MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 16/1987

Arbeitsgemeinschaft Geyer - Harder über

"Integrable Hamilton'sche Systeme"

12.4. bis 18.4.1987

Die Tagung fand unter Leitung der Herren H. Knörrer (Bonn) und E. Trubowitz (Zürich) statt. Es wurde versucht, einen Überblick über neuere Methoden und Resultate bei der Untersuchung integrabler Hamilton'scher Systeme zu gewinnen. Neben der Beschreibung klassischer Systeme mit modernen Methoden waren besondere Schwergewichte der Tagung die unendlichdimensionalen Analoga integrabler Hamilton'scher Systeme (wie die Korteweg-de Vries-Gleichung) sowie die bei der Untersuchung derartiger Systeme entdeckten Beziehungen zur algebraischen Geometrie.

Vortragsauszüge

J. GAMST

Wirkungs-Winkel-Variable für vollständig integrable Hamilton'sche Systeme

In Anlehnung an Guillemin/Sternberg wurde bewiesen:

Satz (Liouville; Arnold; Jost; Markus & Meyer)

M sei eine symplektische Mannigfaltigkeit, $\dim M = 2n$, und $f_1,\dots,f_n : M \to \mathbb{R}$ seien Funktionen mit $\{f_i, f_j\} = 0$.

Ist $N \subset M$ ein offener Teil, auf dem $f = (f_1,\dots,f_n): M \to \mathbb{R}^n$ eine Submersion mit kompakten zusammenhängenden Fasern ist, so gibt es lokal auf $f(N)$ "Wirkungsvariable" $I_j: U \to \mathbb{R}$ und dazu "Winkelvariable" $\theta_j \bmod 2\pi$ auf $f^{-1}(U)$, so daß man insgesamt einen fasertreuen Diffeomorphismus

$$f^{-1}(U) \simeq V \times T^n$$

mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen erhält, bei dem $\Sigma dI_j \wedge d\tau_j$ der symplektischen Form von M entspricht.

In solchen Koordinaten sind die f_i Funktionen $h_i(I_1,\dots,I_n)$ der Wirkungsvariablen allein, die zugehörigen Hamilton'schen Differentialgleichungen also von der Form

$$\dot{\theta}_j = \frac{\partial h_i}{\partial I_j} \quad \& \quad \dot{I}_j = 0$$

und die Integralkurven einfach linear auf den Fasern von f.

Als Beispiel wurde der schwere symmetrische (Lagrange-) Kreisel genannt.

D. v. STRATEN

Die Birkhoffsche Normalform

In the neighbourhood of an equilibrium point the Hamiltonian is of the form $H = H_2 + H_3 + \dots$ with H_i homogeneous of degree i. When H_2 is semisimple it is always possible to find a formal symplectic coordinate transformation which brings H into Birkhoff-(Gustavson) Normalform, i.e.: $\{H_2, H_i\} = 0 \quad i \geq 2$. However, contrary to the situation of a general vector field, convergence of the transformation is very exceptional and cannot be decided in terms of a finite part of the Taylor expansion of H. (This is a theorem due to Siegel.) In the case of no resonance or simple resonance H is formally integrable, but actual integrability is very exceptional.

R. BÖHME

Referiert wurde eine Technik zur Transformation einer Hamiltonfunktion H, so daß die Transformation kanonisch ist und die transformierte Hamiltonfunktion K integrabel ist. Dazu muß die Transformation $(X,Y): \mathbb{R}^{2n}_{(\xi,y)} \to \mathbb{R}^{2n}_{(x,y)}$ symplektisch sein. Man erhält eine solche Transformation aus dem Gradienten einer Funktion $S: \mathbb{R}^{2n}_{(x,y)} \to \mathbb{R}$ nahe bei $S_o(\underline{x},\underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y}$. Wir suchen deshalb zwei Funktionen H und K mit $H(\underline{x},S_{\underline{x}}(\underline{x},\underline{y})) = K(\underline{y})$. Für diese Differentialgleichung braucht man eine Theorie für die Differentialgleichung $V_{\underline{\xi}}(\xi) \cdot \underline{\omega} = f(\xi)$ auf dem n-dimensionalen Torus. Wegen der "kleinen Nenner" muß $\underline{\omega}$ sehr irrational sein. Dann aber gibt es eine konvergente Folge von kanonischen Transformationen, die im Limes das verlangte tut. Das gestörte Problem hat quasiperiodische Bahnen. Damit ist die berühmte Preisschrift von Poincaré fertig.

W. INGRISCH

Geodätische auf dem Ellipsoid

Geodätische werden als Bahnen eines kräftefreien Massenpunktes auf einem Ellipsoid des $\mathbb{R}^n$ beschrieben. Um geeignete Koordinaten zu erhalten, betrachtet man, Jacobi (Vorlesung über Dynamik) folgend, die konfokalen Quadriken $\sum x_i^2(a_i-z)^{-1}$ und zeigt:

a) Jeder Punkt des $\mathbb{R}^n$ liegt i.a. auf n Quadriken verschiedenen Typs ($n=3$: Ellipsoid, ein- und zweischaliges Rotationsellipsoid).

b) Die Parameter $z = a_i$ dieser Quadriken liefern ein "elliptisches" Koordinatensystem.

c) Die konfokalen Quadriken schneiden sich orthogonal, es gilt sogar der Satz (Chasles), daß die Normalen in den Berührpunkten einer gemeinsamen Tangente zweier Quadriken orthogonal sind.

d) Im allgemeinen berührt eine Gerade n-1 konfokale Quadriken.

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung $H(\frac{\partial S}{\partial u},u) = E$ kann bei dieser Koordinatenwahl durch Trennung der Variablen gelöst werden. Dies liefert eine kanonische Transformation auf Wirkungs-Winkel-Variablen. Die Integrale der Bewegung, die zunächst als willkürliche Integrationskonstanten auftreten, erhalten noch eine Deutung als elementarsymmetrische Funktionen der Parameter derjenigen n-2 Quadriken, die von der Tangente an die Geodätische im Lauf der Bewegung tangiert werden.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

W. BARTH

Toda-Gitter

Im Vortrag wurde der folgende Artikel von Moser referiert: Three integrable hamiltonian systems connected with isospektral deformations, Adv. Math. (1975). Die Notation des Lax-Paares ($\dot{L} = [B,L]$) und der isospektralen Deformation wurde erklärt. Als erstes Beispiel wurde das System

$$\dot{a}_k = a_k(a_{k+1}^2 - a_{k-1}^2) \quad k = 0,\dots,n \ , \quad a_o = a_n \equiv 0$$

in Form eines Lax-Paares geschrieben. Als zweites Beispiel wurde das Toda-Gitter in eine solche Form gebracht. Das konstante Spektrum der Matrix L hängt in diesem Fall zusammen mit den Streuzuständen des Systems.

D. SIERSMA

Das Neumann-Problem

Carl Neumann untersuchte 1859 eine reibungsfreie Bewegung auf der (n-1)-Sphäre unter dem Einfluß einer linearen Kraft $-Aq$, also die Differentialgleichung $\ddot{q} = -Aq + \nu q$ mit $A = \mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, wobei $\nu(q)$ so bestimmt wird, daß der Punkt q auf der Kugel bleibt. Man bekommt diese Differentialgleichung auch, wenn man die Hamiltonfunktion $H = \frac{1}{2}\langle Aq,q\rangle + \frac{1}{2}(|q|^2|p|^2 - \langle q,p\rangle^2)$ auf S^{n-1} einschränkt. Das Hamiltonsystem ist vollständig integrabel. Man nimmt sich eine Schar von konfokalen Quadriken $Q_z(x,x) + 1 = 0$ mit $Q_z(x,y) = \langle (z-A)^{-1}x,y\rangle$. Die Funktionen $\Phi_z(x,y) = (1 + Q_z(x,x))Q_z(y,y) - Q_z(x,y)^2$ sind Integrale für die Geodätischen auf dem Ellipsoid $Q_o(x,x) + 1 = 0$ und $\Phi_z(p,q)$ sind Integrale für das Neumannproblem. $\Phi_z(x,y) = 0$ definiert den Tangentialkegel an $Q_z(y,y) + 1 = 0$. Nach Knörrer bildet die Gauß-Abbildung die Geodätischen auf dem Ellipsoid (in geeigneter Parametrisierung) auf die Lösungen des Neumann-Problems mit Matrix A^{-1} ab. In gewissem Sinne ist die Umkehrung auch wahr.

K. LAMOTKE

Beziehungen zwischen dem Schrödinger-Operator $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, der Korteweg-de Vries Gleichung und dem Neumannschen Problem (nach J. Moser)

Der Operator L wird für quasiperiodische q auf ganz $\mathbb{R}$ mit Werten in $L^2(\mathbb{R})$ betrachtet. Es sei $G(x,y,\lambda)$ der Integralkern der Resolvente $(L-\lambda)^{-1}$. Der Mittelwert $w(\lambda) = M(\frac{1}{2G}) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{2G(t,t,\lambda)}$ besitzt eine asymptotische Entwicklung $w(\lambda) = i\sqrt{\lambda}(1 + \frac{w_1}{\lambda} + \frac{w_2}{\lambda^2} + \ldots)$, wobei z.B. $w_3 = w_3(q) = M(2q^3+q'^2)$ ist. Auf dem Raum aller q's läßt sich ein Fréchetscher Differentialkalkül entwickeln, der jedem differenzierbaren Funktional H einen Gradienten ∇H zuordnet. Wenn man den Operator $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ durch den Operator $\frac{d}{dx}$ auf dem Raum der q's ersetzt, kann man die Hamiltonsche Differentialgleichung $q_t = \frac{d}{dx}\nabla H$ bilden. Für $H = w_3$ erhält man die Korteweg-de Vries Gleichung. Sie besitzt unendlich viele erste Integrale w_j, $j = 1,2,\ldots$. Über die Lösung des Neumannschen Problems gelingt es, zu einem Bandspektrum —— ——— ... ———∞ ein L zu finden, so daß $G(x,x;\lambda)$ als Funktion von λ auf die zweiblättrige, in den Endpunkten des Spektrums verzweigte Überlagerung der λ-Ebene meromorph fortgesetzt werden kann.

J. APPELL

Isospektralmengen für eindimensionale Schrödinger-Operatoren mit Dirichlet-Randbedingungen

Im Vortrag wurde ein großer Teil des Buches "Inverse Spectral Problems" von J. Pöschel und E. Trubowitz (Acad. Press, 1987) im "Erzählerton" vorgestellt. Hauptresultate sind:

1. Gerade L^2-Potentiale q werden durch das Dirichlet-Spektrum $\mu_1, \mu_2, \ldots$ der Gleichung $-y'' + q(x)y = \lambda y$ eindeutig bestimmt.
2. Beliebige L^2-Potentiale q werden durch das Dirichlet-Spektrum $\mu_1, \mu_2, \ldots$ und die "Normierungskonstanten" $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$ (= "Endgeschwindigkeiten" der Eigenfunktionen mit "Anfangsgeschwindigkeit" 1) eindeutig bestimmt.

3. Jede Zahlenfolge $\mu_n = n^2\pi^2 + \text{const.} + \ell^2 - \text{Rest}$ tritt als Dirichlet-Spektrum eines (sogar geraden) L^2-Potentials auf.
4. Die "Isospektralmengen" $M(p) = \{q: q \in L^2 , \mu_n(p) = \mu_n(q) , n = 1,2,...\}$ sind reell-analytische zusammenhängende Mannigfaltigkeiten in L^2 , die diffeomorph zum Raum h^1 aller Folgen ξ_n mit $\sum_n n^2\xi_n^2 < \infty$ sind.
5. Die Normierungskonstanten $\kappa_1,\kappa_2,...$ bilden ein globales Koordinatensystem auf $M(p)$.
6. Die Abbildung $q \to (\kappa_1(q),\kappa_2(q),...;\mu_1(q),\mu_2(q),...)$ ist symplektisch bzgl. der Poisson-Klammern $\{F,G\} = \langle\frac{\partial F}{\partial q},\frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial q}\rangle$ bzw. $\{f,g\} = \sum_n \frac{\partial f}{\partial \kappa_n}\frac{\partial g}{\partial \mu_n} - \frac{\partial f}{\partial \mu_n}\frac{\partial g}{\partial \kappa_n}$, und alle Flüsse μ_n und κ_n sind Poisson-kommutativ.

B. RUF

<u>Das Dirichlet-Spektrum eines eindimensionalen Schrödinger-Operators</u>

In diesem Vortrag wurde der zweite Teil des Buches "Inverse Spectral Theory" von Pöschel und Trubowitz behandelt.

Es wurde gezeigt, daß die Isospektralmengen des Schrödingeroperators mit Dirichlet-Randwerten unendlich dimensionale, unbeschränkte Mannigfaltigkeiten sind. Diese können als invariante Flächen eines unendlichdimensionalen Hamilton'schen Systems aufgefaßt werden. Die Eigenwerte des Operators (aufgefaßt als Funktionen des Potentials) bleiben konstant auf den Isospektralmengen und sind die Integrale des Systems. Die Lösungen des Hamilton'schen Flußes sind in geeigneten Koordinaten Geraden, d.h. das System ist vollständig integrierbar. Außerdem wurde gezeigt, daß der Hamilton-Fluß entlang den Isospektralmengen explizit integriert werden kann, d.h. die Lösungen können in geschlossener Form angegeben werden. Dies erlaubt dann die vollständige Charakterisierung der Spektren des Schrödinger-Operators.

P. HEINZNER

Isospektralmengen des Hill-Operators

Im Vortrag wurde der Artikel "Hill's Operator and Hyperelliptic Function Theory in the presence of infinitely many Branch Points" von H.P. McKean und E. Trubowitz referiert.

Die isospektrale Menge des Hill-Operators $Q = -D^2 + q$, $q \in C(S^1)$ kann mit einem reellen Torus $(S^1)^g$ identifiziert werden und dieser mit einer "Jacobi"-Abbildung in einen komplexen Torus C^g/Γ eingebettet werden. C^g/Γ ist durch eine Riemannsche Fläche $S \sim \sqrt{-(\lambda-\lambda_0)\cdot\cdots-(\lambda-\lambda_{2g})}$ gegeben.

C. KAHN

Die Methode von S. Kowalewski zum Auffinden integrabler Hamiltonscher Systeme

In dem Vortrag wurde ein Kriterium von S. Kowalewski vorgestellt, das besagt, daß ein 2n-dimensionales Hamiltonsches System, dessen Definition sich über die komplexen Zahlen ausweiten läßt, nur dann mit abelschen Funktionen vollständig integriert werden kann, wenn es (2n-1)-dimensionale Familien von komplexen Lösungen mit Polen in beliebigen Zustandsvariablen gibt.

Die Anwendung dieses Kriteriums auf den Fall der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt zeigt, daß neben den Fällen des kräftefreien Kreisels und des Lagrange-Kreisels höchstens noch der heute so genannte Kowalewski-Kreisel mit zwei gleichen und einem halb so großen Hauptträgheitsmoment und der Aufhängung in der Ebene der beiden gleichen Trägheitsmomente mit abelschen Funktionen integriert werden kann.

W.K. SEILER

Eine algebro-geometrische Methode zur Lösung der Korteweg-de Vries und ähnlicher Gleichungen

Nach Burchnall/Chaundy (1922-1928) und Krichever (1976) gibt es eine eineindeutige Entsprechung zwischen Quadrupeln (X,P,F,S) aus einer vollständigen irreduziblen reduzierten Kurve über dem Grundkörper k der Charakteristik Null, einem nichtsingulären k-rationalen Punkt $P \in X$, einer torsionsfreien Garbe F vom Rang Eins mit $h^o(F) = h^1(F) = 0$, und einem Isomorphismus $S: T_{X,P} \to k$ und Äquivalenzklassen modulo Konjugation mit Elementen von $k[[t]]^*$ von kommutativen Ringen $R \subseteq k[[t]][\frac{d}{dt}]$, die k enthalten sowie zwei Operatoren A,B mit höchstem Koeffizienten Eins und coprimen Ordnungen. Auf den Quadrupeln (X,P,F,S) definiert eine Umgebung von O_X in Jac X einen Fluß $(X,P,F \otimes L,S)_L$, dem eine Familie $D_s: R \to k[[t]][\frac{d}{dt}]$ von Einbettungen entspricht. Für festes $a \in R$ definiert dies eine Familie $D_s(a)$ von Operatoren; ist B eine Funktion aus $R = \Gamma(X\ P,O_X)$ mit einem Pol der Ordnung k in b, so erhält man für eine geeignete einparametrige Familie von $L \in$ Jac X eine Deformation $D_s(a)$ zu einem Lax-Paar $\frac{d}{ds} D_s(a) = [D_s(a),D_s(b)_+^{\ell/k}]$.

Beispiel: X hyperelliptisch, P Weierstraßpunkt, F mit $h^o(F) = h^1(F) = 0$ beliebig, S beliebig, $a \in \Gamma(X,O_X(2P))$, $D_s(a) = (\frac{d}{dt})^2 + \alpha(s,t)$, $\frac{d}{ds} D_s(a) = [D_s(a),D_s(a)_+^{3/2}] = -\frac{1}{4}(\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} + 6\alpha(t)\cdot\alpha'(t))$ d.h. $\alpha(s,t)$ genügt der Korteweg-de Vries-Gleichung $\frac{\partial a(s,t)}{\partial s} = -\frac{1}{4}\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 6a\frac{\partial a}{\partial t}$.

K. HULEK

Das Schottky-Problem und die KP-Gleichung (I)

In diesem Vortrag wurde über Arbeiten von Shiota, Arbello-de Concini und Welters referiert. Bekanntlich lautet das Schottky-Problem wie folgt: Wann gehört eine Matrix

$$\tau \in Hg = \{\tau \in M(g\times g,C)\ ;\ \tau = {}^t\tau\ ,\ \operatorname{Im}\tau > 0\}$$

zur Jacobischen Varietät einer algebraischen Kurve? Ausgehend von der Fayschen Trisekantenformel wurde gezeigt, daß die Kummer-Varietät $km(x) \subset \mathbb{P}^{2^g-1}$ einer Jacobischen eine nicht-triviale Familie von Trisekanten besitzt. Das Kriterium von Gunnings besagt andererseits, daß eine prinz. polarisierte, irreduzible abelsche Varietät, deren Kummer-Varietät genügend viele Trisekanten besitzt, bereits eine Jacobische ist. Dieses Kriterium wurde von Welters für Wendetangenten verallgemeinert. Schließlich wurde gezeigt, wie das Weltersche Kriterium in eine Folge von Differentialgleichungen - deren erste die KP-Gleichung ist - übersetzt werden kann.

Th. HÖFER

Das Schottky-Problem (II)

Im vorangegangenen Vortrag wurde gezeigt, daß die Jacobi-Varietäten von Kurven unter allen prinzipal polarisierten abelschen Varietäten dadurch ausgezeichnet sind, daß ihre Thetafunktion eine abzählbare Serie von Differentialgleichungen erfüllt. Jetzt bleibt noch nachzuweisen, daß man von diesen Gleichungen nur die erste (die Kadёmtsev-Petviashvilii-Gleichung) benötigt; die übrigen sind dann automatisch erfüllt. Ein erster Beweis dafür stammt von Shiota. Vorgetragen wurde die stärker algebraisch-geometrisch orientierte Version von Arbarello und DeConcini, vgl. Beauvilles Bourbaki-Vortrag vom Februar 1987.

Berichterstatter: Th. Sauder

Tagungsteilnehmer

Dr. J. Appell
Mathematisches Institut
der Universität Augsburg
Memminger Str. 6

8900 Augsburg

Dr. R.-O. Buchweitz
Institut für Mathematik
der Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Prof.Dr. W.P. Barth
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Prof.Dr. J. Gamst
Fachbereich 3
Mathematik und Informatik
der Universität Bremen
Bibliothekstraße

2800 Bremen 33

Dr. M.J. Bergvelt
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Prof.Dr. W.-D. Geyer
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Prof.Dr. R. Böhme
Fakultät und Institut f. Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1

Dr. S. Golin
Fachbereich Mathematik / FB 3
der Technischen Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin 12

Prof.Dr. Th. Bröcker
Fachbereich Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Dr. P. Heinzner
Fakultät und Institut f. Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1

Prof.Dr. H. Helling
Fakultät für Mathematik
der Universität Bielefeld
Postfach 8640

4800 Bielefeld 1

Dr. W. Ingrisch
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Dr. F. Herrlich
Fakultät und Institut f. Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1

Dr. C.P.M. Kahn
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Dr. Th. Höfer
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Beringstr. 4

5300 Bonn 1

Dr. Ch. Klingenberg
Mathematisches Institut
der Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Prof.Dr. K. Hulek
Fakultät für Mathematik und Physik
der Universität Bayreuth
Postfach 10 12 51

8580 Bayreuth

Prof. Dr. H. Knörrer
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Wegelerstr. 10

5300 Bonn 1

Dr. J. Hurrelbrink
Dept. of Mathematics
Louisiana State University

Baton Rouge , LA 70803
USA

Prof.Dr. K. Lamotke
Mathematisches Institut
der Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Prof.Dr. L. Miller
Mathematisches Institut II
der Universität Karlsruhe
Englerstr. 2

7500 Karlsruhe 1

Dr. T. Miller
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Wegelerstr. 10

5300 Bonn 1

I. Nieto
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Dr. K. Oeljeklaus
Fakultät und Institut f. Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1

Prof.Dr. F. Pasemann
Institut für Theoretische Physik
der TU Clausthal
Leibnizstr. 10

3392 Clausthal-Zellerfeld

Dr. B. Ruf
Mathematisches Institut
der Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Th. Sauder
Sylter Bogen 40

2300 Kiel 1

Dr. W.K. Seiler
Lehrstuhl für Mathematik VI
Fak.f.Mathematik und Informatik
der Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim

Prof. Dr. D. Siersma
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit te Utrecht
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Prof.Dr. D. van Straten
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit Leiden
Postbus 9512

NL-2300 RA Leiden

Prof. Dr. E. Trubowitz
Mathematisches Institut
der ETH Zürich
ETH-Zentrum

CH-8092 Zürich

Prof.Dr. G. Wassermann
Fakultät und Institut f. Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1