MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 46/1981

Synthetische Methoden in der algebraischen Geometrie

26.10. bis 30.10.1981

Die Tagung fand unter der Leitung von Herrn Timmermann (Hamburg) und Herrn Wefelscheid (Duisburg) statt.

Seit ungefähr 20 Jahren hat W. Burau sich mit der Problematik beschäftigt, einen geometrischen Weg zur algebraischen Geometrie zu finden. Dies hat durch mehrere Berühungspunkte (z.B. Ovale, Spreads, Kettengeometrien) Interesse in anderen Gebieten der Geometrie gefunden.
Ziel dieser Tagung war es, die von Burau und Timmermann erarbeiteten Methoden mit der Arbeitsweise aus den Grundlagen der Geometrie zu vergleichen und wechselseitig zu integrieren.
Ein besonderer Wert wurde auf eine kanonische Verbindung von den Grundlagen der Geometrie zu einer Begründung der algebraischen Geometrie gelegt. Hierzu gehört insbesondere eine auf die geometrischen Gegenstände abgestellte Betrachtungsweise, was u.a. natürlich auch eine koordinatenfreie Behandlung einschließt.
Ein wesentlicher Teil der Vortragsarbeit bestand darin, die Tragfähigkeit dieses Weges an unterschiedlichen Zentralpunkten wie Schmiegräumen, Oskulanten, σ-Prozessen nachzuprüfen. Es zeigte sich, daß nach Ansicht der Teilnehmer diese Begriffe nicht nur synthetisch zugänglich waren, sondern, daß sich auch wesentliche neue Aspekte eröffnen.
Eine besonders tragfähige Verbindung zu den geometrischen Grundlagen ergibt sich durch den Grundgedanken der Burau'schen Methode, durch Elementartransformationen die Diskussion einer Mannigfaltigkeit allein auf die Begriffe der Inzidenzgeometrie zurückzuführen.

Wie weit die Methoden bereits entwickelt sind, mögen die folgenden Ergebnisse illustrieren:
Die Singularitäten einschließlich ihrer Vielfachheiten sind relativ elementar ohne Benutzung der Differentation koordinatenfrei erklärbar. Dies gelingt dadurch, daß alle algebraischen Mannigfaltigkeiten als Schnitt eines linearen Teilraumes mit einem besonders einfachen und übersichtlichen Mannigfaltigkeitstyps erklärt werden.
Z.B. eignet sich hierfür sehr gut die Veronesesche Mannigfaltigkeit V_n^s. Hierdurch lassen sich dann auch die Schmiegraumsätze gewinnen.
Die naheliegenden Projektionen einer Mannigfaltigkeit aus Schmiegräumen der Veronese auf Gegenräume führt bereits zum σ-Prozeß (d.h. zum "Aufblasen" von Singularitäten). Auf diese Weise erhält man anschaulich Einblick in die lokale Struktur der Mannigfaltigkeit.
Ausgespart bei den bisherigen Überlegungen blieben Verbindungen zur algebraischen Topologie, so daß sich die auf diese Weise erhaltenen Sätze auf die klassischen Themenstellungen beschränken.

Vortragsauszüge

W. BURAU:

Es handelt sich bei dem ganzen Unternehmen um folgendes: Die Mannigfaltigkeiten von Segre und Veronese lassen sich rein geometrisch auf der Basis der mehrdimensionalen projektiven Geometrie ohne Rechnung erklären. Durch lineare Schnitte der Veronese V_n^r erklärt man darin algebraische Mengen einer projektiven X_n, speziell durch hyperebene Schnitte Hyperflächen s-ten Grades f_{n-1}^s. Bei den bisher behandelten Themen befinden sich erst die allgemeinen Grundbegriffe bis hin zu den singulären Punkten einer f_{n-1}^s. Bei der großen Fülle an Stoff über spezielle Flächen, der im vorigen Jahrhundert angehäuft wurde, läßt sich ein Ende der Arbeit nicht absehen.

A. HERZER:

Eine basisfreie Darstellung der V_n^r : Ist V ein K-Vektorraum der Dimension n + 1 und r < char K oder K = 0, so läßt sich die V_n^r darstellen durch $\{v^r \mid v \in V\} \subseteq S^r(V)$. Die Schmiegräume sind von der Form $X_n^i = \langle S^{r-i}(u) \cdot S^i(V)\rangle$. Mittels dieses Kalküls läßt sich elegant zeigen, daß die synthetische Definition einer algebraischen Hyperfläche f^r_{n-1}, der Vielfachheit eines ihrer Punkte und dessen Polaren mittels der V^r_n mit der klassischen Definition übereinstimmen.

H. HOTJE:

Eine wesentliche Aufgabe bei der Betrachtung der algebraischen Mengen ist die Untersuchung der Singularitäten. Ein synthetisches Werkzeug dafür ist die Dilatation. Sie ist eine Projektion, die Punkte außerhalb des Zentrums injektiv abbildet. Das Zentrum kann dabei einer Varietät höherer Dimension zugeordnet werden; Singularitäten von Punkten im Zentrum können somit aufgelöst werden. Im Vortrag werden Eigenschaften und Beispiele für Dilatationen angegeben.

H. KARZEL:

Die Oskulanten einer Veroneseschen Mannigfaltigkeit

Jede Veronesesche Mannigfaltigkeit $V^s(X_n)$ läßt sich in natürlicher Weise als Teilmannigfaltigkeit einer Segreschen Mannigfaltigkeit $(X_n)^s$ auffassen. Der Mannigfaltigkeit $V^s\ (X_n)$ entspricht eine duale Veronesesche Mannigfaltigkeit, die aus Hyperebenen von $< (X_n)^s >$ besteht. Der Schnitt dieser Hyperebenen ist der sogenannte Timmermannsche A-Raum $A^{n,s}$, der in $< (X_n)^s >$ komplementär zu dem von $V^s(X_n)$ aufgespannten Raum $< V^s\ (X_n) >$ liegt: $< (X_n)^s > = < V^s\ (X_n) > + A^{n,s}$. Dieser A-Raum hat eine Reihe von merkwürdigen Eigenschaften. Er läßt sich u.a. auch als Graßmann-Mannigfaltigkeit interpretieren. Wir haben uns hier im wesentlichen mit der durch ihn definierten "Grundprojektion" $\downarrow < (X_n)^s > \xrightarrow[A^{n,s}]{} < V^s\ (X_n) >$ beschäftigt, mit der sich eine elegante synthetische Herleitung der Oskulanten der Veroneseschen $V^s\ (X_n)$ angeben läßt.

H.-J. KROLL:

Algebraische Mengen

Der wesentliche Zugang zur algebraischen Geometrie mit synthetischen Methoden besteht in der von Burau erkannten Tatsache, daß jede algebraische Menge sich als Schnitt einer Veroneseschen Mannigfaltigkeit mit einem projektiven Teilraum darstellen läßt. Singuläre Punkte einschließlich des Typs ihrer Vielfachheit lassen sich aus dem Verhalten ihrer Schmiegräume erkennen. Hierbei ist hervorzuheben, daß

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

damit der Singularitätscharakter eines Punktes ohne Benutzung der Differenzierbarkeit gefunden werden kann.

H.J. SAMAGA:

<u>Aufspaltung einer Veronesemannigfaltigkeit und ihre Dimensionsbestimmung</u>

Für $X_o, Y_o \in Y_n$ sei $C^{s-1,i}(X_o,Y_o) := T(V^s(X_o+Y_o);\, i\, ;\, V^s(X_o)) \cap T(V^s(X_o+Y_o);s-i;V^s(Y_o))$ mit $T(V^n_s;t;P_o) = < \{Q_o \in S_{(n)}s \mid d(P_o,Q_o) \leq t\} > \cap < V^s_n >$, $d(P_o,Q_o)$ der für Punkte auf der Segre eingeführte diskrete Abstandsbegriff ("Knickabstand"). $C^{s-1,i}(X_o,Y_o)$ ist ein Punkt im Raum $<V^s_n>$. Sei nun Y_n durch Teilräume A_a, B_b mit $a + b = n - 1$ erzeugt und $C^{s-i,i}(A_a,B_b) := \bigcup_{X_o \in A_a, Y_o \in B_b} C^{s-i,i}(X_o,Y_o)$.

Es wurden u.a. folgende Aussagen diskutiert:

(i) $< V^s_n > = \sum_{i=o}^{s} < C^{s-i,i}(A_a,B_b) >$

(ii) $C^{s-i,i}(A_a,B_b) = Pr_{A^{n,s}}(V^{s-i}_a * V^i_b)$ für $i = o,\dots, s$

Hierbei ist $Pr_{A^{n,s}}$ die Projektion $< S_{(n)}s > \rightarrow < V^s_n >$ mit Zentrum

$$A^{n,s} := \bigcap_{V^s_{n-1} \subset V^s_n} T(S_{(n)}s;s-1;V^s_{n-1})$$

(iii) $\dim < C^{s-i,i}(A_a,B_b) > = \binom{a+s-i}{s-i} \cdot \binom{b+i}{i} - 1$

H. TIMMERMANN:

Die oben angegebene Zerlegung einer Segremannigfaltigkeit induziert eine entsprechende Zerlegung einer V^s_n. Bei entsprechenden Projektionen kann man das Bild von V^s_n und der Zerlegung beschreiben. Diese Abbildungen werden als Dilatationen erklärt. Mit diesen Dilatationen läßt sich die 'Umgebung" eines linearen Raumes synthetisch untersuchen.

H. WEFELSCHEID:

Synthetische Zugänge zu den allgemeinen Segre'schen Mannigfaltigkeiten $S_{n_1,\ldots,}$

Es gibt mehrere basisfreie rein synthetische Beschreibungen der Segre'schen $S_{n_1,\ldots n_s}$. Einen besonders schönen Zugang erhält man mit Hilfe des Satzes von Dandelin, bei dem man die $S_{n_1,\ldots,n_s}$ rekursiv aus $S_{n_1,\ldots n_{s-1}}$ als Vereinigung von Treff-Räumen be - schreibt. Eine weitere ist die Beschreibung einer $S_{n_1,\ldots,n_s}$ mit Hilfe einer Flagge. Hier wird dann die Segre dargestellt als Punkte der projektiven Räume aller s-tupel, die eine $(n_1,\ldots,n_s)$-Kette $(P_{n_1},\ldots,P_{n_s})$ bilden. Die Schmiegräume der verschiedenen Stufen lassen sich mit Hilfe des "Knick-Abstandes" einfach bestimmen.

J. ZEUGE:

Klassifikation der Singularitäten ebener Kurven

Sei $f_1^s \subset X_2$ eine Kurve der Ordnung s und $X_o \in f_1^s$ ein singulärer Punkt der Vielfachheit $k < s$. Dann ist $V^s(f_1^s) = V_2^s \cap H$, wobei $H \subset \langle V_2^s \rangle$ eine Hyperebene ist. Sei π die Dilatation der V_2^s mit Zentren $T(V_2^s,k-1,V^s(X_o))$. Dann ist $\pi(V_2^s)$ eine Fläche F, die durch V_1^{s-k} gefasert ist und $\pi(V^s(X_o))$ ist eine V_1^k. Sei $\pi(H) = H'$. Dann liefern die Divisoren $V_1^k \cap H'$ eine Klassifikation der Singularitäten X_o. Für jeden Divisor $V_o \in V_1^k \cap H'$ eine feinere Klassifikation durch die Zahl $0 \leq t < s - k$ durch die Bedingung:

$T\ (V_1^{s-k}\ (V_o);\ t;\ V_o) < H'$ und $T\ (V_1^{s-k}\ (V_o);\ t+1;\ V_o) \not< H.$

Berichterstatter: H. Wefelscheid

Tagungsteilnehmer

Herrn
Prof. Dr. R. Artzy
z.Zt. Math. Institut der Technischen
Universität München
Arcisstr. 21

8ooo München 2

Herrn
Prof. Dr. W. Burau
Math. Seminar der Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. A. Herzer
Math. Institut der Universität Mainz
Saarstr. 21

65oo Mainz

Herrn
Prof. Dr. H. Hotje
Math. Institut der Technischen
Universität Hannover
Welfengarten 1

3ooo Hannover 1

Herrn
Prof. Dr. H. Karzel
Math. Institut der Technischen
Universität München
Arcisstr. 21

8ooo München 2

Herrn
Prof. Dr. H. J. Kroll
Math. Institut der Technischen
Universität München
Arcisstr. 21

8ooo MOnchen 2

Herrn
Dr. H. J. Samaga
Math. Seminar der Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2ooo Hamburg 13

Herrn
Priv. Doz. Dr. H. Timmermann
Bundesstr. 48

2ooo Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. H. Wefelscheid
Fachbereich Mathematik der Universität
Duisburg
Lotharstr. 65

41oo Duisburg

Herrn
Dr. D. Windelberg
Math. Institut der Technischen
Universität Hannover
Welfengarten 1

3ooo Hannover 1

Herrn
Dr. J. Zeuge
Hochschule der Bundeswehr
Holstenhofstr.

2ooo Hamburg 76