MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 43|1981

Numerische Integration

4.10. bis 10.10.1981

Die Tagung fand unter der Leitung von G. Hämmerlin (München) statt. 33 Vorträge gaben den Teilnehmern aus 11 Ländern reichlich Gelegenheit zur Diskussion und zum wissenschaftlichen Austausch.

In der Vielzahl verschiedener Fragestellungen, die sich im Zusammenhang mit der numerischen Berechnung ein- und mehrdimensionaler Integrale ergeben, lassen sich auch im Vortragsprogramm Schwerpunkte erkennen. Dazu ist zunächst die numerische Integration in n Dimensionen zu nennen, wo Fragen der Optimalität und der Behandlung singulärer Integrale im Vordergrund stehen, aber auch die Konstruktion und Implementierung von Formeln für spezielle Integrationsgebiete. Während über optimale Formeln und singuläre Integranden auch in einer Dimension nach wie vor intensiv gearbeitet wird, werden hier gegenwärtig auch spezielle Funktionenklassen wie konvexe Funktionen untersucht. Die allgemeinen theoretischen Aspekte, die sich bei der Quadratur herausarbeiten lassen, finden ebenfalls starke Beachtung. In der Reihe ISNM des Birkhäuser Verlags wird ein Band erscheinen, in dem Ausarbeitungen der meisten Vorträge zu finden sind, die auf der Tagung gehalten wurden.

Er wird auch einen Abschnitt mit offenen Problemen enthalten, die im Laufe einer sehr anregenden Diskussion formuliert wurden.

Die angenehme Atmosphäre der Tagung, die nicht zuletzt der guten Betreuung durch die Mitarbeiter des Instituts zu verdanken ist, verdient wieder besondere Erwähnung. Allen Angehörigen des Instituts sei herzlich dafür gedankt.

# Vortragsauszüge

C.T.H. BAKER:

## Reducibility of quadrature and its ramifications

We are concerned with methods for discretizing
$\int_0^x \phi(y)dy$ for $x \in \{\tau_j := ih + \theta_r h,\quad r = 0,1,\ldots,p;\ i = 0,1,2,\ldots\}$
where $\theta_0,\ldots,\theta_{p-1}$, $\theta_p=1$ are prescribed. The problem of interest is not that in which $\phi$ is known, rather where $\phi(y) = \Phi(x,y) = K(x,y,f(y))$, $f$ being the unknown solution of an integral equation for which we seek a discretized version. The approximations take the form

(*) $\qquad \int_0^{\tau_j} \phi(y)dy \simeq h \sum_{k\geq 0} \Omega_{jk}\phi(\tau_k)$ and we ask

(I) $\qquad \sup |\Omega_{jk}| \leq \Omega < \sigma$ (zero-stability) and

(II) $\qquad \sup_{-\delta\leq\tau_j\leq X+\delta} \left|\int_0^{\tau_j} \Phi(y_j,y)dy - h\sum_k \Omega_{jk}\Phi(\tau_j,\tau_k)\right| \to 0$ as $h\to 0$

(consistency) when $\Phi(x,y)$ is continuous $-\delta\leq y\leq x+\delta\leq X+\delta,\ \delta>0$ .

The approximations (*) can be constructed in ad-hoc fashion to obtain (a) Kobayasi quadrature rules Q, (b) extended RK (Runge-Kutta) methods (c) mixed quadrature (Q-RK) methods. We show that such rules have weights $\Omega_{jk}$ with characteristic properties: (i) finite repetition factor (ii) block-isoclinal form and (iii) block-reducibility. The latter establishes considerable insight into the stability of methods for integral equations.

The converse approach can be adopted: given a linear multiblock method for initial value problems (e.g. cyclic LMM) with favourable properties find the associated weights $\Omega_{jk}$. Property (I) is a ready consequence of the zero-stability of the Ode method, (II) is ensured by a finite repetition factor (by no means necessary) and consistency. A finite repetition factor is a convenience and is ensured by conditions additional to zero-stability.

We broach an important extension: the modifications required when discretizing convolution integrals of the form $\int_0^x H(x-y)\phi(y)\,dy$ via "discrete convolution" sums associated with a block-isoclinal matrix of weights. The symbol of this matrix plays a rôle in the study of the methods.

B.D. BOJANOV:

Existence and uniqueness of optimal quadrature formulas

Let $w(x)$ be an arbitrary, positive on $(a,b)$ continuous function. Consider the integral

$$F(x_1,\dots,x_n) := \int_a^b w(x) \prod_{k=1}^{n} |x-x_k|^{\alpha_k}\,dx$$

This expression appears in the error term of the quadrature formula based on the interpolation polynomial of Hermite with nodes $x_1,\dots,x_n$ of multiplicities $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, respectively. We prove the following theorem: Let $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ be an arbitrary system of real numbers satisfying the requirement $\alpha_k \geqq 1$, $k = 1,\dots,n$. Then there exists a unique system of points $x_1^*,\dots,x_n^*$ such that

$$F(x_1^*,\dots,x_n^*) = \inf_{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n} F(x_1,\dots,x_n) \quad .$$

Moreover, $a < x_1^* < \dots < x_n^* < b$ .

H. BRAKHAGE:

## Einige Anwendungen symbolischer Methoden

Es wird zunächst untersucht, unter welchen Voraussetzungen Integraloperatoren $Ku(x) := \int_{R^n} k(x,x-x')u(x')dx'$ asymptotische Entwicklungen vom Gregory-Typ

$$Ku(\mu h) = h^n \sum_{\nu\in\mathbb{R}^n} k(\mu h,(\mu-\nu)h)u(\nu h) + \sum_{\lambda>1}^{\infty} h^{n+\lambda} p_\lambda(x,\bar{\Delta}_h)u(\nu h)$$

($p_\mu$ : Polynom in $\bar{\Delta}_h := \frac{1}{h}\Delta_h$, $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) besitzen. Eine symbolische Schreibweise erlaubt in den behandelten Fällen eine einfache Darstellung, die die rekursive Berechnung der $p_\mu$ erlaubt. Die zulässigen Kerne können durch die Art ihrer "Singularitäten" auf der Diagonalen charakterisiert werden. Mit Hilfe von Spline-Interpolation ergeben sich Verallgemeinerungen, die eine analoge Diskretisierung beliebiger Pseudodifferentialoperatoren zulassen. Es werden weiter nicht-kommutative symbolische Kalküle für die Algebren $End(\mathbb{C}[x_1,...,x_n])$, $End(\mathbb{C}[\![x_1,...,x_n]\!])$ in Analogie zum Symbolkalkül für Pseudodifferentialoperatoren skizziert und Anwendungsmöglichkeiten angegeben.

H. BRASS:

## Zur Quadraturtheorie konvexer Funktionen

Es bezeichne $K$ die Klasse der auf $[-1,1]$ definierten konvexen Funktionen $f$ mit $\sup_x |f(x)| \leq 1$. Ist $Q_n$ eine beliebige Funktion von $n$ Variablen und ist $-1 \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq 1$, so gilt

$$\sup_{f\in K} \left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_n[f(x_1),...,f(x_n)] \right| \geq \begin{cases} \dfrac{4}{n^2+2n+1}, & n \text{ ungerade} \\[2ex] \dfrac{4}{n^2+2n+2}, & n \text{ gerade} . \end{cases}$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Es gibt (lineare) $Q_n$, für die die untere Grenze angenommen wird. Die Fehlerasymptotik dieser optimalen Verfahren ist jedoch auch für gutartige Funktionen im allgemeinen nicht besser als $O(n^{-2})$. Unter diesem Aspekt ist das Clenshaw-Curtis-Verfahren empfehlenswert: Es garantiert für alle $f \in K$ die Fehlerasymptotik $O(n^{-2})$, ergibt für gutartige f aber wesentlich kleinere Fehler.

L. COLLATZ:

Kubaturformeln vom Hermiteschen Typ in speziellen Fällen

Man kann versuchen, zur Berechnung von Integralen über eine gegebene Funktion u bei einem gegebenen Bereich B Näherungsformeln aufzustellen, welche neben Funktionswerten von u an gewissen Stellen von B auch Werte von Ableitungen von u benutzen. Man fragt nach numerisch effektiven Formeln, die bei Benutzung von wenigen Daten Restglieder möglichst hoher Ordnung ergeben. Das wird für einfache Bereiche (z.B. Quadrat, Kreis) näher ausgeführt.

H. ENGELS:

Duale Quadraturen

Bekanntlich kann man Gauß'sche Quadraturformeln $Q_n f$ durch Integration des Hermiteschen Interpolationspolynoms $H_n(f,x)$ erzeugen (Markoff 1885). Formeln desselben Typs kann man durch Integration des Operators $H_n'(F,x)$, $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$, erhalten (Bezeichnung $\bar{Q}_n f$). Charakteristisch ist, daß in $Q_n f$ die $f'(x_i)$ und in $\bar{Q}_n f$ die $F(x_i)$ nicht explizit vorkommen. $Q_n f$ und $\bar{Q}_n f$ heißen dann zueinander dual. Die zu $Q_n f$ (Gauß-Formeln bzgl. einer Gewichtsfunktion $W(x)$) dualen Formeln $\bar{Q}_n f$ sind nicht eindeutig. Verlangt man jedoch Symmetrie, so ist $Q_n f \equiv \bar{Q}_n f$. Schreibt man $\bar{x}_1 = a$ (Randpunkt des Integrationsintervalles) vor, so ist $\bar{Q}_n f$ die n-Punkte Radau-Formel. Die zu den Gauß-Formeln dualen Formeln sind wieder interpolatorische Quadraturformeln, die Polynome aus $\mathbb{P}_{2n-2}$ (bei Symmetrie aus $\mathbb{P}_{2n-1}$) exakt integrieren. In diesem Sinne sind die $\bar{Q}_n f$ nicht neuartig. Läßt man jedoch Gewichtsfunktionen $W = W(x,x_1,\dots,x_n)$ zu, so gewinnt man neue Klassen von Quadraturformeln.

H.E. FETTIS:

Numerical evaluation of "divergent" integrals

Divergent integrals of "Cauchy principal value" type occur frequently in many areas of mathematical physics, e.g. hydrodynamics, elasticity . To evaluate such integrals numerically, it is necessary to isolate (or sometimes to "ignore") the singularity. However, this device does not usually result in a form which is suitable for the numerical evaluation of the derivatives of the integral when such are required. We present here an alternative form of the Cauchy integral which not only is itself more amenable to numerical evaluation, but has the additional advantage of being differentiable as often as is required, provided only that a sufficient number of derivatives of the non-singular portion of the integrand are defined.

The Euler-MacLaurin formula as an asymptotic form of Poisson's

We show that the well known Euler-MacLaurin summation formula can be obtained in a straight-forward way as an asymptotic form of the Poisson summation formula. Unlike conventional derivations which rely heavily on the properties of the Bernoulli-polynomials, this procedure requires no mention of these polynomials per se, even when obtaining the conventional form of the remainder term.

K.-J. FÖRSTER:

Ein Vergleichssatz für lineare Funktionale

In der Literatur findet man verschiedene Arbeiten, die sich mit dem Vergleich von Quadraturformeln beschäftigen. Vergleichssätze sind sowohl bzg. der Reste verschiedener Quadraturformeln als auch bzg. der Lage der Stützstellen und der Größe der Gewichte erzielt worden. Locher hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit ein Vergleichskriterium angegeben und gezeigt, daß mit dessen Hilfe ein Teil der bisherigen Ergebnisse nachzuweisen ist.

Hier wird im ersten Abschnitt ein Vergleichskriterium angegeben, das das Kriterium von Locher enthält. In den darauf folgenden drei Abschnitten werden Vergleichsergebnisse vorgestellt, die aus diesem Kriterium folgen. Insbesondere wird ein Ergebnis von Bernstein über die Größe des ersten Gewichtes einer positiven Quadraturformel für beliebige Gewichte verallgemeinert.

W. FREEDEN:

Mehrdimensionale Eulersche Summenformeln
und best-approximierende Kubaturformeln

Im ersten Teil des Vortrages werden Summenformeln bewiesen, die nach Form und Gehalt als mehr-dimensionale Verallgemeinerungen der bekannten Euler-MacLaurinschen Summenformel anzusehen sind. Wesentliches Hilfsmittel ist dabei die Greensche Funktion des Operators $\Delta + \lambda$ zur Randwertaufgabe der Periodizität (vgl. Res. d. Math., 3, 33-63 (1980)).

Im zweiten Abschnitt werden dann mit Hilfe dieser Summenformeln best-approximierende Kubaturformeln angegeben und Beziehungen zu mehr-dimensionalen periodischen Spline-Funktionen aufgewiesen.

Den Abschluß bildet die Erläuterung eines Algorithmus zur numerischen Berechnung von Bestapproximationen und periodischen Interpolationssplines.

W. GAUTSCHI:

An algorithmic implementation of the generalized Christoffel's theorem

An interesting generalization of Christoffel's theorem, due to Uvarov, expresses the orthogonal polynomials with respect to the weight distribution $[p(t)/q(t)]d\lambda(t)$, where $p/q$ is a rational function, nonnegative on the support of $d\lambda$, in determinantal form in terms of the orthogonal polynomials with respect to $d\lambda$. We propose two algorithms for obtaining the recursion coefficients of the orthogonal polynomials $\{\pi_r(\cdot;\frac{p}{q}d\lambda)\}$ from those of the orthogonal polynomials $\{\pi_r(\cdot;d\lambda)\}$. Our first algorithm is a recursive procedure that generates the desired recursion coefficients directly from the given ones. The second algorithm is based on a modified moments approach and minimal solutions of three-term recurrence relations. The two algorithms usefully complement each other: where one is unstable, the other happens to be stable. There are obvious applications to Gaussian quadrature formulae.

A. HAEGEMANS:

Construction of known and new cubature formulas of degree five, for three-dimensional symmetric regions, using orthogonal polynomials

A method of constructing 21-point cubature formulas with polynomial precision five is given for three-dimensional regions and weight functions which are symmetric in each variable. The formula contains four free parameters so that we can choose them so that some points and/or some weights become zero. In this way we obtain 17-points, 15-points, 14-points and 13-points formulas. All known formulas of degree five are generated by this method and some new formulas are constructed.

G. HEINDL:

## Zur optimalen Quadratur konvexer Funktionen

Für eine konvexe Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien die Werte bekannt, die sie in gegebenen Stützstellen $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ annimmt. Gesucht werde die beste Approximation B für das Integral $\int_a^b f(x)dx$ und ihr maximal möglicher Fehler D.

Da mit $C := \{g : [a,b] \to \mathbb{R} : g(x_i) = f(x_i),\ i = 1,\ldots,n$ und $g$ konvex$\}$

$$i := \inf_{g\in C} \int_a^b g(x)dx \quad \text{und} \quad s := \sup_{g\in C} \int_a^b g(x)dx \quad \text{offenbar}$$

$$B = \tfrac{1}{2}(i+s) \quad \text{und} \quad D = \sup_{g\in C} \left|B - \int_a^b g(x)dx\right| = \operatorname*{Min\,sup}_{A\in\mathbb{R}\ g\in C} \left|A - \int_a^b g(x)dx\right| = \tfrac{1}{2}(s-i)$$

gilt, wird man versuchen, B und D über i und s zu bestimmen.

Während man jedoch für s die einfache Darstellung

$s = \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i+1}) + f(x_i))(x_{i+1}-x_i)$ hat, ist für i keine numerisch auswertbare Formel bekannt. Es zeigt sich aber, daß $\sqrt{s-i}$ auch als euklidischer Abstand zwischen $0 \in \mathbb{R}^{n-2}$ und einem konvexen Polyeder $P \subset \mathbb{R}^{n-2}$ dargestellt und damit z.B. mit einem Verfahren zur Lösung von quadratischen Optimierungsproblemen berechnet werden kann.

E.M. IBRAHIM:

## Estimation of error in a series solution for the root of a polynomial

To get the zeros of $\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} y^m$ , consider

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + x \sum_{m=0}^{n-2} a_{n-m} y^m = 0 \quad \ldots. \quad (1)$$

then let $y = \sum_0^\infty b_n x^n$, substituting in (1) we get $\sum_0^\infty c_r x^r = 0$

which gives the equations $C_r = 0 \quad r = 0,1,\ldots \infty$ .

When $x = 1$ , $y = \sum_{0}^{\infty} b_n$ which is a zero of the polynomial (of maximum modulus). Equations $C_r = 0$ give the value of $b_n$ in terms of the coefficients $a_{n-m}$ .

For the quintic (n=5): $b_o = -a_1$, $b_1 = a_2/a_1 - a_3/a_1^2 + a_4/a_1^3 - a_5/a_1^4$ etc.

The error when we take $y = \sum_{r=o}^{n} b_r$ is approximately equal to $|2b_n|$.

The same procedure can be applied to get the complex zeros of the polynomial $\sum_{m=o}^{n} a_{n-m}y^m$ .

K. JETTER:

<u>Ein einfacher Beweis des Satzes von Krein</u>

Die Existenz von Gauss-Formeln für beliebige Tschebyscheff-Systeme wurde 1951 von Krein mit Hilfsmitteln aus der Momententheorie bewiesen. Heute kennt man neben dem ursprünglichen Beweis zwei weitere mögliche Zugänge: DeVore [1968] verwendet Aussagen über einseitige $L_1$-Approximation und Barrow [1978] verwendet die Gradformel aus der Theorie des Brouwerschen Abbildungsgrades. Im Gegensatz hierzu wird im vorliegenden Fall mit einem lokalen Fortsetzungsprinzip oder mit Glättung durch Bernstein-Operatoren gearbeitet.

D. KERSHAW:

Some reflections on the Euler-MacLaurin sum formula

A one dimensional E - M sum formula is taken to be of the form

$$\int_0^1 f(x)\phi_o(x)\,dx = \sum_{i=o}^{n} H_i f(x_i) + \sum_{r=1}^{m} [\alpha_r f^{(2r-1)}(1) + \beta_r f^{(2r-1)}(0)]$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} [\gamma_r f^{(2r-2)}(1) + \delta_r f^{(2r-2)}(0)]$$

$$+ \int_0^1 K_m(x) f^{(2m)}(x)\,dx \ .$$

By appropriate choice of expansions of f three distinct types of expansion can be obtained such that

a) $\alpha_r = \beta_r = 0$, b) $\gamma_r = \delta_r = 0$, c) $\alpha_r + \beta_r = \gamma_r + \delta_r = 0$ .

Explicit expressions are given for $\alpha_r$, $\beta_r$, $\gamma_r$, $\delta_r$ .

A two dimensional analogue is of the form

$$\iint_D u(x,y)\phi_o(x,y)\,dxdy = \sum_{i,j} \int_{C_{i,j}} H_{ij}(s)u(s)\,ds$$

$$+ \sum_{r=1}^{m} \int_C A_r(s) \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{r-1} u\,ds$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} \int_C B_r \Delta^{r-1} u\,ds + \iint_D K_m(x,y)\Delta^m u\,dxdy,$$

where $D = \bar{\cup}\, D_{ij}$ and $C_{ij} = \partial D_{ij}$ .

The first two coefficients $A_1$, $B_2$ are shown to satisfy Fredholm integral equations of the second kind.

J.N. LYNESS and L. GATTESCHI:

## A note on cubature over a triangle of a function having specified singularities

The conical product rules for integration over a triangle ABC are well known. In this note, we discuss conical product rules with weight function $w(x)r^{\beta}$ where r is the distance of (x,y) from C and x is the distance of (x,y) from AB. In particular we show how to construct rules which are exact for integrand functions $p_{\lambda}(x,y)h_{\mu}(r)$ where $p_{\lambda}$ and $h_{\mu}$ are polynomials of degree $\lambda$ and $\mu$ respectively.

H.M. MÖLLER:

## Über Gaußsche Kubaturformeln der Grade 2 und 3

Die Gauß-Quadraturformeln sind dadurch ausgezeichnet, daß

(i) alle Gewichte positiv sind,
(ii) die Knoten im Integrationsgebiet liegen und
(iii) keine Formel desselben Grads weniger Knoten besitzt.

Bei Kubaturformeln lassen sich i. allg. diese drei Eigenschaften nicht gleichzeitig erreichen, wie an den Formeln des Grads 2 und 3 erläutert wird. Schwächt man (ii) ab zu

(ii)' die Knoten liegen in einer Ellipse, die das Integrationsgebiet D umfaßt,

dann gibt es Formeln des Grads r=2 bzw. r=3 mit 3 bzw. 4 Knoten, die die drei Eigenschaften besitzen. Schwächt man dagegen (iii) ab zu

(iii)' keine Formel desselben Grads mit (i) und (ii) hat weniger Knoten,

dann gibt es für r=2 und r=3 je ein strikt positives Integral mit konvexem Integrationsgebiet, so daß Formeln mit den drei Eigenschaften mindestens 5 bzw. 9 Knoten besitzen.

G. MONEGATO:

The numerical evaluation of certain Cauchy principal value integrals

We give a survey of whole interval interpolatory type quadrature formulas for the numerical evaluation of one dimensional Cauchy principal value integrals and make few remarks.
Then we briefly mention their use for the evaluation of integrals of the form

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w_1(x)w_2(y)\,\frac{f(x,y)}{(x-x_o)(y-y_o)}\,dxdy\,,\quad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{f(x,y)}{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}\,dxdy\,.$$

Finally, we consider the following integral

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}\int_{-1}^{1}\frac{f(u)}{u-t}\,dudt\,.$$

G. NEUMANN:

Konstruktion interpolatorischer Kubaturformeln mit Booleschen Methoden

Gordon entwickelte 1969 die Methode der Booleschen Approximation von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Als Anwendung dieser Methode in der zweidimensionalen Lagrange-Interpolation untersuchten Delvos-Posdorf 1979 Interpolationsprojektoren $P_{1,R}$, die sich als R-fache Boolesche Summe kommutierender Tensorprodukt-Lagrange-Interpolationsprojektoren darstellen lassen. Durch Komposition des Integraloperators

$$J^{x,y},\ J^{x,y}[f] := \iint_S W(x,y)f(x,y)\,dxdy,\quad S = [-1,1]\times[-1,1]\ ,$$

mit den Projektoren $P_{1,R}$ werden interpolatorische Kubaturformeln konstruiert. Besitzt die Gewichtsfunktion W eine Faktorisierung durch Gewichtsfunktionen einer Veränderlichen, kann die Kubatur durch interpolatorische Quadraturformeln beschrieben werden. So lassen sich die Kubaturgewichte und der Genauigkeitsgrad aus den entsprechenden Daten der zugrundeliegenden Quadraturformeln bestimmen.

G. OPFER:

Chebyshev points in planar domains

If $D \subset \mathbb{C}$ is a compact set (with sufficiently many points) then each monic polynomial t with least uniform norm on D is called Chebyshev-polynomial with respect to D and its zeros are called Chebyshev-points. These points are of importance when constructing interpolation formulae in the complex plane $\mathbb{C}$.
We obtain a generalization of a known theorem which says that all zeros of t are in the convex hull of D. It is shown that in the context of nonconforming complex planar splines one has to impose the side condition that the Chebyshev-points are on the boundary of D, where in this connection D is a triangle.

There are several numerical examples in which Chebyshev-points on triangles are displayed. Collaboration with M.L. Puri, Indiana University is acknowledged.

D. PAGET:

Hadamard finite-part integration

The possibility of giving meaning to integrals containing non-integrable singularities was discussed by Jacques Hadamard in 1923. The problem arose in the use of a Green's function approach to solving the cylindrical wave equation. Hadamard demonstrated that the correct solution was obtainable if a certain improper integral of the form $\int_o^{t_o} u_o(r)r(t_o^2-r^2)^{-3/2}dr$ was defined to be a, so called, finite-part integral.
In this talk I shall define finite-part integrals over finite intervals and discuss some of their peculiar properties. Also I hope to indicate where some of the difficulties lie in establishing quadrature rules for finite-part integrals.

E. SCHÄFER:

Gauß-Formeln zur Verbesserung von Eigenwertnäherungen bei Integralgleichungen

Zu Eigenwertaufgaben $Kx = \lambda x$, $(Kx)(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)dt$, bestimmen wir Näherungen $x_h, y_h$ durch Ersatzkernoperatoren $(K_h x)(s) = \int_0^1 k_h(s,t)x(t)dt$. Als Ersatzkern $k_h$ wählen wir Tensorprodukte von Polynomsplines über numerisch besonders geeigneten Gittern. Da B-Spline-Basen nichtnegativ sind, kann man den verallgemeinerten Raleighquotienten $(Kx_h, y_h) =: \rho_h$ günstig berechnen über Gauß-QF'n mit diesen B-Spline-Gewichten. Wir geben Ordnungsabschätzungen an für $|\lambda - \rho_h|$ auch bei Kernen k, die nicht den maximalen Differenzierbarkeitsgrad besitzen (Greensche Kerne zu RWA bei ODE). An einem Beispiel zeigen wir, daß diese hohen Ordnungen auch numerisch beobachtet werden können.

W. SCHEMPP:

Gruppentheoretische Aspekte der Quadratur

Bei Kubaturformeln für Integrale über symmetrische Gebiete wird man regelmäßige Punktanordnungen bevorzugen und geeignete geometrische Konfigurationen mit Hilfe der Symmetriegruppe des Integrationsgebietes zu konstruieren versuchen. Diese Idee führt z.B. bei Kubaturformeln für Oberflächenintegrale über die euklidischen Einheitssphären zum Begriff des sphärischen Designs. Der Schwerpunkt des Vortrags liegt jedoch auf dem eindimensionalen Fall. Es wird gezeigt, wie analoge Methoden der nilpotenten harmonischen Analyse, nämlich die Darstellungstheorie der reellen Heisenberg-Gruppe, über die kardinale Interpolationsreihe zu einer Quadraturformel für uneigentliche Integrale ("unendliche" Trapezregel) führen und in Verbindung mit komplexen Kurvenintegraldarstellungsmethoden ein ableitungsfreies Restglied liefern, welches den Quadraturfehler auf einfache Weise abzuschätzen gestattet. Weitere Anwendungen dieser Methoden (FFT-Algorithmus, kardinale Spline-Interpolation, Abminderungsfaktoren der numerischen Fourier-Analyse) werden ebenfalls angedeutet.

R. SCHERER:

Integrationsfehler bei Runge-Kutta-Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren werden üblicherweise mittels Taylorabgleich hergeleitet. Die daraus resultierende Darstellung des Hauptgliedes des Schrittfehlers enthält die entsprechenden elementaren Differentiale, deren Anzahl mit wachsender Ordnung stark zunimmt. Ein anderes Vorgehen basiert auf einer geschickten Einschaltung der Quadraturformeln, welche dem Runge-Kutta-Verfahren und den Zwischenapproximationen zugrunde liegen. Der Schrittfehler läßt sich als Linearkombination von Quadraturrestgliedern darstellen, wobei die einzelnen Fehlerterme voneinander unabhängig sind. Ein Vergleich zeigt, daß dabei die elementaren Differentiale geeignet zusammengefaßt sind. Es ergeben sich Zusammenhänge und Ausblicke etwa zu Differenzenverfahren, Runge-Kutta-Fehlberg, Vordifferentiation und Schrittweitensteuerung.

G. SCHMEISSER:

## Eine Quadraturformel von unendlicher Ordnung

Die Ordnung einer Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(x_\nu) + R_n[f]$$

kann bekanntlich 2n nicht überschreiten; die maximale Ordnung wird nur für die Gauß-Formel erreicht. Selbst wenn man abzählbar unendlich viele Stützstellen zuläßt, kann die Ordnung nicht unendlich werden.

Die Situation ändert sich wesentlich auf unbeschränkten Intervallen. Zu $h > 0$ konstruieren wir eine Quadraturformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n f(nh) + R[f] \ ,$$

wobei für jedes Polynom P (beliebigen Grades)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n P(nh)| < \infty$$

und $R[P] = 0$ gilt .

H.J. SCHMID:

## Konstruktion symmetrischer Kubaturformeln

Es werden Ergebnisse von G. Münzel und G. Renner vorgestellt. Für Integrale vom Typ $I(f) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,\omega(x)\,dx$ mit $\omega(x) = (1-x_{(1)}^2)^\alpha (1-x_{(2)}^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, können symmetrische Kubaturformeln konstruiert werden. G. Renner hat eine Methode des Vortragenden entscheidend verbessert. Hierzu ist der Satz wesentlich, der besagt, daß es ausreicht, ein Ideal a* zu finden, das von den Polynomen

$$R_i = P_i^{k+1} + \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{M_\nu^{k-1}} \delta_{i+\nu} P_\nu^{k-1} , \quad i=0,1,\dots,k+1$$

erzeugt wird. Die $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2k}$ müssen einem nichtlinearen Gleichungssystem und Nebenbedingungen genügen.

Für Formeln, die zu den Achsen und Winkelhalbierenden symmetrisch sind, konnten so für $\alpha=0$ bis zum Grad 11 alle Formeln bestimmt werden. Hierbei mußte z.T. mit Methoden der exakten ganzzahligen Rechnung gearbeitet werden, die G. Münzel mit Hilfe des Programmpaketes SAC-1 entwickelt und implementiert hat.

C. SCHNEIDER:

The error of Wilf's quadrature and of related interpolatory quadratures

Wilf's quadrature may be constructed by integration of a generalized Hermite interpolation operator. We will show the connection between this operator and the polynomial Hermite operator. Then the fixed elements of the generalized Hermite interpolation operator, the remainder of the interpolation, and the error of Wilf's quadrature can easily be derived. An application of the results to Engels' quadrature formulae (- they are constructed via Hermite interpolation of the integrand and its primitive -) yields simple expressions for the associated quadrature error, and leads to the result that any quadrature is interpolatory, i.e. any quadrature may be constructed by a generalized Hermite (or Hermite-Birkhoff) interpolation operator.

A. van der SLUIS:

Asymptotic expansion for quadrature on a simplex

An important property that a quadrature formula may have is that its approximation error has an asymptotic expansion in terms of the size of the domain. In establishing such an asymptotic expansion it is common to use the Euler-McLaurin formula. For quadrature over a simplex this has been done by Lyness with a far from simple proof, based on a theory of generalized Bernoulli-polynomials and ditto Euler-McLaurin formula, which had to be developed for this purpose. In the present lecture a proof of a slight generalization of this result is given which is much simpler and does not use these tools, in line with the author's conviction that these tools are generally unnecessary for establishing asymptotic expansions.

D.D. STANCU:

Quadrature formulas constructed by using certain linear positive operators

One considers a sequence of positive linear operators of interpolation type $(L_m)$, mapping the space $C[a,b]$ into itself, defined for any $f \in C[a,b]$ by a formula of the following form

$$(L_m f)(x) := \sum_{k=o}^{m} q_{m,k}(x) f(x_k),$$

where the nodes $x_k$ are distinct points from $[a,b]$ and $q_{m,k}$ are non-negative polynomials on $[a,b]$, for any $k = O(1)m$ and $m \in \mathbb{N}$. In order that this sequence converge to the identity operator I, one assumes that the convergence occur for a triplet of functions from $C[a,b]$ forming a Korovkin system. It is known that such an operator $L_m$ cannot preserve the quadratic functions only if it coincides with the identity operator.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

By using the operator $L_m$ we construct a quadrature formula for a weighted integral

$$(*)\quad I(w;f) = \int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=o}^{m} A_{m,k} f(x_{m,k}) + R_m(f),$$

where w is a given weight function for which $c_o = I(w;1) > 0$ and $A_{m,k} = I(w;q_{m,k})$ .

If $L_m$ reproduces the linear functions then the degree of exactness of (*) is N = 1 and the remainder can be expressed, according to the Peano theorem, in an integral form

$$R_m(f) = \int_a^b w(x)G_m(t)f''(t)dt, G_m(t) = R_m[(x-t)_+]_x ,$$

or, according to a theorem of T. Popoviciu, by means of a divided difference, in the form

$$R_m(f) = R_m(e_2)\cdot[\xi_1,\xi_2,\xi_3;f] ,$$

under the restriction that $R_m(f) \neq 0$ for any convex function $f \in C[a,b]$ .

Illustrations are given for several operators of Bernstein type.

One remarks that if we choose $w(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ , a = -1, b = 1 and $L_m$ to be the operator of Hermite-Fejér, then the corresponding quadrature formula attains the maximum degree of exactness: N = 2m - 1, because it is easy to see that in this case we obtain the known formula of Gauss-Mehler:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{m} \sum_{k=1}^{m} f(\cos\frac{2k-1}{2m}\pi) + \frac{\pi}{2^{2m-1}} \cdot \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}$$

By using a new linear positive operator, obtained by a probabilistic method, one constructs the following integration formula

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{(m-r+1)(m-r+2)}\left[\sum_{k=0}^{r-1}(m-r-k+1)f\left(\frac{k}{m}\right) + (m-2r+2)\sum_{k=r}^{m-r} f\left(\frac{k}{m}\right) + \sum_{k=m-r+1}^{m}(k-r+1)f\left(\frac{k}{m}\right)\right] - \frac{1}{12m}\left[1+\frac{r(r-1)}{m}\right] f''(\xi)$$

where $0 < \xi < 1$, r is a non-negative integer-parameter and $m > 2r$. For $r = 0$ or $r = 1$ this formula reduces to that corresponding to the Bernstein operator $B_m$.

Some other formulas of this type are investigated.

H. STRAUSS:

Eindeutigkeit bei einseitiger Approximation und Anwendungen in der Momententheorie und bei Quadraturformeln

Gegeben sei ein n-dimensionaler Unterraum G von C(I). Sei $d\alpha(t)$ ein endliches Maß, das positiv auf G ist. Diesem Maß werden diskrete Maße $d\alpha_o(t)$ zugeordnet, so daß $\int g(t)\,d\alpha(t) = \int g(t)\,d\alpha_o(t)$, $g \in G$, gilt. Die diskreten Maße, die minimalen Träger besitzen, nennt man Hauptdarstellungen. Man kann sie auch als Gaußsche Quadraturformeln betrachten. Nun besteht ein Zusammenhang zwischen diesen Hauptdarstellungen und einseitiger $L_1$-Approximation. Folgende Aussagen werden gezeigt.

(1) Es wird eine Charakterisierung der Räume angegeben, für die die Minimallösung bei einseitiger $L_1$-Approximation eindeutig ist.

(2) Mit Hilfe dieser Sätze werden Bedingungen für die Eindeutigkeit von Hauptdarstellungen bewiesen.

K.S. THOMAS:

Improved convergence for product integration

Product Integration is a technique for evaluating the integral

$$\int_0^1 g(x)f(x)dx \ .$$

Usually, the methods are constructed by calculating

$$\int_0^1 g(x)f_N(x)dx \ ,$$

where $f_N(x)$ is a polynomial or spline interpolate of $f(x)$. We show that if we choose $f_N(x)$ to be close in some sense to the least squares approximation of $f(x)$, we can gain extra precision but still utilize the weights of the interpolatory formula.

K. ZELLER:

Integration und Approximation

Bei der Abschätzung des Restes von Quadraturformeln spielen robuste Methoden eine immer größere Rolle. Der Vortrag behandelt und erweitert Methoden dieser Art: Verwendung von Approximationsgraden verschiedener Ordnung (in Verbindung mit Reihenentwicklungen); Verwendung von $L^1$-Approximation. Erste Anwendungen betreffen die Formeln von Clenshaw-Curtis und von Filippi. Ein Ausblick erwähnt folgende Punkte: Verfeinerungen, Varianten, Querverbindungen; Kubatur; schnelle Approximationsprozeduren (grobe Raster, Ein-Buckel-Korrektoren); praktische Komplexität, Grüne Mathematik.

Berichterstatter: G. Hämmerlin

## Adressen der Tagungsteilnehmer

G. Akrivis
Mathematisches Institut
der Universität München
Theresienstr. 39

8000 München 2

Prof. Dr. J. Albrecht
Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Erzstraße 1

3392 Clausthal-Zellerfeld

Dr. Christopher T.H. Baker
Department of Mathematics
University of Manchester

Manchester M13 9PL

England

Dr. Borislav D. Bojanov
Department of Mathematics
University of Sofia
Boul. "A. Ivanov" 5

Sofia 1126, Bulgarien

Prof. Dr. H. Brakhage
Universität Kaiserslautern
Fachbereich Mathematik
Erwin-Schrödinger-Str.

6750 Kaiserslautern

Prof. Dr. H. Braß
Technische Universität
Lehrstuhl E für Mathematik
Pockelsstr. 14

3300 Braunschweig

Prof. Dr. L. Collatz
Institut f. Angewandte Mathem.
der Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Prof. Dr. H. Engels
Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
der RWTH Aachen
Templergraben 55

5100 Aachen

Prof. Henry E. Fettis
1885 California, Apt. 62

Mountain View, CA 94041

U.S.A.

Dipl. Math. K.J. Förster
Lehrstuhl E für Mathematik
TU Braunschweig
Pockelsstraße 14

3300 Braunschweig

Priv.-Doz. Dr. W. Freeden
Institut f. Reine und Angew
Mathematik - RWTH Aachen
Templergraben 55

5100 Aachen

Prof. Dr. Luigi Gatteschi
Istituto di Calcoli Numerici
Università di Torino
Via Carlo Alberto 10

I 10123 Torino, Italien

Prof. Walter Gautschi
Department of Computer Sciences
Purdue University

Lafayette, Indiana 47907

U.S.A.

Prof. Dr. K. Jetter
Auf der Forst 10

4300 Essen-Kettwig

Prof. Dr. Ann Haegemans
University of Leuven
Applied Mathematics Division
Celestynenlaan 200 A

B-3030 Heverlee, Belgien

Dr. D. Kershaw
Department of Mathematics
University of Lancaster

Lancaster, LA1 4YL

England

Prof. Dr. G. Hämmerlin
Mathematisches Institut
der Universität München
Theresienstr. 39

8000 München 2

Dr. J.N. Lyness
Argonne National Laboratory
Applied Mathematics Division

Argonne IL 60439

U.S.A.

Prof. Dr. G. Heindl
Gesamthochschule Wuppertal
Fachbereich 7 - Mathematik -
Gaußstraße 20, Gebäude G14.18

5600 Wuppertal

Prof. Giovanni Monegato
Istituto Matematico
Politecnico di Torino
C.so Duca degli Abruzzi 24

I 10129 Torino, Italien

Prof. Dr. K.H. Hoffmann
Lehrstuhl f. Angew. Mathematik
Universität Augsburg
Memminger Str. 6

8900 Augsburg

Akad. Rat Dr. H. Möller
Fernuniversität Hagen
Fachbereich Mathematik
Postfach 940

5800 Hagen

Prof. Dr. Edward M. Ibrahim
50 Farid Semeka Street

Heliopolis, Cairo

Ägypten

Dipl.-Math. Gerd Neumann
Universität
Gesamthochschule Siegen
FB 6 - Mathematik I
Hölderlinstraße 3

5900 Siegen 21

Prof. Dr. G. Opfer
Universität Hamburg
Institut f. Angew. Mathematik
Bundesstraße 55

2000 Hamburg 13

Dr. Claus Schneider
Johannes Gutenberg-Univ.
Fachbereich Mathematik
Postfach 3980

6500 Mainz

Dr. D.F. Paget
Dept. of Mathematics
Univ. of Tasmania
Box 252 C, G.P.O. Hobart,

Tasmania, Australia, 7001

Prof. A. van der Sluis
Mathematisch Instituut
Budapestlaan 6

Utrecht 3584 CD

Niederlande

Dr. E. Schäfer
Mathematisches Institut
der Universität München
Theresienstr. 39

8000 München 2

Prof. D.D. Stancu
Facultatea de Matematica
Universitate
Str. M. Kogalniceanu 1

R-3400 Cluj-Napoca

Rumänien

Prof. Dr. W. Schempp
Lehrstuhl für Mathematik I
Gesamthochschule Siegen
Hölderlinstr. 3

5900 Siegen 21

Prof. Dr. H. Strauß
Institut f. Angew. Mathem.
Universität Erlangen-Nürnberg
Martensstr. 3

8520 Erlangen

Priv.-Doz. Dr. R. Scherer
Mathematisches Institut
Auf der Morgenstelle 10

7400 Tübingen

Dr. K.S. Thomas
University of Southampton
Faculty of Mathem. Studies

Southampton SO9 5NH

England

Prof. Dr. G. Schmeißer
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Prof. Dr. K. Zeller
Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10

7400 Tübingen 1

Dr. Hans Joachim Schmid
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen