stand unter der Leitung der Herren Harder und Rohlfs aus Bonn. Diskutiert wurden neuere Entwicklungen der Kohomologietheorie arithmetischer Gruppen.

Der erste Teil der Tagung behandelte für arithmetische Gruppen $\Gamma \subset G$ mit kompaktem Quotienten $\Gamma\backslash G$ den Zusammenhang zwischen der Gruppenkohomologie $H^*(\Gamma,\mathbb{C})$ und relativer Liealgebren-Kohomologie $H^*(\mathfrak{g},\mathfrak{k},H_\pi)$. (Vorträge 2, 3, 6). Die Zerlegung des unitären G-Moduls $L^2(\Gamma\backslash G)$ in irreduzible Komponenten H_π gestattet dann, Aussagen über $H^*(\mathfrak{g},\mathfrak{k},H_\pi)$ in solche für $H^*(\Gamma,\mathbb{C})$ zu übersetzen. So liefert z. B. der Verschwindungssatz von Borel-Wallach-Zuckerman (Vortrag 5) einen Verschwindungssatz für $H^q(\Gamma,\mathbb{C})$ für sehr große und sehr kleine q . Dieser ist schärfer als die bisher bekannten Verschwindungssätze, die mit differentialgeometrischen Methoden bewiesen werden.

Diese Überlegungen bleiben zum Teil auch im Fall einer nicht kokompakten Untergruppe Γ gültig. Mit den zusätzlich auftretenden Problemen beschäftigte sich der zweite Teil der Tagung, unter Beschränkung auf die Gruppe $GL(2)$. Hier muß man als zusätzliche Hilfsmittel die Reduktionstheorie (Vortrag 8) und die Theorie der Eisensteinreihen (Vortrag 9) verwenden. Man erhält eine Zerlegung von $H^*(\Gamma,\mathbb{C})$ in einen "diskreten" Anteil, der wie bei kokompaktem Γ behandelt wird, und einen "Eisenstein-Anteil".

Die Eisenstein-Kohomologieklassen haben, obwohl sie transzendent konstruiert werden, interessante arithmetische Eigenschaften. Mit ihrer Hilfe gewinnt man z. B. Aussagen über die Algebraizität von Werten gewisser L-Funktionen (Vorträge 10, 11).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Einige Beiträge (Vorträge 1, 12) beschäftigten sich mit der arithmetischen Bedeutung von $H^*(\Gamma,\mathbb{C})$ und dem Zusammenhang mit anderen Theorien. (Elliptische Kurven, Modulprobleme , Motive). Diesen scheint man aber nur im Fall der elliptischen Kurven so klar zu überblicken, daß man vernünftige Aussagen formulieren (nicht beweisen!) kann, so z. B. Weil's Vermutung über die Parametrisierung elliptischer Kurven.

Vortragsauszüge

G. HARDER:

In einem einführenden Vortrag wurden einige Aspekte der Theorie arithmetischer Gruppen angedeutet. Es wurde auf die Methoden der Darstellungstheorie Lie'scher Gruppen und die Theorie der Eisensteinkohomologie hingewiesen. Auch der vermutete Zusammenhang mit der Theorie der elliptischen Kurven wurde kurz erläutert.

H.-J. BARTELS:

Es wurde über die von Harish-Chandra entwickelte Theorie der irreduziblen Darstellungen reeller reduktiver Lie-Gruppen berichtet. Insbesondere wurde der Begriff der Zulässigkeit von G-Moduln, der Begriff des $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-Moduls und Casselmans Subrepresentation Theorem erläutert.

A. PFISTER:

In diesem Vortrag wurde die Kohomologie von Lie-Algebren behandelt, und zwar als Kohomologie des Komplexes $C^q(\mathfrak{g},V) = \mathrm{Hom}(\Lambda^q\mathfrak{g},V)$, wobei $\mathfrak{g}$ eine auf dem Vektorraum V operierende Lie-Algebra ist. Ferner wurden für eine Unteralgebra $\mathfrak{k}\subset\mathfrak{g}$ relative Komplexe $C^q(\mathfrak{g},\mathfrak{k},V)$ und Kohomologiegruppen $H^q(\mathfrak{g},\mathfrak{k},V)$ eingeführt und ein allgemeiner Verschwindungssatz bewiesen (Lemma von Wigner). Schließlich wurde für den klassischen Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{g}$ eine halbeinfache reelle Lie-Algebra, $\mathfrak{k}$ eine maximal-kompakte Unteralgebra) der Laplace-Operator Δ auf $C^q(\mathfrak{g},\mathfrak{k},V)$ studiert. Daraus wurden weitere Verschwindungssätze für relative Kohomologiegruppen abgeleitet.

E. GEKELER:

G sei eine reduktive reelle Lie-Gruppe. Die Klassifikation der unitären irreduziblen Darstellungen von G ist nach Sätzen von Harish-Chandra äquivalent zur Bestimmung der zulässigen irreduziblen $(\mathfrak{g},K)$-Moduln, die ein invariantes Skalarprodukt besitzen. Nach einem Satz von Casselman findet man bis auf Isomorphie alle diese Darstellungen durch Zerlegung gewisser induzierter Darstellungen (Hauptserie). Die entsprechenden Rechnungen wurden ausführlich durchgeführt für $GL(2,\mathbb{R})$. Weiter wurden für endlich dimensionale $(\mathfrak{g},K)$-Moduln E und unitäre irreduzible $(\mathfrak{g},K)$-Moduln H die Kohomologiegruppen $H^*(\mathfrak{g},K,E \otimes H)$ bestimmt. Kohomologie existiert nur, wenn H in der diskreten Serie liegt und E zur gleichen induzierten Darstellung gehört wie H.

J. C. JANTZEN:

Es sei G eine halbeinfache reelle Lie-Gruppe und K eine maximal-kompakte Untergruppe. Für eine unitäre Darstellung H mit endlichem Kern und eine endlichdimensionale Darstellung E von G gilt dann $H^q(\mathfrak{g},\mathfrak{k},H \otimes E) = 0$ für $q < \mathrm{rang}(\mathbb{R},G)$. Es wurde der Zusammenhang dieses Satzes mit der Struktur von $H/\mathfrak{n}H$ diskutiert, wobei $\mathfrak{n}$ das Nilradikal einer minimal-parabolischen Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist. Insbesondere wurden der Casselman-Funktor $V \rightsquigarrow V^{[\mathfrak{n}]}$ beschrieben und der Zusammenhang mit Verschwindungssätzen für die $\mathfrak{n}$-Kohomologie von einfachen $\mathfrak{g}$-Moduln mit einem höchsten Gewicht diskutiert.

N. KLINGEN:

Thema des Vortrags war der Zusammenhang zwischen der Kohomologie diskreter Untergruppen Γ in Lie-Gruppen G mit endlich vielen Komponenten, der relativen Lie-Algebren-Kohomologie und der Darstellungstheorie von G. Ist E ein endlichdimensionaler Γ-Modul, so gilt

$$H^q(\Gamma,E) \cong H^q(\Gamma\backslash X,\tilde{E}) \cong H^q(\Omega^*(X,E)^\Gamma) \cong H^q(\mathfrak{g},K,I_\Gamma^G(E)) ,$$

wobei $X = G/K$ ist, K eine maximal-kompakte Untergruppe in G, Ω^* der de Rham-Komplex und $I_\Gamma^G(E)$ der induzierte G-Modul. Im kokompakten Fall erhält man durch Aufspaltung von $I_\Gamma^G(E)$ in die irreduziblen Bestandteile π die Isomorphismen

$$H^q(\Gamma,E) \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m_\pi(\Gamma,E)H^q(\mathfrak{g},K,H_\pi)$$

(E ein unitärer Γ-Modul)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\text{bzw.} \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m_\pi(\Gamma) H^q(\mathfrak{g}, K, H_\pi \otimes E)$$

(E ein G-Modul)

Dies ermöglicht die Anwendung der Verschwindungssätze auf die Kohomologie diskreter Gruppen.

J. ROHLFS:

Sei k ein Zahlkörper und $G|k$ eine anisotrope halbeinfache algebraische Gruppe. Sei $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \prod_{v \in S_\infty} k_v$ und $G_\infty = G(k \otimes \mathbb{R})$. $\mathfrak{g}$ bezeichne die Lie-Algebra von G_∞ und K eine maximal-kompakte Untergruppe von G_∞. Sei E eine endlichdimensionale Darstellung von G_∞ und $\Gamma \subset G(k)$ eine arithmetische Untergruppe. Es gilt dann für $s < \sum_{v \in S_\infty} \operatorname{rang}(k_v, G)$

$$H^s(\Gamma, E) = H^s(\mathfrak{g}, K, E) .$$

Ist t die Anzahl der Stellen $v \in S_\infty$ mit $\operatorname{rang}(k_v, G) \neq 0$, so erhält man ohne Verwendung des Verschwindungssatzes obige Gleichung zumindest für alle $s < t$. Ist speziell $\Gamma \subset SL(2, k \otimes \mathbb{R})$ eine torsionsfreie, kokompakte arithmetische Untergruppe und k total reell, so läßt sich unter zusätzlicher Verwendung der Gauß-Bonnet-Formel $H^*(\Gamma, E)$ vollständig bestimmen.

H. LANGE:

Es wurde die Harder-Siegel'sche Formulierung der Reduktionstheorie übersetzt in die Formulierung von Borel für den Fall der Gruppe $SL(2)|k$, wobei k einen algebraischen Zahlkörper bezeichnet.

W. D. GEYER:

Die Anzahl der Spitzen von $SL(2, O) \backslash SL(2, k \otimes \mathbb{R}) / K_\infty$, wo k ein algebraischer Zahlkörper mit Ganzheitsring O und K_∞ eine maximal-kompakte Untergruppe von $SL(2, k \otimes \mathbb{R})$ ist, wird als Klassenzahl von k gedeutet. Dann wird die Reduktionstheorie an den Beispielen $k = \mathbb{Q}$ und k imaginär-quadratischer Zahlkörper illustriert (d. h. Reduktion definiter binärer quadratischer bzw. hermitescher Formen). In den Fällen eines euklidischen Zahlringes O wird ein Fundamentalbereich explizit angegeben.

G. FALTINGS:

Für die Adele-wertige Gruppe $G = GL(2,\mathbb{A})$ werden Eisensteinreihen definiert und die wichtigsten Eigenschaften bewiesen (Existenz einer meromorphen Fortsetzung, Funktionalgleichung). Weiter wird gezeigt, daß die Eisensteinreihen im wesentlichen das orthogonale Komplement der Spitzenformen im Raum $L^2(G_k \setminus G)$ erzeugen.

R. BERNDT:

Es sei $G_\infty = PGL(2,\mathbb{C})$, $K_\infty = PSU(2)$, $X = G_\infty/K_\infty$ und $\Gamma \subset \Gamma_O = PGL(2,O)$ mit $O = \mathbb{Z}[i]$ die Kongruenzuntergruppe zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ mit Norm $N\mathfrak{p}$ prim $\equiv 5 (\mathrm{mod}\ 8)$. Es wird die Beziehung zwischen der Kohomologie der Mannigfaltigkeit $\Gamma\setminus X$ und der Kohomologie des Randes $\partial(\Gamma\setminus\overline{X})$ der Borel-Serre-Kompaktifizierung von $\Gamma\setminus X$ untersucht. Einer Arbeit von Harder folgend, wird $H = H^1(\partial(\Gamma\setminus\overline{X}),R)$ (R ein genügend reichhaltiger Ring) als Γ_O/Γ-Modul berechnet und jedem $x \in H$ eine Eisensteinklasse $E(x)$ in $H^1(\Gamma\setminus X,\mathbb{C})$ zugeordnet. Man erhält eine Beziehung zwischen x und $E(x)|_{\partial(\Gamma\setminus\overline{X})}$, in die Gauß'sche Summen und spezielle Werte von L-Funktionen für $\mathbb{Q}(i)$ eingehen.

J. ROGAWSKI:

Die Eisensteinklassen $E(x)$ des vorangegangenen Vortrags werden an Zykeln $\gamma \in \Gamma^{ab}$ ausgewertet. Aus der Rationalität der Eisensteinklassen erhält man Aussagen über die Rationalität der speziellen L-Werte.

G. HARDER:

In diesem Schlußvortrag wurde auf einige offene Probleme hingewiesen. Insbesondere wurde die Frage der Ganzzahligkeit der Eisensteinklassen erörtert. Eine positive Antwort liefert eine Abschätzung des Nenners der speziellen Werte der L-Funktionen. Zu dieser Frage wurde über einige experimentelle Daten berichtet.

Berichterstatter: E. Gekeler

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

<u>Liste der Tagungsteilnehmer</u>

Bartels, Prof.Dr.H.-J.
Mathematisches Institut der Universität, Bunsenstraße 3-5
3400 Göttingen

Behr, Prof.Dr.H.
Mathematisches Seminar der Universität, Robert-Mayer-Str.6-10
6000 Frankfurt a.M.

Berndt, Prof.Dr.R.
Mathematisches Seminar der Universität, Bundesstr.55
2000 Hamburg 13

Faltings, Dr.Gerd
Mathematisches Institut der Universität, Roxeler Str.64
4400 Münster i.Westf.

Gekeler, Dr. E.-U.
Mathematisches Institut der Universität, Beringstr.4
5300 Bonn 1

Geyer, Prof.Dr.W.-D.
Mathematisches Institut der Universität, Bismarckstr. 1 1/2
8520 Erlangen

Harder, Prof.Dr.G.
Mathematisches Institut der Universität, Beringstr.1
5300 Bonn 1

Hurrelbrink, Prof.Dr.J.
Fakultät für Mathematik der Universität, Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1

Jantzen, Prof.Dr.J.-C.
Mathematisches Institut der Universität, Beringstr.4
5300 Bonn 1

Kani, Prof.Dr.E.
Mathematisches Institut der Universität, Im Neuenheimer Feld 288
6900 Heidelberg 1

Klingen, Prof.Dr.N.
Mathematisches Institut der Universität, Weyertal 86-90
5000 Köln

Krämer, Dr.Norbert
Mathematisches Institut der Universität, Beringstr.4
5300 Bonn 1

Lange, Prof.Dr.H.
Mathematisches Institut der Universität, Bismarckstr.1 1/2
8520 Erlangen

Neukirch, Prof.Dr.J.
Fachbereich Mathematik der Universität, Universitätsstr.31
8400 Regensburg

Pfister, Prof.Dr.A.
Fachbereich Mathematik der Universität, Postfach 3980
6500 Mainz

Plesken, Prof.Dr.W.
Lehrstuhl D für Mathematik der RWTH Aachen, Templergraben 64
5100 Aachen

Rapoport, Prof.Dr.M.
Mathematisches Institut der Universität, Beringstr.4
5300 Bonn 1

Rogawski, Prof.Dr.J.
Mathematisches Institut der Universität, Beringstr. 4
5300 Bonn 1

Rohlfs, Prof.Dr.J.
Mathematisches Institut der Universität, Beringstr.4
5300 Bonn 1

Schramm, Dr.Klaus
Mathematisches Seminar der Universität, Bundesstr.53
2000 Hamburg 13

Slodowy, Dr.Peter
Mathematisches Institut der Universität, Beringstr.4
5300 Bonn 1

Stieglitz, Dr.Andreas
Institut für Mathematik der Universität, Postfach 102148
4630 Bochum 1