MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 17/1985

Chaos in dynamischen Systemen

9.4. bis 12.4.1985

Die diesjährige Frühjahrstagung der Arbeitsgemeinschaft "Geyer-Harder" fand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. S. J. Patterson (Göttingen) und Herrn Prof. Dr. T. tom Dieck (Göttingen) statt.
Unter dem Eindruck einer "chaotischen" Aprilwetterlage wurden eine Reihe wichtiger Fortschritte in der Theorie dynamischer Systeme diskutiert. Bei diskreten dynamischen Systemen handelt es sich um Systeme der Form $T: X \longrightarrow X$, wobei X ein topologischer Raum ist. Bereits für sehr einfache Räume und sehr einfache Abbildungen ist erstaunlich, wie kompliziert das Verhalten der Folge $T^n = T \circ T \circ \ldots \circ T$ sein kann, und wie schön gleichzeitig die Computerbilder sein können, die über das Verhalten dieser Folgen Auskünfte erteilen.
Sogar schon für den einfachen eindimensionalen Fall, daß $f: I \longrightarrow I$, $I = [0,1]$, nur ein (lokales) Maximum $(c, f(c))$ besitzt, in $[0,c)$ monoton und in $(c,1]$ antiton ist lassen sich wesentliche universelle Eigenschaften dynamischer Systeme erkennen. Zur Beschreibung der nicht wandernden Menge haben Milnor und Thurston eine symbolische Dynamik (Kneading Theory) entwickelt. Für Einparameterfamilien solcher Selbstabbildungen des Einheitsintervalls wurde die Feigenbaumsche Computerbeobachtung zur universellen Konvergenzrate der Periodenverdopplungsparameter erläutert.
Zu den rationalen Selbstabbildungen auf der Riemannschen Zahlenkugel wurde bereits zu Anfang gearbeitet. Eine Reihe von Fragen über das Verhalten solcher Abbildungen wurden bereits in Arbeiten von Fatou und Julia beantwortet. Eine Lösung des Fatou-Julia´schen Problems ist in jüngerer Zeit von Sullivan gegeben worden: es gibt keine stabilen wandernden Gebiete. Die Idee Sullivan´s war, solche Selbstabbil-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

dungen auf $\bar{C}$ aufzufassen als Operation einer eigentlich diskontinuierlichen Gruppe. Der Sullivansche Beweis ist dann über dies Analogie vom Beweis des Ahlfors´schen Endlichkeitssatzes inspiriert. Beim Ahlfors´schen Endlichkeitssatz seinerseits geht der meßbare Riemannsche Abbildungssatz zu quasikonformen Strukturen auf der Riemannschen Zahlenkugel wesentlich ein.

Die Äquivalenzrelation quasikonformer Konjugiertheit erweist sich andererseits als geeignet, um periodische Punkte, Juliamengen und stabile Gebiete in Familien von rationalen Abbildungen zu beschreiben. Durch Computerexperimente läßt sich heute zusätzlich zu den qualitativen Aussagen auch ein optischer Eindruck vom Aussehen der Juliamengen gewinnen. Solche Bilder, wie sie zum Teil auch auf der Tagung vorgestellt wurden, erklären auch das Interesse an fraktalen Gesichtspunkten der Theorie, das heißt Überlegungen zu Mengen mit nicht-ganzzahligen Hausdorffdimensionen. Es ist im allgemeinen schwierig, zu einer gegebenen Menge die Hausdorffdimension zu bestimmen. Erläutert wurden Methoden,die sich zum Beispiel die Selbstähnlichkeit von Mengen zu Nutze machen, oder die bei Juliamengen für expandierende rationale Abbildungen die Existenz bestimmter kanonischer Maße verwenden.

Vortragsauszüge

T. HÖFER:

Grundbegriffe in der Theorie der dynamischen Systeme

Während des Vortrages wurden grundlegende Definitionen im Zusammenhang mit diskretendynamischen Systemen diskutiert: Limesmengen, nichtwandernde Menge, Julia-Menge. Maßtheoretische Aspekte (Ergodik, Rekurrenz) sollten durch ein klassisches Beispiel von Denjoy in der Darstellung von D. Sullivan verdeutlicht werden.

H.-G. RÜCK:

Hausdorff-Dimension

Es sei E eine kompakte Teilmenge des R^d. Zu jedem α $(0 \le \alpha \le d)$ definiert man das Hausdorff-Maß $H^\alpha(E) := \lim_{\rho \to 0} \inf \{\sum r_i^\alpha$ $\{B_i\}$ Überdeckungen von E mit Radius $r_i \le \rho\}$. Es existiert ein $\alpha_H(E)$ (Hausdorff-Dimension) mit der Eigenschaft: für $\alpha < \alpha_H(E)$ ist $H^\alpha(E) = \infty$, für $\alpha > \alpha_H(E)$ ist $H^\alpha(E) = 0$. Man definiert die Kapazität $C^\alpha(E) := \sup \{\mu(E) : \mu$ Maß mit Träger in E und $\int 1/|x-y|^\alpha \, d\mu(y) = 1$, für alle x aus E $\}$. Hier existiert ein $\alpha_C(E)$ (Kapazitätsdimesion) mit der Eigenschaft: für $\alpha < \alpha_C(E)$ ist $C^\alpha(E) > 0$, für $\alpha > \alpha_C(E)$ ist $C^\alpha(E) = 0$. Es wurde die Frostman´sche Dissertation erläutert, die besagt, daß beide Dimensionen übereinstimmen.

W.-K. SEILER:

Eindimensionale Systeme I

Ein eindimensionales System ist eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f: I \to I$, $I = [0,1]$. Satz von Sarkowskii: Falls f eine Bahn der Periode n hat, so hat f auch Bahnen der Periode m mit $n \lhd m$ bezüglich der Ordnungsrelation: $3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd 9 \lhd \cdots \lhd 2\cdot 3 \lhd 2\cdot 5 \lhd \cdots 2^r \cdot 3 \lhd \cdots 2^r \lhd 2^{r-1} \lhd \cdots \lhd 2 \lhd 1$. Zur topologischen Klassifikation beschränken wir uns auf den einfachen Fall, daß f nur ein Maximum bei $(c, f(c))$ hat, in $[0,c)$ monoton und in $(c,1]$ antiton ist. Jedem solchen f wird eine Folge $\gamma_n = \operatorname{sign}(c - f^n(c))$, $n \ge 0$ zugeordnet, die sogenannte "Knetsequenz" (kneading sequence). Wenn man zusätzlich vorraussetzt, daß f C^3 ist mit $f(0) = f(1) = 0$, $f''(c) < 0$ und $Sf(x) = f'''(x)/f'(x) - 3/2 \, (f''(x)/f'(x)) < 0$ für alle $x \ne c$, so ist f durch die Knetsequenz fast eindeutig bestimmt: Lediglich der Fall, daß (γ_n) für n=1 periodisch ist und keine Null enthält, benötigt man zusätzlich noch Information über die stabilen periodischen Bahnen. Zu einer Folge (γ_n) gibt es genau dann eine

Funktion f, die diese als Knetsequenz hat, wenn die Folge einige einfache kombinatorische Bedingungen erfüllt.

D.ERLE:

Julia-Mengen

Die klassische Theorie untersucht die Julia-Menge einer rationalen Selbstabbildung der Riemannschen Zahlenkugel vom Grad ≥ 2 mit Hilfe des Normalitätskriteriums von Montel. Über die Eigeschaften der exzeptionellen Menge ergibt sich, daß die Juliamenge perfekt ist und die repulsiven periodischen Punkte in ihr dicht liegen. Weiter wurden hinreichende Bedingungen dafür besprochen, daß die Julia-Menge eine Jordankurve ist bzw. daß sie total unzusammenhängend und vom Lebesgue-Maß null ist.

F. SCHULZ:

Quasikonforme Abbildungen

Eine topologische Abbildung $f:\Omega\to\Omega'$ von Bereichen der komplexen Ebene heißt quasikonform, falls sie lokal integrable Distributionsableitungen besitzt, sodaß $|f_{\bar z}|\leq k\cdot|f_z|$ gilt mit $k<1$. Es wurde der Beweis des meßbaren Riemannschen Abbildungssatzes skizziert, das heißt, daß zu jeder meßbaren komplexen Funktion μ mit $|\mu|\leq k<1$ fast überall genau eine quasikonforme Abbildung $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ gibt mit $f_{\bar z}=\mu f_z$ sodaß die drei Punkte $0,1,\infty$ jeweils in sich übergeführt werden. Wesentlich ist hierbei, daß ∞ in ∞ abgebildet wird, sodaß f als Abbildung der Riemannschen Zahlenkugel in sich aufgefaßt werden kann. Ist μ als Element in $L^\infty(\mathbb{C})$ in differenzierbarer Weise von einem Parameter $t\in R^n$ abhängig, so ist f_{μ_t} differenzierbar in t als Element des Banachraumes, bei dem die Funktion f in $\mathbb{C}$ ausschöpfenden Kreisscheiben D_R durch

$$\sup\frac{|f(z)-f(z')|}{|z-z'|^{1-2/p}}+\|f_z\|_{L^p}+\|f_{\bar z}\|_{L^p}$$

gemessen wird mit einem $p>2$.

E. VOGT:

Eindimensionale Systeme II

Über zwei Dinge wurde berichtet:

I. Zur Dynamik eindimensionaler Systeme: es wurde eine Zerlegung der nichtwandernden Menge in disjunkte, abgeschlossene, invariante Teilmengen angegeben. Jede dieser Teilmenge, bis auf eine, ist hyperbolisch abstoßend. Außerdem wurde die Dynamik der Abbildung auf den einzelnen Mengen beschrieben.

II. Die Feigenbaumsche Erklärung für die universelle Konvergenzrate von Periodenverdopplungsparametern von Einparameterfamilien gewisser Selbstabbildungen des Einheitsintervall wurde erläutert.

C. PRESTON:

Sullivansche Lösung I

Sei $R:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine rationale Abbildung mit grad(R) 1. Sullivan zeigt, daß das Komplement der Julia-Menge von R nur endlich viele periodische Komponenten hat, und die können in fünf Typen klassifiziert werden - nämlich (i) attraktives Bassin (ii) parabolisches Bassin (iii)superattraktives Bassin (iv) Sigel-Disk und (v) Herman-Ring. Diese fünf Typen wurden beschrieben. Die Klassifikation gibt ein volles Bild über die Dynamik von R auf den schließlich periodischen Komponenten des Komplements der Julia-Menge - und dies bedeutet alle Komponenten des Komplements (s. nächster Vortrag).

M. ROST:

Sullivansche Lösung II

Der neue Ansatz Sullivan´s bei der Untersuchung einer rationalen Selbstabbildung R der Riemannschen Zahlenkugel $\bar{\mathbb{C}}$ ist, die Operation einer rationalen Abbildung auf $\bar{\mathbb{C}}$ aufzufassen wie die Operation einer eigentlich diskontinuierlichen Gruppe und mit Hilfe des meßbaren Riemannschen Abbildungssatzes, ähnlich wie bei Riemannschen Flächen R-invariante, meßbare, konformeStrukturen auf $\mathbb{C}$ in Beziehung zu setzen zu zu R quasikonform konjugierten rationalen Abbildungen.

Die Sullivansche Lösung des Fatou-Julia-Problems (es gibt keine wandernden stabilen Gebiete) läßt sich nun so skizzieren: ist U ein wanderndes stabiles Gebiet, so betrachte man $\tilde{U} = \bigcup_{n,m} R^{-m}(R^n(U))$, den vollen Orbit von U und $\hat{U} = \tilde{U}/R$, den Quotienten von $\tilde{U}$ nach R. Mit Hilfe eines Rigidizitätsargumentes für Familien R-invarianter Homöomorphismen zeigt man nun, daß auf U hochdimensionale Familien konformer Strukturen existieren, welchen, nach Liftung auf $\mathbb{C}$, zuviele rationale Abbildungen vom gleichen Grad wie R entsprechen würden.

G. WASSERMANN:

Computer-Landschaften

Messungen von Küstenlinien in verschiedenen Maßstäben zeigen, daß die gemessene Länge $L(\varepsilon)$, wenn mit Feinheit ε gemessen wird, sich etwa verhält wie $\varepsilon^{-0,25}$, sodaß die empirische Hausdorffdimension einer Küste etwa 1,25 ist, und eines Teiles der Erdoberfläche etwa 2,25. Um Landschaften künstlich in einem Rechner zu erzeugen, braucht man also fractale Kurven und Flächen dieser Dimension. Ersetzt man in einem Polygonzug alle Strecken durch kopien eines anderen Polygonzuges und wiederholt dieses Verfahren anschließend immer wieder, so erhält man fraktale Kurven wie etwa die von Koch´sche Schneeflocke, aber diese sind zu regelmäßig, um als Landschftsmodelle zu dienen. Ein besserer Ansatz ist die Verwendung von Zufallsfunktionen, z.B. von Brown-Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Deren Graphen haben aber Dimension 1,5 oder 2,5. Um niedrigere Hausdorffdimensionen zu erhalten, kann man durch eine "bruchteilige Integration" einer Brownfunktion "bruchteilige Brownfunktionen"erzeugen, deren Graphen Dimensionen 2-H (bzw.3-H) haben; die Integration glättet die Brownfunktion ein wenig. Diese geben dann sehr realistisch aussehende Modelle für Landschaften.

J. WOLFART:

Quasikonforme Konjugiertheit rationaler Abbildungen

Für analytische Familien $\{R_\lambda\}$ rationaler Abbildungen $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ wird die Abhängigkeit der periodischen Punkte, der stabilen Gebiete, der Julia-Menge von λ untersucht und gezeigt, daß eine offene dichte Teilmenge $\{R_\omega\}$ von $\{R_\lambda\}$ aus Zusammenhangskomponenten besteht, die quasikonforme Konjugiertenklassen sind. Beweismethode: Teichmüller-Räume und das "λ-Lemma", welches Quasikonformität für Familien injektiver Abbildungen sichert, wenn diese nur die Identität enthalten und analytisch von λ abhängen.

Literatur: Mané, Sad, Sullivan, "On the dynamics of rational maps" Ann. scient. Ec.Norm. Sup. 16 (1983), 193-217)

Sullivan,"Quasi Conformal Homeomorphisms and Dynamics III", Preprint IHES/M/83/1

M. DENKER:

Das kanonische Maß

Es gibt zwei Methoden, die Hausdorffdimension von Julia-Mengen expandierender rationaler Abbildungen R mittels ergodentheoretischer Methoden zu bestimmen. Die eine Methode, von Sullivan, benutzt eine Konstruktionsidee von Patterson für Fuchssche Gruppen, um ein konformes Maß auf der Juliamenge zu erhalten (hier ist R nicht notwendigerweise expansiv). Ist die rationale Abbildung jedoch expansiv, gibt es bis auf Multiplikation mit Konstanten nur ein konformes Maß, und dieses ist das Hausdorff-Maß auf der Juliamenge. Die zweite Methode benutzt die Theorie der Gibbsmaße (Bowen, Ruelle). Für $\varphi = -\log |R'|$ und R expansiv ist die Hausdorffdimension durch die einzige Nullstelle von $t \mapsto P(t\varphi)$ (= der Druck von $t\varphi$) bestimmt. Ruelle zeigte, daß diese eine analytische Familie in den Parametern von R ist, solange R expansiv bleibt.

H. KRIETE:

Die Mandelbrotmenge

Douady und Hubbard studierten die analytische Familie der Polynome $p_\lambda : z \mapsto z^2 + \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Mandelbrotmenge ist die Menge der Parameterwerte λ, für die die Juliamenge des Polynoms p_λ zusammenhängend ist. Die Arbeiten von Douady und Hubbard ermöglichen eine Klassifikation der Dynamik der Polynome p_λ sowie Aussagen über ihre quasikonforme Konjugiertheit.

Berichterstatter: Ulrich Schwardmann

Tagungsteilnehmer

Professor Dr. W. Fischer
Fachbereich 3 Mathematik
der Universität
Kufsteinstr..

2800 Bremen 33

Professor Dr. Th. Bröcker
Fachbereich Mathematik der
Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Dr. H. Frye
Mathematisches Institut der
Universität
Robert-Mayer-Str. 6-10

6000 Frankfurt 1

Professor Dr. J. McCleary
SFB 170 der Universität
Bunsenstr. 3-5

3400 Göttingen

Professor Dr. W.D. Geyer
Mathematisches Institut
der Universität
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Dr. Deninger
Fachbereich Mathematik der
Universität
Universitätsstr.31
8400 Regensburg

Dr. F. von Haeseler
Fachbereich 3 Mathematik der
Universität
Kufsteinstr.

2800 Bremen 33

Professor Dr. M. Denker
Institut für Mathematische
Stochastik der Universität
Lotzestr. 13

3400 Göttingen

Dr. Th. Höfer
Max-Planck- Institut für
Mathematik
Gottfried- Claren- Str. 26

5300 Bonn 3

Professor Dr. T. tom Dieck
Mathematisches Institut der
Universität
Bunsenstr. 3-5

3400 Göttingen

Dr. M. Hortmann
Fachbereich 3 Mathematik der
Universität
Kufsteinstr.

2800 Bremen 33

Professor Dr. D. Erle
Mathematisches Institut der
Universität
Postfach 500500

4600 Dortmund 50

Dr. H. Kriete
Fachbereich 3 Mathematik der
Universität
Kufsteinstr.

2800 Bremen 33

Professor Dr. P. Löffler
Mathematisches Institut der
Universität
Bunsenstr 3-5

3400 Göttingen

Dr. B. H. Matzat
Mathematisches Institut II der
Universität
Englerstr. 2
7500 Karlsruhe

Professor Dr. K. H. Mayer
Mathematisches Institut der
Universität
Postfach 500500

4600 Dortmund 50

Professor Dr. J. Neukirch
Fachbereich Mathematik der
Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Professor Dr. S. J. Patterson
Mathematisches Institut der
Universität
Bunsenstr 3-5

3400 Göttingen

Dr. M. Peternell
Fachbereich 7 Mathematik der
Universität
Gaußstr.30

5600 Wuppertal 1

Professor Dr. E. Peterssen
SFB 170 der Universität
Bunsenstr.3-5

3400 Göttingen

Professor Dr. H. Popp
Lehrstuhl für Mathematik VI
der Universität
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim

Professor Dr. C. H. Preston
Mathematisches Institut der
Universität
Universitätsstr.

4800 Bielefeld 1

Professor Dr. V. Puppe
Mathematisches Institut der
Universität
Postfach 5560

7750 Konstanz

Professor Dr.M. Rees
SFB 170 der Universität
Bunsenstr. 3-5

3400 Göttingen

Dr. M. Reichert
Mathematisches Institut der
Universität
Bau 36

6600 Saarbrücken

Dr. M. Rost
Fachbereich Mathematik der
Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Dr. H. G. Rück
Mathematisches Institut der
Universität
Bau 36

6600 Saarbrücken

Dr. W. Ruppert
Mathematisches Institut der
Universität
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Dr. W. Singhof
Mathematisches Institut der
Universität
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Dr. C. Scheiderer
Mathematisches Institut der
Universität
Bismarckstr 1 1/2

8520 Erlangen

Professor Dr. G. Tamme
Fachbereich Mathematik der
Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Prof. Dr. P. Schneider
Mathematisches Institut der
Universität
Im Neuenheimer Feld 288

6900 Heidelberg

Professor Dr. E. Vogt
Mathematisches Institut der
Freien Universität
Arnimallee 3

1000 Berlin 33

Dr. F. Schulz
Mathematisches Institut der
Universität
Bunsenstr. 3-5

Göttingen

Professor Dr. G. Wassermann
Mathematisches Institut der
Universität
Universitätsstr. 150

4630 Bochum- Querenburg

Dipl.-Math. U. Schwardmann
Mathematisches Institut der
Universität
Bunsenstr. 3-5

3400 Göttingen

Dr. K. Wingberg
Fachbereich Mathematik der
Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Dr. W. Seiler
Mathematisches Institut der
Universität
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim

Professor Dr. J. Wolfart
Mathematisches Institut der
Universität
Robert-Koch-Str. 6-10

6000 Frankfurt 1

Professor Dr. D. Siersma
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit Utrecht
Budapestlaan 6

NL-3508 TA Utrecht

Professor Dr. G. Wüstholz
Max-Planck-Institut für
Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3