MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 12/1985

Partielle Differentialgleichungen

3.3. bis 9.3.1985

Die dreizehnte Tagung über partielle Differentialgleichungen fand wieder unter der Leitung der Herren G. Hellwig (Aachen) und J. Weidmann (Frankfurt) statt. Das große Interesse an dieser Tagung spiegelt die hohe Zahl von 52 Teilnehmern wider, von denen 16 aus dem Ausland kamen. Zahlreiche Wünsche weiterer Interessenten konnten leider keine Befriedigung finden.
Das enorme Vortragsprogramm (35 Vorträge) verlangte den Teilnehmern einiges ab. Die Themen überstrichen ein weites Feld: Von (meist nichtlinearen) Differentialgleichungsproblemen aus der Biologie und Physik, die einen breiten Raum einnahmen, über mehr differentialgeometrische Probleme bis zu spektraltheoretischen Fragen wurden zahlreiche aktuelle Probleme behandelt.
Der Reiz dieser Tagung ist wohl auch in der Breite der hier behandelten Themen zu sehen. Im Vorwort zur ersten Auflage von Courant-Hilbert I schrieb R. Courant: "Der Strom der wissenschaftlichen Entwicklung ist in Gefahr, sich weiter und weiter zu verästeln, zu versickern und auszutrocknen. Soll er diesem Geschick entgehen, so müssen wir einen guten Teil unserer Kräfte darauf richten, Getrenntes wieder zu vereinigen ...". Die Tagung leistete in diesem Sinne einen sehr guten Beitrag.

Die Teilnehmer der Tagung danken der Tagungsleitung für die wissenschaftliche Betreuung, besonders aber der Leitung des Instituts und dem freundlichen Personal des Hauses für die perfekte Durchführung und den anregenden, angenehmen Rahmen.

Vortragsauszüge

W. ABRAMCZUK:

On continuation of quasi-analytic solutions of partial differential equations to compact convex sets

In the early 70's A. Kaneko studied the problem of continuation of regular solutions of systems of linear partial differential equations with constant coefficients to compact convex sets. We show here that the conditions he obtained for real analytic solutions also hold in the quasi-analytic case. In particular we show that every quasi-analytic solution of the system $p(D)u = 0$ defined outside a compact convex subset K of R^n can be continued as a quasi-analytic solution to K if and only if the system is determined and the P-module $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Coker}\ p', \mathcal{P})$ has no elliptic component; here $\mathcal{P}$ is the ring of polynomials in n variables, p is a matrix with elements from $\mathcal{P}$ and p' is the transposed matrix. In the scalar case, i.e. when p is a single polynomial, these conditions mean that p has no elliptic factor.

H. D. ALBER:

Local existence of weak solutions to the quasilinear wave equation for nonsmooth large initial values

Es wird gezeigt, daß die quasilineare Wellengleichung

$$u_{tt} = \sigma(u_x)_x$$

in einer Raumdimension schwache Lösungen besitzt zu allen Anfangswerten mit beschränkter Variation, falls σ eine bestimmte Voraussetzung erfüllt. Diese Voraussetzung ist notwendig und hinreichend.

H. AMANN:

Existence and regularity for quasilinear parabolic systems

We indicate the principal ideas of a proof for the existence of a maximal classical solution of strongly coupled quasilinear parabolic systems under nonlinear boundary conditions. It depends crucially upon a new device for the construction of a fundamental solution for linear parabolic evolution equations with time-dependent domain.

J. BEMELMANS:

Stationäre Strömungen in Flüssigkeitskörpern

Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten legt es nahe zu untersuchen, ob es auch Lösungen für derartige freie Randwertprobleme gibt, bei denen im Inneren des Flüssigkeitskörpers Strömungen auftreten können. Das Problem gehört damit nicht länger zum Bereich der Hydrostatik, sondern zur Hydrodynamik.
Die Frage nach stationären Lösungen führt auf ein freies Randwertproblem, das (im Gegensatz zum analogen zeitabhängigen Problem) hinsichtlich der Regularität entartet. Dies erfordert die Anwendung von harten Implizite-Funktionen-Sätzen. Ein wesentliches Hilfsmittel zur Gewinnung der dazu nötigen Abschätzungen stellt die Integralgleichung von Lichtenstein dar, mit der klassische Gleichgewichtsfiguren beschrieben werden.

A. BORZYMOWSKI:

Goursat problems for polyvibrating equations of D. Mangeron

In almost all papers devoted to the Goursat problems for partial differential equations of order $m > 2$, the boundary conditions have been given either on 2 curves /surfaces/ or on the characteristics

of the equation considered or, finally, on the characteristics and one non-characteristic curve /see e.g. W. Haack and G. Hellwig 1950, J. Persson 1969, M. N. Oǧuztöreli 1972, G. Hecquet 1977, S. A. Aldashev 1982/. The case of a greater number of non-characteristic curves was examined in a special case by O. Sjöstrand 1929/.
In this lecture we present some new results concerning Goursat problems /both linear and nonlinear/ for the so-called Mangeron polyvibrating equations of order 2p /where $p \geq 2$/ in a Banach space, with the boundary conditions given on 2p non-characteristic curves emanating from a common point. We also mention some results regarding Goursat problems for the polyvibrating equations of order 3p with 3 independent variables.

M. COSTABEL:

Strong ellipticity of boundary integral operators of the first kind

Strong ellipticity in the form of a Gårding inequality
$\mathrm{Re}\langle v,Av\rangle \geq \lambda\|v\|^2 - \mathrm{Re}\langle v,Cv\rangle$
with a compact operator C provides for the operator A among other nice properties also the convergence of several classes of numerical approximation schemes. For integral operators used for the solution of linear elliptic boundary value problems, the strong ellipticity can be tested using symbolic calculi, in the case of smooth boundaries that of pseudodifferential operators, and in the case of plane domains with corners that of Mellin operators. But there exists also a proof using only Green's first formula that shows for a large class of boundary value problems in variational form how to solve them with boundary integral operators that satisfy a Gårding inequality in the energy norm. In case of the classical Dirichlet or Neumann problems these are Fredholm resp. hypersingular integral operators of the first kind. The proof works also for a class of mixed boundary conditions and for second order systems also for Lipschitz boundaries.

H. L. CYCON:

Resonances defined by modified dilations

We construct a method generalizing the usual complex scaling method of Aguilar, Balslev and Combes to describe resonances of Schrödinger operators. The method is based on a modified dilation in momentum space and allows to treat multicenterpotentials and potentials with compact support.

G. FICHERA:

Unification of Global and Local Existence Theorems for Holomorphic Functions of Several Complex Variables

Let Ω be a bounded domain of $\mathbb{C}^n$. The Dirichlet problem for a function w of n complex variables $z_1,\dots,z_n$, holomorphic in Ω was first considered by Severi (1931) for $n = 2$. Severi assumes $\partial\Omega \in C^\omega$ and the prescribed boundary values W of w on $\partial\Omega$ also in C^ω. He proves that a (unique) solution exists holomorphic in a domain $\Omega_o (\Omega_o \supset \bar{\Omega})$ if and only if the tangential Cauchy-Riemann equation $\bar{\partial}_\Sigma W = 0$ (i.e. $dW \wedge dz_1 \wedge dz_2 = 0$ on $\partial\Omega$) is satisfied. The Severi theorem was extended to "non-analytic" data (i.e. $\partial\Omega$ and W smooth but not C^ω) and to arbitrary n by Fichera (1957), Martinelli (1961), Weinstock (1970) and others. The "local problem" (i.e. W defined only in a neighborhood Δ of a point z^o on $\partial\Omega$ and w required to exist only in a neighborhood of z^o on $\bar{\Omega}$) was considered (for $n=2$) by H. Lewy (1956) who proved the existence of w, provided a certain pseudo-convexity condition is satisfied by Δ in z^o, in addition to the condition $\bar{\partial}_\Sigma W = 0$ on Δ. The existence may fail to hold if this pseudo-convexity condition is dropped. It must be observed that this existence theorem universally attributed to H. Lewy was already known to Kneser (1936). The strange peculiarity of the Kneser-H.Lewy local existence theorem is that it requires a pseudo-convexity condition not needed in the problem in the large. In the paper a general existence theorem is given which unifies the existence theorems of Severi, Fichera, Kneser-H.Lewy, etc. It is based, in addition to the tangential condition, on a geometric hypothesis which is automatically satisfied for the problem in the large (Dirichlet problem) and is a consequence of the pseudo-convexity condition, imposed by Kneser-H.Lewy, in the local case.

J. FLECKINGER-PELLÉ:

Eigenvalues of "non definite" elliptic problems

Let us consider for example the following eigenvalue problem:

$$\begin{cases}(-\Delta + q)u = \lambda g u & \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = o & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

- Ω is not necessarly bounded
- q is bounded below (but not necessarly positive) and tends to $+\infty$ at infinity
- g changes sign

We obtained asymptotics and estimates on the eigenvalues. The existence of (positive) "principal eigenvalues" is studied.

P. HESS:

Linear elliptic eigenvalue problems with an indefinite weight function

The linear elliptic eigenvalue problem $\mathcal{L}u = \lambda m u$ in Ω, $u = 0$ on $\partial\Omega$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bounded, $\mathcal{L}u := -\Sigma a_{jk} \dfrac{\partial^2 u}{\partial k_j \partial x_k} + \Sigma a_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + a_o$ uniformly elliptic with real coefficient function $a_{jk}, a_j, a_o \geq 0$) is studied. Here $m \in C(\bar{\Omega})$ is a real weight function.

Theorem 1: (with T. Kato). $\exists$ (principal) eigenvalue $\lambda_1 > 0$ having a positive eigenfunction $\iff m \not\leq 0$. Further λ_1 enjoys all the properties that are well-known if $m = 1$.
Similarly there exists a principal eigenvalue $\lambda_{-1} < 0$ if $m(x) < 0$ at some $x \in \Omega$.

Theorem 2: (i) $\forall\ 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, almost all eigenvalues lie in the two sectors $G_\varepsilon^+ := \{g \in \mathbb{C} : |\arg g| < \varepsilon\}$ and $G_\varepsilon^- := \{g \in \mathbb{C} : |\pi - \arg g| < \varepsilon\}$

(ii) the system of generalized eigenfunctions of $L^{-1}M$ is complete in $R(L^{-1}M)$ (L,M being the operators induced by $\mathcal{L}, m$ in $L^2(\Omega)$).

(iii) $\exists$ infinitely many eigenvalues in $G_\varepsilon^+ \iff m(x) > 0$ at some $x \in \Omega$.

W. JÄGER:

On a diffusion-reaction system modelling growth of microorganisms

The mathematical modelling of bacterial cultures in a chemostat leads to a system of nonlinear ordinary differential equations. A system of coupled chemostats is called a gradostat and can be described by differential equations containing the discretization of the Laplace operator. The asymptotic behaviour of positive solutions is analized in case of competition for a substrate. If S_i and u_i^ℓ are the concentrations of the substrate and the ℓ-th population in the i-th vessel ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq \ell \leq k$), the system has the form

$$\frac{d}{dt} S_i = D\Delta_i S - \sum_{\ell=1}^{k} \frac{f^\ell(S_i)}{y^\ell} u_i^\ell$$

$$\frac{d}{dt} u_i^\ell = D\Delta_i u^\ell + f^\ell(S_i)\, u_i^\ell \quad ,$$

Where the dilution rate D is considered as parameter. Under certain assumptions on f, the branches of positive steady states can be obtained using the methods of strongly increasing, strongly sublinear mappings in ordered Banach spaces. If $k = 1$ there exists a critical

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

parameter value D^* such that the population dies out for $D > D^*$ and survives for $D < D^*$ as $t \to \infty$. Assuming further estimates on f^ℓ the case $k \geq 1$ can be handled. However, in general the dynamical behaviour is not totally understood. Especially the problem of possible coexistence is not yet treated analytically.

B. KAWOHL:

On a conjecture of J. Rauch and the isoperimetric nature of a rearrangement inequality

J. Rauch conjectured that the first nonconstant eigenfunction of the Laplacian under Neumann b c s attains its maximum on the boundary. We give a proof of this for cylindrical domains $\Omega = \Omega' x (o,w) \subset \mathbb{R}^n$. The proof rests on the equality sign in $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \int_\Omega |\nabla u^*|^2 dx$, where u^* denotes a suitable rearrangement of u. Equality holds only if $u_{x_n} \leq o$ in Ω or $u_{x_n} \geq o$ in Ω. This can also be applied to nonlinear free boundary problems, e.g. the dam problem. Supposedly Saint Venant conjectured that if $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is bounded, convex and symmetric in x and y and $\Delta u = -1$ in Ω, $u = o$ on $\partial\Omega$, then $|\nabla u|$ attains its maximum in those points on the boundary which have minimal distance to the origin. If the curvature of $\partial\Omega \cap \{x \geq o,\ y \geq o\}$ increases with x, then one can use the moving plane method for a proof of the conjecture. Incidentally the conclusion remains true for any nonlinear elliptic equation for which the results of Gidas, Ni and Nirenberg hold.

R. LANDES:

Existence of weak solutions for perturbated parabolic problems

Considering the parabolic initial boundary value problem

$$(P)\quad \begin{cases} u' + A(u) + g(u) = f & \text{in } Q_T = (0,T) \times \Omega, \quad \Omega \text{ bounded } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(0) = \varphi \\ D^\alpha u\big|_{\partial\Omega} = 0\ , \ |\alpha| \leq m-1\ . \end{cases}$$

we present sufficient condition for the 2m-th order quasilinear operator $A(u)$ and the perturbation $g(u)$ of lowest order to obtain existence results for (P).
Assuming $g(u)\, u \geq \lambda$, $\lambda \in L^1(Q_T)$, we show that Leray-Lions conditions for $A(u)$ imply the existence of weak solutions in case $m = 1$.
In case $m \geq 2$ the result can be obtained by the additional hypothesis that $A(u)$ has a potential.

N. A. LARKIN:

Solvability of nonlinear hyperbolic equations without smallness conditions

In the cylinder Q the initial-boundary value problem for the nonlinear hyperbolic equation is considered

$$Lu = K(u)u_{tt} - \Delta u + |u_t|^\rho u_t = f(x,t) \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

where $K(u) \geq \delta > 0$, $\rho > 1$; Ω is a domain in R^n with a smooth boundary; $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$. For arbitrary n the existence theorem of a generalized solution for (1) , (2) is proved. For $n = 2$ the smoothness of the generalized solution is proved without any smallness conditions on f, φ, ψ.

G. LUMER:

New methods for time-dependent evolution equations of hyperbolic and parabolic type

We study the semigroups and operators in space-time (parabolic and standard parabolic operators and semigroups, propagators, evolution operators) which are used in the solution of time-dependent evolution problems with initial time included, both in the usual context (Kato theory) an in the space-time context. (For our first results of this kind, and refernces to related work, see C. R. Acad. Sci. Paris t. 300 serie 1, 1985, p. 169-172). We compare the solvability (and solutions) of the evolution problems in the usual and space-time context. We study the weak, strong, and strong $W^{1,\infty}$ evolution operators, and related perturbation and approximation results, mainly in connection with the existence of weak evolution operators associated to a family of operators $A(t)$ defined on a closed time-interval $[S,T]$. The results are applicable to both parabolic and hyperbolic linear evolution probems.

E. MEISTER:

Zur Fredholmtheorie singulärer Integro-Differentialoperatoren auf der Halbachse

Es werden singuläre Integralgleichungen der Form

$$Au := a(\cdot)\cdot u+b(\cdot)Hu+c(\cdot)H_\omega u+d(\cdot)K_k u+e(\cdot)K_l Hu = f \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R}_+)$$

$1<p<\infty$, und dazugehörige Integro-Differentialgleichungen $Bu = f$ mit $u \in \overset{(o)}{W}{}^{m,p}(\mathbb{R}_+)$ und $Bu = \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu D^\mu u$ studiert. H bezeichne die einseitige Hilberttransformation, H_ω eine Mellin-Faltung (Hardykern) und K_k, K_l Wiener-Hopf-Faltungen auf $\mathbb{R}_+$. Es wird eine B-Algebra aufgebaut aus den stetigen Funktionen $a,\dots,e \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$, H_ω, H und K_{k_e}

mit $k_e \in L^1(\mathbb{R})$ gerade. Modulo den kompakten Operatoren auf $L^p(\mathbb{R}_+)$ ergibt sich eine kommutative B-Algebra mit Symbol σ. Die Symbole der erzeugenden Elemente werden angegeben und das Fredholmkriterium für Operatoren A oder B als Nichtverschwinden des Symbols auf dem Schilowrand, der hier ein geschlossenes räumliches Kantenpolygon des dreidimensionalen Würfels ist, hergeleitet. In Sonderfällen gelingt die explizite Konstruktion von Regularisatoren in der Algebra: klassische Wiener-Hopf-Operatoren, Cauchy-Operatoren (auch solche mit variablen Koeffizienten!), Mellinfaltungen. Übertragung auf $n \times n$ - Systeme ist möglich. Abschätzungen für die Defektpaare $(\alpha,\beta) \in N_o \times N_o$ und Regularitätseigenschaften werden angegeben.

A. ORTH:

Zur Charakterisierung von Resonanzen von Mehrteilchen-Schrödinger-operatoren

Ausgehend von einem ungestörten selbstadjungierten Operator H_o in einem Hilbertraum mit einfachem (eingebetteten) Eigenwert und zugehörigem Eigenvektor ψ_o, betreiben wir eine Störungstheorie für Operatoren der Gestalt $H(\kappa) = H_o + \kappa W$. Unter geeigneten Voraussetzungen besitz $H(\kappa)$ bei λ_o eine spektrale Konzentration und es liegt Resonanz vor, in dem Sinne, daß

$$|\langle\psi_o, e^{-iH(\kappa)t}\psi_o\rangle| = ce^{-T(\kappa)t} + R(\kappa,t)$$

mit $|R(\kappa,t)| \leq c(\kappa) \to 0$ mit $\kappa \to 0$ und $T(\kappa) = O(\kappa^2)$.

Die Voraussetzungen lassen eine Anwendung auf Mehrteilchen-Schrödinger-operatoren und eine Beschreibung des im He- Atom auftretenden Anger-Effekts zu.

N. ORTNER:

Eine Anwendung der Faltung von Distributionen: Fundamentallösung eines zerlegbaren, parabolischen Differentialoperators 4. Ordnung

Sind E_i, $i = 1,2$ Fundamentallösungen der linearen Differentialoperatoren $P_i(\partial)$ mit konstanten Koeffizienten, und sind E_1 und E_2 faltbar, so ist $E_1 * E_2$ eine Fundamentallösung von $(P_1 P_2)(\partial)$.

Nimmt man $P_1(\partial) = \partial_t - \Delta_n - \mu$ und $P_2(\partial) = \partial_t - \Delta_{n,a} - \nu$ (mit $\Delta_{n,a} = a_1^2 \partial_1^2 + \ldots + a_n^2 \partial_n^2$, $\Delta_n = \Delta_{n,1}$; $\mu, \nu \in \mathbb{C}$) und

$$E_2 = \frac{Y_t}{(4\pi t)^{n/2} a_1 \ldots a_n} \, e^{\nu t - \frac{1}{4t}|x|_a^2}, \quad E_1 = E_2 \text{ für alle } a_1 = \ldots = a_n = 1, \nu \to \mu$$

($|x|_a^2 := \frac{1}{a_1^2} x_1^2 + \ldots + \frac{1}{a_n^2} x_n^2$, Y_t : Heavisidefunktion),

so sind E_1 und E_2 im Sinn von L. Schwartz-J.Horvàth faltbar, und eine Fundamentallösung von $(\partial_t - \Delta_n - \mu)(\partial_t - \Delta_{n,a} - \nu)$ ist:

$$E_1 * E_2 = \frac{t^{1-\frac{n}{2}} Y_t}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^1 e^{[\mu\lambda + \nu(1-\lambda)]t - \frac{1}{4t} A(\lambda, x)} \, \frac{d\lambda}{D(\lambda)},$$

$$A(\lambda, x) := \frac{1}{\lambda + (1-\lambda) a_1^2} x_1^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda + (1-\lambda) a_n^2} x_n^2, \quad D(\lambda) := \sqrt{[\lambda + (1-\lambda) a_1^2] \ldots [\lambda + (1-\lambda) a_n^2]}$$

Eine "regularisierte Form" der Hadamardschen Absteigemethode (="Integration bezüglich t") ergibt dann die von H.G.Garnir angegebene Fundamentallösung von $(\Delta_n + \mu)(\Delta_{n,a} + \nu)$ (Sur la solution élémentaire pour l'espace indéfini d'un opérateur elliptique décomposable du 4eme ordre. Acad.Roy.Belg.Bull.Cl.Sci.(5), 38 (1952, 1129-1141).

Schließlich kann daraus für $n = 3$, $\mu = 0$ die von Dirichlet angegebene Darstellung des Newtonschen Potentials eines Vollellipsoids gewonnen werden.

R. PICARD:

The low frequency asymptotics in acoustics

The behaviour of the solution of the Dirichlet boundary value problem of linearized acoustics as the frequency tends to zero is considered. In the bounded domain case it is natural to suggest to use orthogonality to homogeneous solutions (in the sense of the energy inner product) as an additional set of conditions. This would indeed yield uniqueness of the limit solution (static case), which is a necessary ingredient for controlling the low frequency behaviour of the solution. In the exterior domain case, however, the unboundedness of the energy norm leads to dificulties even to formulate such a condition. The aim is to find characteristic features that can replace conditions of that type. It will be shown, that the limiting absorption principle remains valid if the (complex) frequency tends to zero. This implies in particular that radiation field (for real frequencies) converge to static solutions as the frequency tends to zero.

R. RACKE:

Eigenfunktionsentwicklungen (nicht-) selbstadjungierter Operatoren

Am Beispiel des Thermoelastizitätsoperators, betrachtet für den homogenen, isotropen Ganzraumfall, leiten wir Spektralsätze für eine Klasse (nicht-) selbstadjungierter Differentialoperatoren mit geeigneten Spektraleigenschaften her in Form von Entwicklungen nach verallgemeinerten Eigenfunktionen, die wir durch Fouriertransformation erhalten. Im Beispiel des Thermoelastizitätsoperators liefert der gewonnene Spektralsatz eine Darstellung der Lösung des zugehörigen zeitabhängigen Systems und erlaubt damit eine Beschreibung des zeitasymptotischen Verhaltens der Lösung.

A. G. RAMM:

Some Inverse Scattering Problems of Geophysics

Let $(\Delta + k^2 n(x))u = -\delta(x-y)$, $k>0$, $x,y \in R^3$, $n(x) = 1 + v(x)$, $v(x) = 0$ if $x_3 < 0$ or $|x| > R$, where $R > 0$ is an arbitrary large fixed number. Suppose that $u(x,y,k)$ is known for all x and y on a certain surface S which does not intersect the support of $v(x)$, and for small k. Can one find $v(x)$ from these data?
This problem will be discussed for the cases when S is a plane, a sphere, and a cylinder. Some closely related inverse scattering problems of interest in geophysics will be also discussed (inverse potential scattering at a fixed energy, multiparameter imaging, etc.).

References: A. G. Ramm, Phys. Lett., 99A, (1983), 258-260, 201-204.

M. SCHNEIDER:

A finite element method for a boundary value problem of mixed type

Untersucht wird das Frankl-Morawetz Problem der nichtlinearen Gleichung gemischten Typs mit homogenen Randbedingungen

(1) $L[u] = k(y)u_{xx} + u_{yy} = f(x,y,u)$; $k(y) \lesseqgtr 0$ entsprechend $y \lesseqgtr 0$.

Ist $W = \{u \mid u \quad H^2(G),\ u|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0\}$, $\ell v = \alpha^1 v_x + \alpha^2 v_y$ $(\alpha^1, \alpha^2$ fest gewählt), so wird $u \in W$ verallgemeinerte Lösung von (1) genannt, falls gilt

(2) $B[u,v] = (L[u], \ell v)_0 = (f(x,y,u), \ell v)_0$ für alle $v \in W$.

Sind $\{W_h\}_{h>0}$ endlich dimensionale Teilräume von W, so ist u_h Näherungslösung der verallgemeinerten Lösung $u \in W$, falls gilt

$$B[u_h, v_h] = (L[u_h], \ell v_h)_0 = (f(x,y,u_h), \ell v_h)_0 \text{ für alle } v_h \in W_h.$$

Die Existenz der Näherungslösungen u_h wird bewiesen, so wie eine Abschätzung der Form

$$\|u - u_h\|_{\tilde{H}_1(G)} \leq C \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_{\tilde{H}_2(G)} ,$$

wobei u Lösung von (2) ist.

F. SCHULZ:

Über nichtlineare, konkave elliptische Differentialgleichungen

Es wurden a priori-Abschätzungen hergeleitet für die Hölder-Seminormen der zweiten Ableitungen der Lösungen $u = u(x)$ nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen

$$F(x,u,Du,D^2u) = 0 .$$

Dabei ist F eine konkave (oder konvexe) Funktion bezüglich der Variablen u_{kl}, die für die zweiten Ableitungen von $u(x)$ stehen. Beispiele sind die Monge-Ampèresche Gleichung sowie die Hamilton-Jacobi-Bellman-Pucci-Gleichung. Die Beweismethoden wurden illustriert mit Hilfe der aus der Regularitätstheorie quasilinearer elliptischer Systeme von Variationsstruktur bekannten Technik der Greenschen Funktion.

C. G. SIMADER:

Höhere Differenzierbarkeit schwacher Lösungen streng nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen

In einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^N$ wird die Differentialgleichung

$$(\nabla u, \nabla \Phi) + \sum_{i=1}^{N} (g_i(\partial_i u), \partial_i \Phi) + (g_o(u), \Phi) = (t, \Phi)$$

für alle $\Phi \in C_o^\infty(G)$ betrachtet, wobei $u \in H_o^{1,2}(G)$, $g_i(\partial_i u)\partial_i u \in L^1(G)$, $g_i(\partial_i u) \in L^1_{loc}(G)$ und $f \in L^2(G)$ vorausgesetzt wird. Für die Nichtlinearitäten definierenden Funktionen $g_i\,(i=0,1,..,N)$ wird grobgesprochen angenommen, daß die $g_i \in C^1(\mathbb{R})$ monoton nicht fallende, ungerade Funktionen sind mit $g_i(t)\cdot t \geq 0$ für $t \in \mathbb{R}$. Weiter sei für $i = 1,..,N$ und $G_i(t) := \int_o^t g_i(s)ds$ eine Δ_2-Bedingung (d.h. $G_i(2t) \leq \kappa G_i(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$) gültig, sowie eine Isotropiebedingung, d.h. $|g_i(t)| \leq \gamma |g_k(t)|$ für $i,k=1,..,N, t \in \mathbb{R}$. Dann kann für $G_o \subset\subset G$ gezeigt werden: $u\big|_{G_o} \in H^{2,2}(G_o)$, $g_i'(\partial_i u)(\partial_i \partial_k u)^2\big|_{G_o} \in L^1(G_o)$,

$g_o'(u)(\partial_k u)^2\big|_{G_o} \in L^1(G_o)$ sowie eine a-priori-Abschätzung. Dann löst u die Differentialgleichung stark. Die Methode läßt sich auch auf den Fall anwenden, daß $(\nabla u, \nabla\Phi)$ ersetzt wird durch eine positiv elliptische stetige Bilinearform B der Ordnung m (d.h. $B[u,u] \geq C\,\|u\|^2_{m,2}$) und die strengen Nichtlinearitäten bis zur Ordnung m gehen. Man erhält dann $u \in W^{m+1,2}(G_o)$.

G. STRÖHMER:

A-priori estimates for certain singular perturbation problems arising from the calculus of variations

If $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with a smooth boundary and $Z = \{U \in C^1(\bar\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = f\}$ $(f \in C^{2+\beta}(\partial\Omega))$ then let

$$I_i(u) = \int_\Omega F_i(x,u,\nabla u)\,dx \qquad (i = 1,2)$$

be two functionals leading to uniformly elliptic Euler equations. Then the Euler-Lagrange equation of the problem of minimizing I_1 on $Z_\alpha = \{u \in Z \mid I_2(u) \leq \alpha\}$ is such that all bounded solutions can be estimated a-priori in $C^{2+\beta}$ independent of the Lagrange parameter. The variational problem given by (I_1,Z) can thus be endowed with a stronger topology by imposing an artificial "removable" constraint. This permits then to prove a rather strong mountain-pass lemma and a Morse theory for the unconstrained problem.

M. STRUWE:

On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces

The "heat flow" associated with harmonic mappings of (compact) Riemannian surfaces M into (compact) manifolds N is considered. For arbitrary initial values with finite energy the existence of a global weak solution u is obtained which is regular with exception of at most finitely many points in $M\times]0,\infty[$ where harmonic spheres $\bar{u} : S^2 \to N$ separate. The solution is unique in this class. Moreover, for $t \to \infty, u(\cdot,t)$ converges to a harmonic map $\bar{u}_\infty : M \to N$. As an application a direct proof of existence results for harmonic maps by Sacks-Uhlenbeck and Lemaire is obtained.

G. TALENTI:

Level lines and lines of steepest descent

I plan to discuss some properties of the curvature of level lines of solutions to p.d.e.
Questions on the Gauss curvature of the graph of harmonic functions will also be presented.

K. VESELIC:

The Klein-Gordon equation in a strong electric field - An exactly solvable case

The Klein-Gordon equation

$$(i\,h\frac{\partial}{\partial t} - V(x))^2\psi = (-e^2 h^2 \Delta + m^2 c^4)\psi \;, \; x \in \mathbb{R}^3$$

is considered with the potential $V(x) = \eta x_1$. It is proved that the evolution group, generated by this equation is uniformly bounded in the so-called "number scalar product". This indicates that a standard selfadjoint spectral theory can be expected to hold for a class of potentials much larger than that of relatively bounded ones.

V. VOGELSANG:

Über das absolut stetige Spektrum der Diracgleichung für long range Potentiale

Für die Diracgleichung mit einem Magnetfeld und elektrischem Feld bzw. allgemeiner mit einem hermiteschen Matrixpotential $P = P_1 + P_2$ ($P_1, [r\partial_r P_1]_- = o(1)$ long range und P_2 short range) wird die Abwesenheit des singulär stetigen Spektrums und die Freiheit von Punkteigenwerten innerhalb des stetigen Spektrums bewiesen. Zugelassen sind auch Coulombartige Singularitäten und anormale magnetische Momente. Der Beweis beruht auf der Rellichschen Darstellung der Diracgleichung als Evolutionsgleichung in $r = |x|$ und der Berechnung geeigneter Energiefunktionale bzw. Kommutatorrelationen. Das Prinzip der Grenzabsorption führt auf ein nichttriviales Eindeutigkeitsproblem für Funktionen außerhalb L^2 und erfordert Projektions- sowie logarithmische blow up Techniken.

J. VOIGT:

The heat equation with absorption in $L_p(\mathbb{R}^\nu)$

For $1 \leq p < \infty$, let $(U_p(t); t \geq 0)$ be the C_o-semigroup on $L_p(\mathbb{R}^\nu)$ corresponding to the heat equation $u_t = \frac{1}{2}\Delta u$, i.e., $U_p(t)f = k_t * f$ $(t > 0,\ f \in L_p)$, where $k_t(\cdot)$ is the heat kernel. Denote by H_p the negative generator of $U_p(\cdot)$.

For a measurable function $V : \mathbb{R}^\nu \to [0,\infty)$ we define $V^{(n)} := V \wedge n\ (n \in \mathbb{N})$. Then, for $t \geq 0$, $U_{p,V}(t) := \text{s-}\lim_{n\to\infty} \exp(-t(H_p + V^{(n)}))$ exists. We define V to be $U_p(\cdot)$-admissible if $U_{p,V}(\cdot)$ is a C_o-semigroup; its generator will then be denoted by $-H_{p,V}$. The function V will be called $U_p(\cdot)$-regular if $\text{s-}\lim_{\eta\to 0} U_{p,\eta V}(t) = U_p(t)$ for all $t \geq 0$.

The notions of "admissible" and "regular" are in fact p-independent.

Examples: $V(x) = \frac{1}{|1-|x||}$ is admissible but not regular. For $\nu \geq 2$, $V(x) = |x|^{-\nu}$ is regular.

Main result: If V is regular then $H_{1,V} = H_1 + V$. Another interesting fact is that, for regular V, the "maximal operator" associated with $-\frac{1}{2}\Delta + V$ in L_p is equal to $H_{p,V}$, for $p = 1,2$.

W. VON WAHL:

Global Existence for semilinear Parabolic Systems

First we deal with abstract nonlinear evolution equations (1) $u' + Au + M(u) = 0$, $u(0) = \varphi$, of parabolic type in a Banach Space B; this means that $-A < 0$ generates an analytic semigroup. Let V be any Banach space with $V \supset D(A)$. We assume that the nonlinearity $M(u)$ has the same order of magnitude as Au with respect to V; this essentially means that $\|M(u)\| \leq \|Au\| g_1(\|u\|_V)$, $u \in D(A)$. If $M: D(A^{1-\rho}) \to B$ is locally lipschitzian for some $\rho \in (0,1)$ then (1) has a local strong solution on a maximal interval $[0, T(\varphi))$, where $0 < T(\varphi) \leq +\infty$. If $T(\varphi) < +\infty$, then $u : [0, T(\varphi)) \to V$ is not uniformly continuous. This result is then applied to construct global classical solutions to parabolic systems of 1. second order (in x) where the nonlinearity grows quadratically with respect to ∇u, and 2. of arbitrary even order (in x), say $2m$, where the nonlinearity grows like $|u|^{(n+2m)/(n-2m)}$ with respect to u.

W. WALTER:

Parabolic differential equations with several time variables

Differential equations of the following form

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{m} d_i u_{t_i} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} u_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} + cu ,$$

which are abbreviated as

$$du_t = au_{xx} + bu_x + cu,$$

are considered. Here, $t = (t_1,\dots,t_m) \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. If $\bar{G} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ is given, the "parabolic interior" G consists of those points (t,x), for which a lower half-neighborhood $B_\varepsilon^-(t) \times B_\varepsilon(x) \subset \bar{G}$. The lower half-neighborhood consists of those points t' of the neighborhood for which $t' \leq t$, (componentwise). For $m = 1$, this reduces to the usual definition. The parabolic boundary Γ is the set $\bar{Q} \setminus G$. It is assumed that $d = (d_i) \geq 0$ (componentwise) and $a = (a_{ij}) \geq 0$ (positive semi-definite).

The following minimum principle holds:

(A) $du_t \geq aw_{xx} + bw_x + cw$ in G, $w \geq 0$ on Γ implies $w \geq 0$ in $\bar{G}$ if $\Sigma d_i \geq \alpha > 0$, $\sup c < \infty$, G bounded.

A similar theorem holds for unbounded G with assumptions known from the case $m = 1$.

As an application, the following monotonicity property can be established. Let $m = 1$, i.e. $t \in \mathbb{R}$,

$$u_t = \kappa(x,u)\,\Delta u + f(t,x,u) \text{ in } (0,T] \times \Omega ,$$

$$u(0,x) = 0 \text{ in } \bar{\Omega} , \quad u(t,x) = 0 \text{ in } (0,T] \times \partial\Omega .$$

If $f(t,x,0) > 0$, $f \in \mathrm{Lip}(u)$, f increasing in t, then u is increasing in t.

This theorem is proved by introducing a second time variable s and deriving a parabolic inequality of the form given in (A) for $w(s,t,x) = u(s,x) - u(t,x)$.

Remark. The corresponding statement for the linear equation becomes false if the coefficients a_{jk} depend on t and x (even for $m = 1$).

P. WERNER:

Time asymptotics for solutions of initial and boundary value problems in wave-guides

Consider the infinite cylinder $\Omega = \Omega' \times (-\infty,\infty)$, where Ω' is a bounded $(n-1)$-dimensional domain with smooth boundary. We are interested in the asymptotic behaviour of the solution $u(x,t)$ of the initial and boundary value problem

$$u_{tt} - \Delta u = fe^{-i\omega t} \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty),$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x)$$

as $t \to \infty$, with data u_0, u_1, f belonging to $C_0^\infty(\Omega)$.

The main results are:

a) If ω^2 does not coincide with an eigenvalue λ_j of the Dirichlet problem for the cross-section Ω', then the principle of limiting amplitude holds:

(1) $$u(x,t) = U(x)e^{-i\omega t} + o(1) \quad \text{as } t \to \infty,$$

where U is a solution of the boundary value problem

(2) $$\Delta U + \omega^2 U = -f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

and satisfies a suitable radiation condition.

b) If $\omega^2 = \lambda_p$, then

(3) $$u(x,t) = \frac{1+i}{2\sqrt{\pi\omega}} \sqrt{t}\, e^{-i\omega t} \sum_{k=1}^{m_p} v_{pk}(x') \int_\Omega f(y)\, v_{pk}(y')\,dy + U(x)e^{-i\omega t} + o(1) \quad \text{as} \quad t \to \infty,$$

where U is a (not necessarily bounded) solution of (2) and $v_{pk}(k = 1,\dots,m_p)$ is an orthonormal basis of the eigenspace of λ_p.

The estimates (1) and (3) hold uniformly in every bounded subset of $\bar{\Omega}$. The proof is based on the spectral theory for unbounded self-adjoint operators in Hilbert spaces. An outline of the proof and a survey on related resonance phenomena are presented.

J. WEYER:

Iterative methods for positive solutions of a class of nonlinear eigenvalue problems

We consider the nonlinear stationary diffusion equation

$$T(u) = -\operatorname{div} A(x,\operatorname{grad} u) + b(x,u) = \lambda f(x,u) \qquad \text{(P)}$$

with Dirichlet boundary conditions in some bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Here, A is a uniformly monotone vector field in the space $\mathbb{R}^n$ with respect to the second variable and b and f are monotonically increasing functions with respect to u. We consider Picard iterates defined by $u_o = O$ and $T(u_{n+1}) = \lambda f(x,u_n)$. If the Picard iterates are well defined, we have results analoguous to the case, where T is linear: The spectrum Σ of problem (P) has the form $(0,\lambda^*)$ or $(0,\lambda^*]$. If $\lambda \in \Sigma$, then the Picard iterates converge uniformly and monotonically from below to the minimal positive solution. If $T(O) = O$, then λ^* is greater than the first eigenvalue of the problem linearized at the origin and less than the supremum of the first eigenvalues of the problems, which arise by linearization of Problem P at an arbitrary point. The maximal monotonicity of T replaces the Greens function arguments, which are usual in the case of linear T.

M. WIEGNER:

On the Asymptotic Behaviour of Solutions of Nonlinear Parabolic Equations

We consider a general nonlinear parabolic equation

$$-u_t + a_{ij}(x,t,u,\nabla u)\, u_{ij} + f(x,t,u,\nabla u) = 0 \quad \text{on } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$$

$$u(x,o) = u_o(x)$$

and assume that u is a global classical solution (Ω bounded). Let $Lw = A_{ij} + A_i w_i + A_o w$ with $A_o \leq 0$ denote the linearization of the above equation at $t = \infty$, $u = 0$ and $\lambda_o > 0$ the first eigenvalue of $-L$. Then it is shown that under appropriate assumptions solutions with $\|u_o\|_{C_o(\bar{\Omega})}$ small decay to zero with $\|u_t(t)\|_{C_o(\bar{\Omega})} + \|u(t)\|_{C_1(\bar{\Omega})} \leq C \cdot e^{-\lambda_o t}$ which is optimal in general.

In case of diffusion systems different behaviour may occur.

Berichterstatter: C. G. Simader (Bayreuth)

Tagungsteilnehmer

Professor Dr. W. Abramczuk
Institut Mittag-Leffler
Auravägen 17
S-18262 Djursholm

Dr. M. Costabel
Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Schloßgartenstraße 7
6100 Darmstadt

Dr. H. D. Alber
Mathematisches Institut der
Universität Bonn
Wegelerstraße 10
5300 B o n n

Dr. H. L. Cycon
Fachbereich Mathematik der
Technischen Universität
Straße des 17. Juni 135
1000 Berlin

Professor Dr. H. Amann
Mathematisches Institut der
Universität Zürich
Rämistraße 74
CH-8001 Zürich

Professor Dr. C. DePrima
Math. 253-37 - Caltech
Pasadena, Calif 91125
USA

Professor Dr. J. Bemelmans
Universität Saarbrücken
Fachbereich Mathematik
Bau 36
6600 Saarbrücken

Professor Dr. G. Fichera
Via Pietro Macagni 7
I-00199 Roma

Professor Dr. A. Borzymowski
Institute of Mathematics
Warsaw Univ. of Technology
Pl. Jednosci Robotniczej 1
00-661 Warsaw /Poland

Professor Dr. Fleckinger-Pellé
Dept. de Mathematiques
Univ. Paul Sabatier
118 Route de Narbone
31062 Toulouse Cedex /France

Professor Dr. F. J. Bureau
Plan d'Italie 5 (042)
B-4020 Liege (Belgien)

Professor Dr. J. Frehse
Mathematisches Institut der
Universität Bonn
Wegelerstraße 10
5300 B o n n

Professor Dr. E. Heinz
Mathematisches Institut der Universität Göttingen
Bunsenstraße 3 - 5
3400 Göttingen

Professor Dr. G. Hellwig
Mathematisches Institut der RWTH Aachen
Templergraben 55
5100 Aachen

Professor Dr. P. Hess
Mathematisches Institut der Universität Zürich
Freiestraße 36
CH-8032 Zürich

Professor Dr. L. Hörmander
Institut Mittag-Leffler
Auravägen 17
S-18262 Djursholm

Professor Dr. W. Jäger
Institut für Angew. Mathematik der Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 294
6900 Heidelberg

Professor Dr. H. Kalf
Mathematisches Institut der Universität München
Theresienstraße 39
8000 München 2

Professor Dr. H. Kaul
Mathematisches Institut der Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10
7400 Tübingen

Dr. B. Kawohl
Institut für Angew. Mathematik der Universität Erlangen
Martenstraße 3
8520 Erlangen

Professor Dr. R. Landes
University of Illinois
Dept. of Mathematics
Chicago Circle
Chicago, Il 60680 /USA

Professor Dr. N. A. Larkin
The Institute of Theoretical and Applied Mechanics
Novosibizsk 90 630090 /USSR

Professor Dr. R. Leis
Mathematisches Institut der Universität Bonn
Wegelerstraße 10
5300 B o n n

Professor Dr. I. Louhivaara
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik I
Arnimallee 3
1000 Berlin 33

Professor Dr. G. Lumer
Faculté des Sciences
Université de l'Etat
Avenue Maistriau, 15
7000 Mons /Belgien

Professor Dr. E. Meister
Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Schloßgartenstraße 7
6100 Darmstadt

Dr. A. Orth

Universität Frankfurt
Fachbereich Mathematik

Robert-Mayer-Straße 6 - 10

6000 Frankfurt 1

Professor Dr. N. Ortner

Universität Innsbruck
Institut für Mathematik

Technikerstraße 13

A-6020 Innsbruck

Professor Dr. H. Pecher

Gesamthochschule Wuppertal
Fachbereich 7 - Mathematik

Gaußstraße 20

5600 Wuppertal 1

Priv.-Doz. Dr. R. Picard

Institut für Angew. Mathematik
Universität Bonn

Wegelerstraße 10

5300 B o n n

Dr. R. Racke

Institut für Angew. Mathematik
Universität Bonn

Wegelerstraße 10

5300 B o n n

Professor Dr. A. G. Ramm

Math. Dept. Kansas State Univ.

Cardwell Hall

Manhattan, Ks 66506 /USA

Professor Dr. M. Schneider

Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut

Englerstraße 2

7500 Karlsruhe

Priv.-Doz. Dr. F. Schulz

Mathematisches Institut der
Universität Göttingen

Bunsenstraße 3 - 5

3400 Göttingen

Professor Dr. C. G. Simader

Mathematisches Institut der
Universität Bayreuth

Postfach 3008

8580 Bayreuth

Dr. G. Ströhmer

Mathematisches Institut der
RWTH Aachen

Templergraben 55

5100 Aachen

Priv.-Doz. Dr. M. Struwe

Mathematisches Insitut der
Universität Bonn

Wegelerstraße 10

5300 B o n n

Professor Dr. G. Talenti

Ist. Mat.

Viale Morgani 67/A

I-50134 Firenze

Professor Dr. K. Veselić

Fachbereich Mathematik der
Fernuniversität Hagen

Postfach 940

5800 Hagen

Priv.-Doz. Dr. V. Vogelsang

Institut für Mathematik der
Universität Clausthal-Zellerfeld

Erzstraße 1

3392 Clausthal-Zellerfeld 1

Priv.-Doz. Dr. J. Voigt
Mathematisches Institut der
Universität München
Theresienstraße 39
8000 München 2

Professor Dr. P. Werner
Mathematisches Institut der
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
7000 Stuttgart

Professor Dr. W. von Wahl
Mathematisches Institut der
Universität Bayreuth
Postfach 3008
8580 Bayreuth

Dr. J. Weyer
Mathematisches Institut der
Universität Köln
Weyertal 86-90
5000 Köln 1

Professor Dr. J. Walter
Mathematisches Institut der
RWTH Aachen
Templergraben 55
5100 Aachen

Professor Dr. K. O. Widman
Rössliweg 3
CH-6343 Buonas

Professor Dr. W. Walter
Mathematisches Institut I
Universität Karlsruhe
Englerstraße 2
7500 Karlsruhe

Professor Dr. M. Wiegner
Mathematisches Institut der
Universität Bayreuth
Postfach 3008
8580 Bayreuth

Professor Dr. J. Weidmann
Universität Frankfurt
Fachbereich Mathematik
Robert-Mayer-Str. 6 - 10
6000 Frankfurt 1

Professor Dr. E. Wienholtz
Mathematisches Insitut der
Universität München
Theresienstraße 39
8000 München 2

Professor Dr. W. L. Wendland
Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Schloßgartenstraße 7
6100 Darmstadt

Professor Dr. R. Wüst
Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik / FB 3
Straße des 17. Juni 135
1000 Berlin 12

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft