MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 7/1986

Funktionentheorie

16. 2. bis 22. 2. 1986

Die Tagung fand unter der Leitung der Herren G. Frank (Dortmund), Ch. Pommerenke (Berlin) und K. Strebel (Zürich) statt. Von den 44 Teilnehmern hielten 29 Vorträge. Wie aus der Teilnehmerliste ersichtlich ist, hatte die Tagung einen ausgesprochen internationalen Charakter.

Im Vordergrund der diesjährigen Tagung über Funktionentheorie standen Fragen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Komplexen und der Werteverteilung meromorpher Funktionen. In diesem Zusammenhang ist besonders erwähnenswert der Beweis einer Verallgemeinerung des zweiten Hauptsatzes von R. Nevanlinna durch Herrn Steinmetz. In der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen gewinnen die Untersuchungen über die Lage der Nullstellen von Lösungen immer mehr an Interesse. Rege Diskussionen rundeten den Verlauf dieser interessanten Tagung ab.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Oberwolfach, Februar 1986

W. H. J. Fuchs

Das schöne Lied aus alter Zeit,
Es wurde für uns Wirklichkeit.
Vom weissen Winterwald umgeben
Kommt eine Blume frisch ins Leben.
Andächtig stehen, die sie sehen,
Eh' fromm gestärkt sie weiter gehen.

So ging es uns, schön wie noch nie
Blüht hier Funktionentheorie.
Solch edles Pflänzchen mitten Schnees
Braucht Fürsorg' eines Komittees.
Das spricht: Verpönt den leeren Wahn
Mit frommen Schaun sei was getan.
Und schleunigst bilden sie uns aus
Zu Lehrlingen des Gartenbaus.
Und eifrig lernen wir als Jünger
Wie man gebraucht den rechten Dünger.
An Lehrern hat's uns nicht gefehlt,
Gern hätt' ich alle aufgezählt
Doch würde dann dies Lied zu lang.
Erlaubt mir nur, dass ich gedenke
Herrn Strebel's und des Pommerenke.
Und dann Herr Obergärtner Frank,
Dem schulden wir besondern Dank.
Nicht nur Belehrung, auch den Speck
Verteilet er zu hohem Zweck,
So dass verstärkt von solchen Bissen
Wir eifrig lernen neues Wissen.

Und schliesslich, lasst mich noch erwähnen
Besondrer Dank gebühret denen,
Die hier kaum sichtbar, kaum zu spüren
So wunderbar den Haushalt führen.

Wie schön, dass wir hier eingeladen
Sei's Dir gedankt, Land Württemberg-Baden!

Bald müssen wir uns vom Waldestraum trennen,
Doch jeder von uns wird die Blume stets kennen.
Und wenn es Gott will und's dem Beirat behagt,
Dann wird in zwei Jahren wieder getagt.

Vortragsauszüge

J. M. ANDERSON:

The Szegö infimum problem with constraints

Let $o \leq w \in L^{\infty}(T)$ and consider the Szegö infimum problem with the additional constraint

$$(*) \quad \inf_{k \in H_2} \{ \int_T |1-zk|^2 \, w \frac{d\Theta}{2\pi} : \|k\|_2 \leq M \} .$$

We show that in general the problem (*) has a unique solution k_λ with $\|k_\lambda\|_2 = M$ and that the value of (*) is

$$(**) \quad (\exp \int_T \log(w+\lambda) \frac{d\Theta}{2\pi})(\int_T \frac{w \, d\Theta}{2\pi(w+\lambda)}) .$$

Since $\lambda \to 0$ as $M \to \infty$ the quantity in (**) tends to the solution for the unconstrained problem as $M \to \infty$.

The case when $w \frac{d\Theta}{2\pi}$ is replaced by a general positive measure d_μ is also discusses (with J. Clunie, J. Rovnyak, M. Rosenblum).

A. BEARNSTEIN:

Weitsman's theorem about symmetrization and the Poincaré metric

Suppose that D is a plane domain. Let D^* denote its circular symmetrization and λ_D its Poincaré metric. Allen Weitsman (Annals of Math., to appear) recently settled a longstanding open problem by proving: for all convex $\uparrow$ functions ϕ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(\log \frac{1}{\lambda_D(re^{i\Theta})}) d\Theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\log \frac{1}{\lambda_{D^*}(re^{i\Theta})}) d\Theta$$

$(o < r < \infty)$. This implies the inequality

$$\lambda_{D^*}(r) \leq \inf_\Theta \lambda_D(re^{i\Theta})$$

which in turn implies that the "principle of symmetrization" for analytic functions mapping the unit disk into D continues to hold when D^* is multiply connected (see Hayman's Research Problems in Function Theory, the section on symmetrization).

Weitman deduces his P. M. inequality from a general symmetrization theorem for partial differential equations of the form

$$\Delta U + g(U) = 0 .$$

One of the main tools in his proof is implicit use of the inequality

$$\int_{u>t} \Delta u(re^{i\Theta})\,d\Theta \leq \int_{\tilde{u}>t} \Delta\tilde{u}(re^{i\Theta})\,d\Theta , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

where $\tilde{u}$ denotes symmetric decreasing rearrangement. This inequality has been used implicitly in the part by the speaker and others. See, e. g., my article in Acta Math. 133 (1974).

I. N. BAKER:

Ein Problem über JULIAsche Mengen

Es sei f rational, jedoch keine gebrochen lineare Funktion. $f^n, n \in \mathbb{N}$, sei die n-te Iteration von f , $N(f) = \{z; (f^n)$ normal in einer Umgebung von $z\}$, $J(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus N(f)$ die Juliasche Menge von f .
Problem: Für welche rationale Funktionen g ist $J(g) = J(f)$?
Das Problem wird nicht gelöst, jedoch ein paar Teilergebnisse werden gebracht.

H. BEGEHR:

Hele Shaw Strömung und Momentenproblem

Ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet sei mit einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit angefüllt. In Quellen vorgegebener Quellstärke wird weitere Flüssigkeit zugeführt. Wie entfaltet sich die Flüssigkeit, wenn der Gebietsrand frei ist (Problem vom bewegten Rand)?

Dieses Problem läßt sich auf ein Momentenproblem reduzieren, wenn die Momente in geeigneter Weise durch Gegenbauer Polynome definiert werden. Im $\mathbb{R}^2$ wurde das analoge Problem durch Anwendung konformer Abbildungsmethoden gelöst (Richardson (72), Sakai (83), Gustafsson (85)). In höherdimensionalen Räumen gelang die Lösung des Momentenproblems bisher nicht.
(Teil einer gemeinsamen Arbeit mit R. P. Gilbert.)

W. BERGWEILER:

Über das Wachstumsverhalten zusammengesetzter Funktionen

Es sei f meromorph, g ganz transzendent. Mit $\rho(f)$ bzw. $\lambda(f)$ werde die Ordnung bzw. die untere Ordnung von f bezeichnet. Dann gilt der

Satz: Aus $\lambda(f\circ g) < \infty$ folgt $\lambda(f) = 0$.

Für ganzes f zeigte dies Gross 1972, das Analogon für die Ordnung geht auf Pólya 1926 (f ganz) und Edrei und Fuchs 1964 (f meromorph) zurück. Des weiteren gilt der

Satz: Es sei $\alpha(r)$, $\beta(r) \to \infty$ für $r \to \infty$.

ii) Es existiert eine meromorphe Funktion f und eine ganze transzendente Funktion g mit $T(r,f\circ g) \leq r^{\beta(r)}$ für alle genügend großen r und $T(r,f) \geq \alpha(r)$ für beliebig große r .

iii) Es existiert eine meromorphe Funktion f und eine ganze, transzendente Funktion g mit $T(r,f\circ g) \leq r^{\beta(r)}$ für beliebig große r und $T(r,f) \geq \alpha(r)$ für alle genügend großen r .

B. BOJARSKI:

Remarks on Schwarz-Poincaré differential equation and the geometry of Teichmüller spaces

In the lecture were discussed various consequences and extensions of recent results of Zograf-Tahtadjan on the variational theory of the generating function for the accessory parameters of the linearly polymorphic function $f : F \to H$, $(H =: \operatorname{im} f > 0)$ defining the uniformisation of the hyperbolic Riemann surface F of finite type. These results open new ways for discussing various properties of the Schwarzian-Poincaré equation $\{f,z\} = \phi$ and the related Fuchsian type equation $v'' + \frac{1}{2}\phi v = 0$, where $\{f,z\}$ denotes the Schwarzian of f and ϕ is a given quadratic differential on F.

R. BRÜCK:

Über ganze Funktionen für die unendlich viele Ableitungen an zwei Stellen verschwinden

Ist f eine ganze Funktion vom Exponentialtyp $\tau < k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ und $f^{(2j)}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $j = 0,1,\ldots,k-1$, so ist f ein Sinus-Polynom vom Grad höchstens $k-1$. Dieses Ergebnis legt die Vermutung nahe, daß f eine Sinus-Reihe ist, wenn man die Wachstumsbedingung $\tau < k\pi$ wegläßt, dafür aber fordert, daß $f^{(2j)}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Wir zeigen, daß diese Vermutung sogar unter allgemeineren Voraussetzungen richtig ist. Es gilt folgender

Satz: Sei f regulär in $S_a := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a\}$ $(0 < a \leq +\infty)$ und $f^{(2n)}(0) = f^{(2n)}(1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi z \qquad (z \in S_a)$$

mit Konstanten $b_k \in \mathbb{C}$.

Ist speziell f eine ganze Funktion vom Exponentialtyp $\pi\tau < +\infty$ so bricht die Reihe bei $[\tau]$ ab. Dies ist ein bekanntes Ergebnis von Schoenberg.

V. DIETRICH:

<u>Über die Annahme der möglichen Wachstumsordnungen bei linearen Differentialgleichungen</u>

Es wird zunächst gezeigt, daß sich die Lösungsspalten eines linearen Dgl.-Systems $z\underline{x}'(z) = A(z)\underline{x}(z)$ ($A(z)$ meromorph in ∞) eindeutig asymptotisch darstellen lassen, und zwar in hinreichend schmalen Sektoren auf der Riemannschen Fläche des Logarithmus. Davon ausgehend wird dann folgendes bewiesen:

Sind $(\rho_1,\tau_1) \geqq \ldots \geqq (\rho_n,\tau_n)$ die Ordnungstypen des Newton-Puiseux-Diagramms und $(\rho(\underline{x}_1),\tau(\underline{x}_1)) \geqq \ldots \geqq (\rho(\underline{x}_n),\tau(\underline{x}_n))$ die Ordnungstypen eines Fundamentalsystems der Dgl., so gilt:

I. $(\rho(\underline{x}_j),\tau(\underline{x}_j)) \in \{(\rho_1,\tau_1),\ldots,(\rho_n,\tau_n)\}\ \forall\ j=1,2,\ldots,n$

II. $(\rho(\underline{x}_j),\tau(\underline{x}_j)) \geqq (\rho_j,\tau_j)\ \forall\ j=1,2,\ldots,n$

III. Die Schranken in II. sind scharf.

Folgerungen:
1. Verallgemeinerung eines Satzes von Thomé (maximale Anzahl regulär-singulärer Lösungen)
2. Verallgemeinerung eines Satzes von Perron (Annahme des maximalen Ordnungstyps)
3. Bestätigung einer Vermutung von Wittich (Ordnungssumme)
4. Beitrag zum Umkehrproblem von Wittich.

M. ESSÉN:

Harmonic majorization and harmonic measure

Let D be a domain in $\underline{R}^2$ containing the origin and let $\omega_R(\cdot,\underline{R}^2,D)$ be the harmonic measure of $\{|z| = R\} \cap \bar{D}$ in that component of $D \cap \{|z| < R\}$ which contains the origin. If $\Omega = \{\mathrm{Re}\ z > 0\}$ and $D \subset \Omega$, let $\omega_t(\cdot,\Omega,D)$ be the harmonic measure of $\bar{D} \cap \{\mathrm{Re}\ z = t\}$ in that component of $D \cap \{\mathrm{Re}\ z < t\}$ which contains a given point z_0.

Problem 1. Let $\Phi_0\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ be a convex function of $\log r$. Find necessary and sufficient conditions on $\omega_R(\cdot,\underline{R}^2,D)$ which ensure that $\Phi_0(|z|)$ has a harmonic majorant in D.

Problem 2. Let $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ be a convex function. Find necessary and sufficient conditions on $\omega_t(\cdot,\Omega,D)$ which ensure that $\Phi(x)$ has a harmonic majorant in D (we have $x = \mathrm{Re}\ z$).

On the way, we have to analyze thinness at ∞ of $\underline{R}^2\backslash D$ in Problem 1 and minimal thinness at ∞ of $\Omega\backslash D$ in Problem 2. There are applications to minimal growth problems for functions subharmonic in D.

W. H. J. FUCHS:

The Inverse Problem of Nevanlinna Theory for 'small functions'

Discussion of the Inverse Problem of Nevanlinna Theory for 'small functions': Given a finite or denumerable set of pairs

$$\{a_j(z),\delta_j; a_j \text{ meromorphic}, \quad 0 < \delta_j \leq 1, \Sigma\delta_j \leq 2\}$$

can one find a meromorphic function $f(z)$ such that

1) $T(r,a_j) = o(T(r,f))$ for all j,
2) $\delta(a_j(z), f) = \delta_j$,
3) $\delta(c(z),f) = 0$ für every meromophic function $c(z)$ satisfying $T(r,c(z)) = o(T(r,f))$.

For constant a_j this problem was solved by D. Drasin. The general problem is open. For entire a_j some partial results will be given (joint work with C. J. Dai).

D. GAIER:

On an area problem in conformal mapping

In the class of all ring domains G with given inner boundary C_1 and given module M, we look for the one of least area. If C_1 has symmetries, the problem can be reduced to finding a quadrilateral Q of given module m, where part of the boundary is prescribed, and which has least area. This amounts to finding a mapping F from a rectangle R to a region whose boundary is partly prescribed such that $|F'|$ is constant on one side of R. We solve this problem in the form of a modified Schwarz-Christoffel intergral; this gives a representation of the unknown part of the boundary. This is carried out explicitly for some examples including the original problem when C_1 is a square.

D. GNUSCHKE-HAUSCHILD:

Existenz endlicher Winkelableitungen für nicht-schlichte Funktionen

In der Einheitskreisscheibe werden beschränkte analytische Funktionen f betrachtet. Man untersucht die Frage, ob unter gewissen geometrischen Bedingungen endliche Winkelableitungen auf einer Teilmenge des Randes der Einheitskreisscheibe existieren, die positives Lebesgue-Maß hat.

Diese Bedingungen betreffen die Menge

$$B := \{w \in \mathbb{C} : \text{es gibt } z_n \in \mathbb{D} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} |z_n| = 1,\ \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w\} ,$$

und zwar handelt es sich einmal um die Existenz von Tangenten an gewissen Teilmengen von B und zum anderen um das lineare Maß von B.

Im zuletzt genannten Fall gibt es für schlichte Funktionen klassische Zusammenhänge zum Hardyraum H^1, nicht jedoch für beliebige beschränkte analytische Funktionen.

W. K. HAYMAN:

Functions mapping rationals on rationals

At a recent number theory conference J. Vaaler raised 3 questions

a) If $f(z)$ is regular in a domain D containing an interval of the real axis and $f(z)$ is rational if and only if z is rational, is it true that $f(z)$ is necessarily bilinear?

b) If $F(z)$ is regular in an open annulus A containing $|z| = 1$ and $F(z)$ is a root of unity if and only if z is a root of unity is it true that $F(z) \equiv a z^n$, where a is a root of unity and n is an integer?

c) If $F(z)$ is regular in $|z| \leq 1$ is the answer to b) positive?

A negative answer to a) was given by Franklin in 1925 and the method also yields a negative answer to b). However the answer to c) is positive. Under additional hypotheses the answers to a) and b) also become positive.

S. HELLERSTEIN:

The Zeros of Meromorphic Solutions of Differential Equations

We discuss joint work with J. Rossi concerning the distribution of the arguments and moduli of the zeros of solutions to $y''+Ry=0$, R rational, $R(z) \sim a_n z^n$ as $|z| \to \infty$, which have all solutions meromorphic in $\mathbb{C}$. For this we must have $n \geq 0$. We use Hille's asymptotics of solutions to the equation to determine the possible asymptotic distribution of the zeros of solutions, the Nevanlinna characteristics and deficiencies. By simple considerations, the asymptotics are also shown to imply the following:

"If the equation has 2 linearly independent solutions meromorphic in $\mathbb{C}$ with $f_1 f_2$ transcendental and $n_{NR}(r, \frac{1}{f_1 f_2})$, the number of non-real zeros of $f_1 f_2$ in $|z| \leq 1$, satisfies $n_{NR}(\frac{1}{f_1 f_2}) = o\,(r^{(n+2)/2})$ as $r \to \infty$, then $n = 0$ - i. e. $R(z) \to a_n (\neq 0)$ as $|z| \to \infty$" .

This is best possible - R need not be constant. This generalizes an earlier result of Shen, Williamson and Hellerstein:

"If $y''+Py = 0$, P a polynomial has 2 linearly independent solutions with only real zeros, then P is constant".

A. HUBER:

Konforme Verheftung

Sei $\phi : e^{i\vartheta} \to e^{i\phi(\vartheta)}$ ein analytischer Homöomorphismus von $C = \{z \mid |z| = 1\}$ auf sich. Dann gibt es eine analytische Jordankurve Γ in $\mathbb{C}$ sowie konforme Abbildungen f des Innern von C auf das Innere von Γ und g des Äußern von C auf das Äußere von Γ derart, daß $f(e^{i\vartheta}) = g[e^{i\phi(\vartheta)}]$ für alle $\vartheta \in [0,2\pi]$. Es wird gezeigt, daß sich eine solche "konforme Verheftung" als Orthogonalprojektion in einem geeignet definierten Hilbertraum (ähnlich wie beim Dirichletschen Prinzip) deuten läßt. (A. Huber, "Konforme Verheftung und Dirichletsches Prinzip", Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Mathematica, 10 (1985) 261 - 265).

I. LAINE:

The differential equation $f'' + A(z)f = 0$ and meromorphic quadratic differentials

The equation (1) $f'' + A(z)f = 0$, $A(z)$ meromorphic, will be considered in a simply connected domain $G \subseteq \mathbb{C}$, resp. in the unit disc D . Motivated by the problem of determining meromorphic functions which are Schwarzian derivatives, necessary and sufficient conditions for $A(z)$ are given in G to determine when the quotient of any two local solutions of (1) admits a meromorphic continuation into the whole G . The same conditions characterize Schwarzian derivatives. In fact, let Γ be a Fuchsian group in D . A meromorphic $g : D \to \overline{\mathbb{C}}$ is Γ-polymorphic, if for every $\gamma \in \Gamma$ there exists a Möbiustransformation σ such that $g \circ \gamma = \sigma \circ g$. S_g is a meromorphic quadratic Γ-differential, i. e. $S_g(\gamma(z))\gamma'(z)^2 = S_g(z)$ holds in D for all $\gamma \in \Gamma$. Now, a meromorphic quadratic Γ-differential $2A(z)$ in D is the Schwarzian of a Γ-polymorphic function g in D if and only if the conditions mentioned above hold for $A(z)$. The same conditions characterize equations $u' = A(z) + u^2$ admitting infinitely many meromorphic solutions in G . Finally, a special case of the same conditions characterize those equations (1) who admit two linearly independent meromorphic solutions in G .

W. LUH:

Some wild holomorphic Functions

Let $\mathcal{O} \in \mathbb{C}$ be an open set with simply connected components and denote by $H(\mathcal{O})$ the family of all holomorphic functions on $\mathcal{O}$. We shall prove that there exist functions $\phi \in H(\mathcal{O})$ that are universal in the sense that by applying simple analytic operations to ϕ one can approximate "many" other functions. We mention one typical result. There exists a "monster" $\phi \in H(\mathcal{O})$ with the following properties:

(1) For all $\zeta \in \partial\mathcal{O}$, for all compact sets $B \subset \mathbb{C}$ with connected complement and for all functions f , holomorphic on B^o and continuous on B there exist sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ such that $a_n z + b_n \in \mathcal{O}$ für all $n \in \mathbb{N}$ and $z \in B$; $a_n \to o$, $b_n \to \zeta \, (n \to \infty)$ and $\phi(a_n z + b_n) \to f(z)$ uniformly on B .

(2) For all compact sets $B \subset \mathcal{O}$ with connected complement and any function f , holomorphic on B^o and continuous on B there

exists a sequence $\{n_k\}$ of natural numbers such that $\phi^{(n_k)}(z) \to f(z)$ uniformly on B .

(3) The same monster ϕ satisfies some other density properties with respect to sequences of antiderivatives and partial sums of the power series expansions of ϕ around any $z_o \in \mathcal{O}$.

Furthermore we deal with the question whether the set of all monster on $\mathcal{O}$ is a "big" subset of $H(\mathcal{O})$.

J. B. MILES:

A Characterization of the Exponential Function

Let $\mathcal{E}$ be the class of all entire functions $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ such that $a_o = 1$ and, for $k \geq 0$, $0 < \frac{1}{a_k} = \int_0^{\infty} \frac{t^k}{f(t)} dt$. It is elementary that $e^t \in \mathcal{E}$. In joint work with J. Williamson, the author verifies a conjecture of Rényi and Vincze (see W. K. Hayman's Research Problems in Function Theory, Problem 2.32) by proving that e^t is the only member of $\mathcal{E}$. The proof is based on the earlier inequality of Hayman and Vincze that for all $f \in \mathcal{E}$ and all $t \geq 0$,

$$\left|\frac{f'(t)}{f(t)} - 1\right| < \frac{56}{\sqrt{t+1}} .$$

The other principal ingredients of the proof are well-known comparisons, for fixed $\delta > 0$, of

$$\sum_{u<k<u+\delta\sqrt{u}} \frac{x^k}{k!} \quad \text{and} \quad \sum_{u+\delta\sqrt{u}<k} \frac{x^k}{k!} \quad \text{for } u > x ,$$

and of

$$\sum_{u}^{u+\delta\sqrt{u}} \frac{t^k}{e^t} dt \quad \text{and} \quad \sum_{u+\delta\sqrt{u}}^{\infty} \frac{t^k}{e^t} dt \quad \text{for } u > k .$$

J. NIKOLAUS:

Über die subnormalen Lösungen der Differentialgleichung $c_3w''' + (b_2z+c_2)w'' + b_1w' - w = 0$

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$c_3w''' + (b_2z+c_2)w'' + b_1w' - w = 0$$

mit komplexen b_j und c_j und $c_3b_2 \neq 0$.
Bekanntlich hat diese Differentialgleichung eine Lösung mit der Wachstumsordnung $\frac{1}{2}$. Darüber hinaus gilt: Mit

$$c := \frac{4}{b_2} \text{ und mit}$$

$$g_0 := \ldots := g_{k_0} := 1 \;,$$

$$g_{k+1} := g_k \cdot \exp\left[\frac{2b_1 - b_2}{2b_2k\left(1 + \frac{b_1}{kb_2}\right)}\right]$$

für $k \geq k_0$ bei genügend großem k_0 gibt es eine komplexe Folge (A_k) mit $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = 1$ derart, daß

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!g_k} A_k c^k z^k$$

Lösung der Differentialgleichung ist. Diese Funktion w besitzt die Wachstumsordnung $\frac{1}{2}$.

A. PFLUGER:

The Fekete-Szegö inequality for complex parameters

The inequality

$$|a_3-\lambda a_2^2| \leq 1+2|\exp\left(\frac{-2\lambda}{1-\lambda}\right)| \;, \; f \in S \;,$$

was proved for a real parameter λ , $0 < \lambda < 1$, by Fekete and Szegö with the Löwner method, and by J. A. Jenkins (Analytic Functions, Princeton, 1960) using the general coefficient theorem.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Following his method it is proved that

1° the above inequality holds for complex λ such that $\operatorname{Re} \frac{1}{1-\lambda} \geqq 1$ and

2° this inequality is sharp if and only if

$$\lambda = 1 - \frac{u}{u^2+v^2} + i\Theta \frac{v}{u^2+v^2}, \quad -1 \leqq \Theta \leqq 1 ,$$

where

$$u = 1 - \log(\cos\tau) \quad \text{and} \quad v = \operatorname{tg}\tau - \tau , \quad 0 \leqq \tau < \pi/2 .$$

L. REICH:

Über eine Differentialgleichung in der Iterationstheorie im Komplexen

In der Theorie der analytischen Iterationen und bei der Untersuchung von Normalformen analytischer Differentialgleichungen treten Differentialgleichungen der Form

$$(*) \qquad (g \circ F)(x) = \frac{dF}{dx} \cdot g(x)$$

auf, die manches Mal nach E. Jabotinsky benannt werden. Hierbei ist $g(x) = d_1 x + d_2 x^2 + \ldots$ eine für $|x| < \sigma$ konvergente Potenzreihe, $g \not\equiv 0$, und als Lösungen sind in Umgebung von $x = 0$ holomorphe Funktionen $F(x)$ mit $F(0) = 0$, $F'(0) \neq 0$, zugelassen. Es ist bekannt, daß formale Lösungen existieren und wie ihre Gesamtheit parametrisiert werden kann. Hier wollen wir nun beweisen, daß jede formale Lösung konvergiert, daß die Parameterabhängigkeit durch eine ebenfalls holomorphe Funktion gegeben ist, und jede formale Transformation von $(*)$ auf seine sog. Normalform (lokal) biholomorph ist.

St. RUSCHEWEYH:

Extension of Szegö's 1/4-Theorem

Let $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in S$, $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$ for $n \in \mathbb{N}$.

Szegő (1928) proved that f_n is univalent in $|z| < 1/4$, and if f is convex or starlike in $|z| < 1$ then f_n has the same property in $|z| < 1/4$. Let

$$\mathcal{F} = \overline{\mathrm{co}}\ \{ \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} z^k : |x| \leq 1 ,\ n \in \mathbb{N} \} ,$$

where $\overline{\mathrm{co}}$ denotes the closed convex hull. Then $\mathcal{F}$ has the following properties

i) $\mathcal{R}_0 = \{f \text{ anal. in } |z|<1 : f(0)=0,\ f'(0)=1,\ \mathrm{Re}\frac{f(z)}{z} > 0\} \subset \mathcal{F}$

ii) $\mathcal{Q} = \{f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k : a_0=1,\ 0 \leq a_{k+1} < a_k \text{ for } k=0,1,\ldots\} \subset \mathcal{F}$

iii) $f \in \mathcal{F} \iff f_n \in \mathcal{F} ,\ n \in \mathbb{N}$,

iv) $f,g \in \mathcal{F} \implies f * g \in \mathcal{F}$,

where $*$ denotes the Hadamard product. Our main result is the following.

Theorem: Let $f \in \mathcal{F}$, $g \in \overline{\mathrm{co}}\ S$. Then $f * g$ is starlike univalent in $|z| < 1/4$.

This extends and sharpens all parts of Szegő's results mentioned above. It also has the following Corollaries.

Corollary 1. Let $f \in \mathcal{R}_0$. Then f_n is convex univalent in $|z| < 1/4$.

Corollary 2. Let $f \in \mathcal{Q}$. Then f is convex univalent in $|z| < 1/4$.

In all these results the constant 1/4 is best possible.

F SHEA:

<u>Yet another version of the $\cos\pi\lambda$ - Theorem</u>

For $f(z)$ entire, we put $L(r,f) = \inf_\Theta |f(re^{i\Theta})|$, $M(r,f) = \max_\Theta |f(re^{i\Theta})|$. Let $\{r_k\}$ be any sequence of strong peaks of order λ for $N(r,0)$, in the sense of Miles and Shea, Duke Math. J. 43 (1976), i. e.

$N(t,0) \leq N(r_k,0)(\frac{t}{r_k})^\lambda(1+\varepsilon_k)$ and $T(t,f) \leq CN(r_k,0)(\frac{t}{r_k})^\lambda$ hold for all $t \in [\varepsilon_k r_k, r_k/\varepsilon_k]$, for some $\varepsilon_k \downarrow 0$ and $C > 0$.

Theorem: If $\lambda < 1$, then $\liminf\limits_{r \to \infty,\ r \in d} \log L(r,f)/\log M(r,f) \geq \cos \pi\lambda$

where $d = \cup I_k$, $I_k \in [r_k/\sigma_k, \sigma_k r_k]$, $|I_k| \sim r_k(\sigma_k - 1/\sigma_k)$ and $\{\sigma_k\}$ decreases to 1 as slowly as desired.

A different proof of (a version of) this theorem was first given by Eremenko and Sodin. Both proofs together with counterexamples to some related conjectures are given in a forthcoming paper (Function Theory, Functional Analysis and their Applications, 1986).

N. STEINMETZ:

Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes

Eine leichte abgeschwächte Version des zweiten Hauptsatzes der Werteverteilungslehre - welche die Defektrelation

(1) $\quad \Sigma\delta(a,f) + \delta(\infty,f) \leq 2$

enthält - ist die Ungleichung

(2) $\quad \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + m(r,f) \leq 2T(r,f) + S(r,f)$.

($a_1,\dots,a_q$ paarweise verschiedene Konstanten.) Es wird gezeigt, daß (2) (mit $2+\varepsilon$ anstelle 2) und erst recht (1) richtig bleibt, wenn die Konstanten a_ν durch meromorphe Funktionen mit $T(r,a_\nu) = S(r,f)$ ersetzt werden.
Der Beweis beruht auf der Verwendung einer passenden Wronskischen Determinanten, wie sie zuerst von Frank und Weißenborn[1] mit Erfolg benutzt wurde.

[1] Rational deficient functions of meromorphic functions

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

K. STEPHENSON:

Analytic functions sharing level curves

We consider the family $\mathcal{J}_\Gamma$ of non-constant meromorphic functions on a surface $\mathcal{W}$ which have constant modulus 1 on a curve $\Gamma \subset \mathcal{W}$. Assuming $\mathcal{J}_\Gamma \neq \phi$, we have the

Theorem: There exists a simply connected surface S and an analytic function $\phi : \mathcal{W} \to S$ so that $\phi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ and $\mathcal{J}_\Gamma \equiv \mathcal{J}_{\mathbb{R}} \circ \phi \equiv \{g \circ \phi : g \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}\}$

Here S is one of the sphere, plane, or disc, and $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ is the family of meromorphic functions on S having constant modulus 1 on the real numbers $\mathbb{R}$ in S. The functions of $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ can be easily described. The theorem says that functions sharing a more complicated level curve are simply obtained from those of $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ by composition with a common function ϕ mapping Γ to $\mathbb{R}$. This result and a similar theorem for functions sharing a common tract allow a unified treatment of results going back to G. Valiron, M. Cartwright, W. Fuchs and M. Heins. The heart of the work is a general technique for obtaining compositional factors of given functions.

S. TOPPILA:

On the spherical derivative

Numerical estimates for some absolute constants for the growth estimates of the spherical derivative are given.

L. VOLKMANN:

Über faktorisierbare Lösungen Riccatischer Differentialgleichungen

Es wird folgende Verallgemeinerung eines Satzes von E. Mues bewiesen.

Satz. Ist $w = f \circ g$, f meromorph (nicht konstant), g ganz transzendent, eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$w' = a(z) + b(z)w + c(z)w^2 = P(z,w) \qquad (c \neq 0)$$

mit ganzen Koeffizienten, und setzt man

$$H(r) = \max\{T(r,a)\ ,\ T(r,b)\ ,\ T(r,c)\ ,\ 1\}\ ,$$

so gilt:

(i) Ist $P(z,w) = c(z)(w-\tau_1)(w-\tau_2)$ $(\tau_1,\tau_2 \in \mathbb{C})$ und ist f transzendent, so gilt

$$T(r,g) \leq (1+0(1))\ T(r, \int_0^z c(t)dt)\ .$$

(ii) Ist $P(z,w) = c(z)(w-\alpha)(w-\beta(z))$ $(\alpha \in \mathbb{C}\ ,\ \beta' \neq 0)$, und ist f keine lineare Transformation, so gilt

(*) $T(r,g) = 0(H(r)) \qquad (r \notin E)$.

(iii) Ist $P(z,w)$ nicht von obiger Form, so gilt (*) .

G. WEIẞENBORN:

<u>Nullstellen linearer DIfferentialpolynome</u>

Es sei f eine meromorphe Funktion in der Ebene. Wir betrachten

$$\Lambda(f) \equiv W(a_1,\ldots,a_n,f)\ ,$$

wobei $a_1,\ldots,a_n$ kleine Funktionen bezüglich f sind, d. h. $T(r,a_\nu) = S(r,f)$. $W(g_1,\ldots,g_m)$ bezeichnet die Wronskideterminante der Funktionen $g_1,\ldots,g_m$.
Dann gilt:

Satz: $(n-1)(\bar{N}(r,f) \leq N(r,\frac{1}{\Lambda(f)}) + N_1(r,f) + S(r,f)$.

Es wird vermutet, daß die Ungleichung auch ohne $N_1(r,f)$ auf der rechten Seite gilt. Damit wäre es dann möglich, den 2. Hauptsatz für kleine Funktionen in genau derselben Formulierung wie für Konstanten zu beweisen. Auch die Mues'sche Vermutung $\sum_{a\neq\infty} \delta(a,f') \leq 1$ würde daraus folgen.

Das Beispiel $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$, $\Lambda(f) \equiv f^{(n)}$ zeigt, daß die Ungleichung für Funktionen mit einfachen Polen scharf ist. Das Hayman'sche Beispiel $\Lambda(f) \equiv f''' + 4f'$, $\Lambda(\tan z) = 6/\cos^4 z$ zeigt, daß eine Aussage über Nullstellen eines beliebigen Differentialpolynoms $\Lambda(f) \equiv f^{(n)} + b_{n-1}f^{(n-1)} + \ldots + b_o f$, b_ν klein bezüglich f , nicht erwartet werden kann.

J. WINKLER:

On the possibility of the construction of meromorphic functions with prescribed values

Nevanlinna treated the following problem: Let be given n values w_μ (=1,2,...,n) from the extended complex plane and n sequences $\{a_{\mu,\nu}\}$ (μ=1,2,...,n; ν=1,2,...) of points of the complex planes tending to infinity. Does there exist an entire or meromorphic function which takes the value w_μ exactly at the points $a_{\mu,\nu}$? In the lecture it is demonstrated that the ones of any function can in general not be constructed by an algorithm which depends not from all zeros and poles of the function at once. Further it is proved that even no algorithm exists, which gives some approximation of the ones of a meromorphic f and depends not from all zeros and poles from f at the same time.

Berichterstatter: G. Frank (Dortmund)

Tagungsteilnehmer

Prof. Dr. J. M. Anderson
University College London
Dept. of Mathematics

London WCIE 6 BT

Großbritannien

Prof. Dr. A. Baernstein
Washington University
Dept. of Mathematics

St. Louis, MO 63130

U. S. A.

Prof. Dr. I. N. Baker
Imperial College
Dept. of Mathematics

London SW7 2A2

Großbritannien

Prof. Dr. H. Begehr
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik I
Hüttenweg 9

1000 Berlin 1

Dr. W. Bergweiler
Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Templergraben 55

5100 Aachen

Prof. Dr. Bogdan Bojarski
Universytet Warszawski
Instytut Matematyki
Palac Kulturyi Nauki IXp.

00-901 Warszawa

Polen

Dr. R. Brück
Mathematisches Institut
der Universität Gießen
Arndtstr. 2

6300 Gießen

Prof. Dr. J. G. Clunie
Open University
Dept. of Mathematics
Walton Hall

Milton Keynes, MK7 6AA

Großbritannien

Dr. V. Dietrich
Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Templergraben 55

5100 Aachen

Prof. Dr. M. Essén
Uppsala University
Dept. of Mathematics
Thunbergsvägen 3

S-752 38 Uppsala

Prof. Dr. G. Frank
Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund
Postfach 50 05 00

4600 Dortmund 50

Prof. Dr. W. H. Fuchs
Cornell University
Dept. of Mathematics

Ithaca, IY 14853

U. S. A.

Prof. Dr. D. Gaier
Mathematisches Institut
der Universität Gießen
Arndtstr. 2

6300 Gießen

Dr. D. Gnuschke-Hauschild
Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin 12

Prof. Dr. D. Gronau
Institut für Mathematik
der Universität Graz
Brandhofgasse 18

A-8010 Graz

Prof. Dr. H. Grunsky
Mathematisches Institut
der Universität Würzburg
Am Hubland 3

8700 Würzburg

Prof. Dr. K. Habetha
Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Templergraben 55

5100 Aachen

Prof. Dr. W. K. Hayman
University of York
Dept. of Mathematics
Heslington

Yorl Y01 5DD

Großbritannien

Prof. Dr. S. Hellerstein
University of Wisconsin-Madison
Dept. of Mathematics
480 Lincoln Drive

Madison, WI 53706

U. S. A.

Prof. Dr. A. Huber
ETH Zürich
Mathematisches Institut
ETH-Zentrum

CH-8092 Zürich

Prof. Dr. G. Jank
Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Templergraben 55

5100 Aachen

Dr. O. Knab
Mathematisches Institut I
Universität Karlsruhe
Englerstr. 2

7500 Karlsruhe

Prof. Dr. Ilpo Laine
University of Joensuu
Dept. of Mathematics
Postfach 111

SF-80101 Joensuu 10

Prof. Dr. J. K. Langley
Universität of St. Andrews
Math. Institute, North Haugh

St. Andrews KY 16 955

Schottland

Prof. Dr. W. Luh
Fachbereich 4
der Universität Trier
Schneidershof

5500 Trier

Prof. Dr. F. Pittnauer
Gesamthochschule Duisburg
Abt. Mathematik, FB 11
Postfach 10 16 29

4100 Duisburg

Dr. G. P. Meyer
Rechenzentrum der Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Prof. Dr. Ch. Pommerenke
Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin 12

Prof. Dr. J. B. Miles
University of Illinois
Dept. of Mathematics

Urbana, IL 61801

U. S. A.

Prof. Dr. L. Reich
Mathematisches Institut
der Universität Graz
Brandhofgasse 18

A-8010 Graz

Prof. Dr. E. Mues
Institut für Mathematik
der Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover

Prof. Dr. M. Reimann
Institut für Mathematik
der Universität Bern

CH-3000 Bern

Prof. Dr. J. Nikolaus
Gesamthochschule Siegen
Fachbereich Mathematik
Hölderlinstr. 3

5900 Siegen 21

Prof. Dr. St. Ruscheweyh
Mathematisches Institut
der Universität Würzburg
Am Hubland 3

8700 Würzburg

Prof. Dr. A. Pfluger
Mathematisches Seminar
ETH-Zürich

CH-8092 Zürich

W. Schwick
Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund
Postfach 50 05 00

4600 Dortmund 50

Prof. Dr. D. F. Shea
University of Wisconsin-Madison
Dept. of Mathematics
480 Lincoln Drive

Madison, Wi 53706

U. S. A.

Prof. Dr. S. Toppila
University of Helsinki
Dept. of Mathematics

SF-00100 Helsinki 10

Dr. N. Steinmetz
Fakultät für Mathematik
der Universität Karlsruhe
Englerstr. 2

7500 Karlsruhe

Prof. Dr. L. Volkmann
Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Templergraben 55

5100 Aachen

Prof. Dr. K. Stephenson
University of Tennessee
Dept. of Mathematics

Knoxville, TN 37996

U. S. A:

Dr. G. Weißenborn
Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin 12

Prof. Dr. K. Strebel
Mathematisches Institut
der Universität Zürich
Rämistr. 74

CH-8001 Zürich

Prof. Dr. J. Winkler
Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin 12