

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 19/1987

Geschichte der Mathematik

27.4. bis 2.5.1987

Die 28. Tagung zur Geschichte der Mathematik fand unter Leitung von Herrn Menso Folkerts (München) und Herrn Henk Bos (Utrecht) statt. In seiner Eröffnungsansprache gedachte Herr Folkerts zweier seit der letzten Tagung verstorbener Kollegen: Im Juni 1986 verschied Herr Theo Gerardy, ehemals Leiter des Katasteramtes Hannover, der sich als Gauss-Forscher, insbesondere bei der Ordnung des Nachlasses von Gauss, grosse Verdienste erworben hat. Am 5.9. 1986 verstarb Frau Josepha Hofmann, die Gattin des Initiators und langjährigen Leiters der Oberwolfacher Tagungen zur Geschichte der Mathematik, J.E. Hofmann. Frau Hofmann hat nicht nur ihren Mann bei seiner vielfältigen Tätigkeit im Dienste unseres Fachgebietes unterstützt, sondern sie ist auch mit eigenen Arbeiten hervorgetreten. Besonders zu erwähnen ist die deutsche Ausgabe der mathematischen Schriften des Cusanus.

An der diesjährigen Tagung beteiligten sich 58 Kollegen aus 18 Ländern. Es wurden 28 Vorträge gehalten. Schwerpunkt der Tagung war die historische Entwicklung der Mathematik in den aussereuropäischen Kulturkreisen (China, Indien, islamische Reiche, frühe amerikanische Kulturen). 26 der 28 Vorträge widmeten sich der vorgegebenen Thematik. Mit der Wahl dieses Schwerpunktes beabsichtigten die Veranstalter, einen Beitrag zur Ueberwindung eines gewissen Euro-pazentrismus in der wissenschaftshistorischen Forschung zu leisten. Die Vielfalt der vorgelegten neuen Resultate zeigte, dass in der Wissenschaftshistoriographie der aussereuropäischen Kulturkreise eine rege Entwicklung stattfindet. Viele neue Quellen werden erschlossen, die das bisherige Geschichtsbild doch z.T. erheblich modifizieren.

Ausser den Diskussionen nach den Vorträgen hatten die Veranstalter zu grösseren Komplexen (chinesische Mathematik, Mathematik im islamischen Mittelalter) abschliessende Diskussionsrunden vorgesehen, ein Verfahren, das sich sehr bewährt hat. Besonders diskutiert wurden Fragen der Wechselbeziehungen und des gegenseitigen Einflusses der verschiedenen Kulturkreise.

Zusätzlich zum Tagungsprogramm hielt Frau Grattan-Guinness im Rahmen einer Abendveranstaltung einen Lichtbildervortrag über Baudenkmäler und andere Kulturschätze Aegyptens.

Abschliessend dankte der Senior der Tagung, Herr Volk (Würzburg), den Veranstaltern, Referenten und Diskussionsteilnehmern für die gelungene und wissenschaftlich sehr ertragreiche Veranstaltung.

Die nächste Tagung zur Geschichte der Mathematik findet vom 20.-26.11. 1988 statt. Sie wird sich schwerpunktmässig mit dem Thema "Mathematik und Anwendungen" beschäftigen.

Die folgenden Vortragsauszüge sind in der zeitlichen Reihenfolge der Vorträge angeordnet.

### Vortragsauszüge

W. KAUNZNER:

#### Ueber den Einfluss der muslimischen auf die mittelalterliche abendländische Mathematik.

Die Muslime sorgten nach der Festigung ihres Weltreiches dafür, dass die ihnen zugänglichen Werke der Griechen bald in arabischen Uebersetzungen vorlagen. Hinzu kamen noch vor der Jahrtausendwende beachtliche eigene wissenschaftliche Leistungen. Der Einfluss auf Westeuropa machte sich erstmals wahrscheinlich schon zur Zeit Karl d.Gr. bemerkbar, dann in den Arbeiten westlicher Gelehrter, die wie Gerbert von Aurillac, Leonardo von Pisa, Albertus Magnus und andere den direkten Zugang zum arabischen Kulturkreis suchten. Nach der Reconquista blühten im 12. Jh. in Spanien regelrechte Uebersetzerschulen. Hauptsächlich von dort her gelangte ehemals griechisches, ferner arabisches und muslimisches Wissen aus dem 8. - 10. Jh. in den Westen, verbunden freilich auch mit indischen und persischen Einflüssen. Speziell trifft dies für die Mathematik zu. Die einzelnen wissenschaftlichen Renaissance in Westeuropa fussten zu nicht geringem Teil mit auf solchen Grundlagen, die nachweislich über den islamischen Bereich zu uns gelangt waren. Am Beispiel der Entwicklung der Rechenmethoden, der Algebra und der Geometrie wurde das näher ausgeführt.

R. FRANCI:

#### Probable influences of Arabian algebra on the development of algebra in Italy in the fourteenth and fifteenth centuries.

Das vor allem in den letzten Jahren von der Referentin und von L. Toti-Rigatelli durchgeführte Studium vieler Manuskripte des 14. und 15. Jahrhunderts hat gezeigt, dass sich die Algebra in Italien in diesem Zeitraum sehr stark ent-

wickelt hat (vgl.: Toward a history of algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli. Janus 72 (1985), 17-82). In bezug auf diese Entwicklung ist ein wichtiges Problem noch offen, nämlich ob es arabische Einflüsse gegeben hat ausser den wohlbekannten auf Leonardo von Pisa. Es sind bisher in italienischen Manuskripten keine Zitate arabischer Quellen gefunden worden. Trotzdem könnte es solche Einflüsse gegeben haben, wie die Referentin anhand mehrerer algebraischer Traktate wahrscheinlich machte (z.B. MS Fond. prin.II.V. 152, Nationalbibliothek Florenz 1390c; MS Ital. 578, Bibl. Estense Modena).

O. KUROLA:

On Samuel Klingenstierna's contributions to the solution of Riccati equations.

Samuel Klingenstierna (1698-1765), Professor der Geometrie (und später der Physik) in Uppsala, hinterliess eine umfangreiche Sammlung von Manuskripten (grösstenteils unpubliziert), die von elementarer Algebra, klassischer Geometrie, Infinitesimalrechnung, Differentialgleichungen, Mechanik und Optik handeln. Unter seinen Manuskripten mit dem Titel "Methodum fluxionum" (Bd. A 9 c, Universitätsbibliothek Uppsala) sind die Teile über Riccatische Differentialgleichungen von besonderem Interesse. Er betrachtet u.a. die Gleichungen  $dy + ay^2 dx + bx^n dx = 0$ ,  $dy + y^2 dx = ax^{\frac{1}{n}-2} dx$  und  $ax^m dx + bx^{m+1} y dx + cy^2 dx + dy = 0$  und zeigt, wie man deren Lösungen nicht nur mittels unendlicher Reihen sondern auch mittels Kettenbrüchen findet. Er gibt auch Relationen zwischen gewissen Gleichungen 2. Ordnung und Riccatischen Gleichungen erster Ordnung an. Obwohl Klingenstierna durch Euler beeinflusst war (Dissertatio de fractionibus continuis), zeigt er in der Behandlung dieser Probleme grosse Originalität.

L.Y. LAM:

Our numeral system: A Chinese legacy.

Die Referentin versuchte die These zu beweisen, dass unser Zahlensystem, welches gewöhnlich das indisch-arabische genannt wird, seinen Ursprung im System der chinesischen Stäbchenzahlen hat. Sie führte dafür folgende Gründe an: Die zwei Systeme sind identisch in bezug auf drei zentrale Charakteristika, nämlich 1) es gibt neun Zeichen und den Begriff der Null, 2) die Basis des System ist 10 und 3) sie sind Stellenwertsysteme. Unter den Zahlensystemen der Antike ist das System der Stäbchenzahlen das einzige, welches alle diese drei Eigenschaften besitzt. Es ist gut möglich, dass die Stäbchenzahlen vor dem 6. Jh. nach Indien gekommen sind; sie könnten dann in eine für schriftliche

Wiedergabe geeignete Form transformiert worden sein, in der man die Null mit einem Punkt oder kleinen Kreis bezeichnete. Die Möglichkeit der Transmission auf verschiedenen Wegen könnte eine plausible Erklärung für die bisher nicht genügend erklärte Existenz zweier verschiedener Versionen des arabischen Systems sein. Desweiteren wurden Uebereinstimmungen zwischen chinesischen und arabischen Rechenprozeduren als Gründe angeführt.

U.J. LIBBRECHT:

Das chinesische Restproblem

Die älteste numerische Lösung des Restproblems  $N \equiv r_1 \pmod{m_1} \equiv r_2 \pmod{m_2} \equiv \dots \equiv r_n \pmod{m_n}$  befindet sich im Sun-tzu Suan-ching (Ende 15. Jh.), aber völlig ausgearbeitet ist die Methode im Shu-shu chiu-chang des Ch'in Chiu-shao (1247). Seine Ta-yen Regel kann nicht von der indischen Kuttaka abgeleitet werden, sondern war in China durch die Kalender-Verantwortlichen entwickelt worden. Ch'in löst nicht nur Probleme, bei denen die Moduln untereinander teilerfremd sind, sondern auch solche, wo sie gemeinsame Teiler haben - eine Methode, die Gauss noch nicht bekannt war. Die Kongruenzen werden, ausgehend vom Algorithmus des Euklid, durch eine Reihe von Kettenbrüchen gelöst. Die Ta-yen Regel erscheint in ihrer einfachsten Form in Europa zuerst bei Leonardo von Pisa und erreichte einen Höhepunkt in einem Manuskript von 1524 (UB Göttingen). Die erste vollständige Erklärung wurde 1669 durch W. Beveridge gegeben. Der Referent ging dann noch kurz auf die Entwicklung bei Euler, Gauss, Lebesgue, Stieltjes und Mahler ein.

J.C. MARTZLOFF:

Joseph Needham's work on the history of Chinese mathematics revisited.

Needhams Werk über die Geschichte der Mathematik in China (Bd. 3 von "Science and civilisation in China") wurde 1959 publiziert. Unabhängig von kritischen Bemerkungen, die man geltend machen kann, ist es ein herausragendes Werk: es wurde ins Chinesische und Japanische übersetzt und wird von Mathematikhistorikern in aller Welt breit verwendet und zitiert. Nichtsdestoweniger sind seit dem Erscheinen von Needhams Buch eine Reihe von Fortschritten erzielt worden, die das Bild der chinesischen Mathematik modifizieren. Der Referent diskutierte im Lichte dieser neuen Erkenntnisse einige zweifelhafte oder gar unkorrekte Punkte in Needhams Werk, insbesondere

- die Natur des chinesischen Zahlensystems in der Zeit der Shang-Dynastie,
- das Problem der Leerstellen (der "Null") im System der Stäbchenzahlen,
- die Frage des chinesischen Ursprungs der Horner-Methode der Wurzelausziehung (Han-Dynastie),

- das Problem des Einflusses und der Wechselbeziehungen zwischen chinesischer Mathematik und anderen Kulturkreisen.

E: NEUENSCHWANDER:

Fortschritte in der Herausgabe des Lexikons des Mittelalters.

Das Lexikon des Mittelalters (Artemis-Verlag), von dem bis heute die ersten drei Bände erschienen sind, bezweckt eine enzyklopädische Darstellung des gesamten europäischen Mittelalters unter Einbeziehung der angrenzenden Bereiche (Byzantinisches Reich, Kreuzfahrerstaaten, arabischer und jüdischer Kulturraum). Es umfasst die Zeit von ca. 300 u.Z. (Spätantike) bis 1500 (Renaissance), welche es in knapp gehaltenen Personen- und Sachartikeln sowie in grossen fachübergreifenden "Dachartikeln" behandelt. Die einzelnen Fachgebiete, wozu auch die Naturwissenschaften und die Technik gehören, werden von etwa 100 verschiedenen Herausgebern betreut. Der Vortrag gab einen Ueberblick über die vom Referenten geleiteten Fachbereiche Mathematik, Astronomie und Mechanik. Das Gesamtwerk wird einen Umfang von etwa 10 Bänden erreichen.

J.W. DAUBEN:

Chinese mathematics and the significance of the Gou-ku theorem in chapter nine of the Chiu-chang suan-shu.

Der Vortragende präsentierte einige allgemeine Ueberlegungen zur Natur der frühen chinesischen Geometrie, insbesondere am Beispiel des Gou-ku-Theorems, wie es in zwei der frühen chinesischen Klassiker (Arithmetischer Klassiker des Gnomons und der Kreisbahnen am Himmel; Neun Bücher über die Kunst der Mathematik) dargestellt ist. Es wurden Vergleiche angestellt zwischen dem chinesischen Beweis des Theorems und vergleichbaren Versionen in ägyptischen, babylonischen und griechischen Quellen einschliesslich des Euklidischen Beweises des Satzes von Pythagoras. Abschliessende Bemerkungen betrafen die Frage, warum die chinesische Mathematik sich in der Antike nur bis zu ihrem damaligen Stand und nicht weiter entwickelt hat. Bei dieser Frage ging es dem Referenten nicht so sehr um soziologische (die chinesische Gesellschaft war in ihrer Orientierung mehr praktisch als theoretisch) oder philosophische (der Konfuzianismus mass dem theoretischen Wissen wenig Wert bei) Aspekte, sondern um gewisse logische und linguistische Faktoren in der Entwicklung der chinesischen Mathematik.

H. KOGELSCHATZ:

Kritische Anmerkungen zur Aufarbeitung des frühen mathematischen Schrifttums Chinas unter Kaiser Ch'ien-lung (18.Jh.).

Im Zentrum der textgeschichtlichen Untersuchung standen zwei Druckausgaben des Chiu chang suan shu (Neun Bücher über die Kunst der Mathematik): (A) die

Palastdruck-Ausgabe (1774/75) in der Bearbeitung von Tai Chen (1724 - 1777), eine Rekonstruktion des Textes anhand der Exzerpte in der handschriftlichen Ming-Enzyklopädie (1403 ff), und (B) die Wei-po-hsieh-Ausgabe von K'ung Chi-han (1739-1784), die das Datum 1773 trägt und eine getreue Wiedergabe eines Sung-Druckes (1084 bzw. 1213) zu sein verspricht. Angesichts des schon von Ch'ien Pao-t'ung aufgezeigten Widerspruchs zwischen der Kennzeichnung von Ausgabe (B) und ihrer faktischen Abhängigkeit von Ausgabe (A) stellt sich die Frage nach den Hintergründen und Motiven dieses bis in die Gegenwart hinein erfolgreichen Täuschungsmanövers. Zugleich stellt sich die Aufgabe einer Revision von Tai Chens mathematischen Interpretationen auf der Basis des 1980 vom Verlag Wen-wu (Peking) der Allgemeinheit zugänglich gemachten Sung-Fragments.

S. BRENTJES:

#### Untersuchungen zum Nikomachos Arabus

Im Vortrag wurden Ergebnisse zur arabischen Nikomachos-Tradition vorgestellt, der die mathematikhistorische Forschung bisher nur wenig Aufmerksamkeit geschenkt hat. Im speziellen wurde das "Buch der Vorbereitung der Erfreung über die Geheimnisse der Zahlen" von Ibn Fallus (1194-1252) besprochen. Es wurde gezeigt, dass einige bedeutende Mathematiker in der Zahlentheorie Euklid bevorzugt haben, während andere Euklid und Nikomachos eher gleichrangig bewerteten. Die zahlentheoretischen Kapitel von Enzyklopädiën orientieren sich dagegen inhaltlich, d.h. in der Themenwahl, der Art der Formulierung der Aussagen und in der Klassifikation der Zahlen, zunehmend an Nikomachos. Der zahlentheoretische Text von Ibn Fallus widerspiegelt diese an den Enzyklopädiën erkennbare Tendenz. Mit Ausnahme des "Buches der Genesung" von Ibn Sinā weichen alle untersuchten Texte in der Terminologie und Stilistik deutlich von der arabischen Uebersetzung der Nikomachischen Arithmetik durch Tābit b. Qurra ab. Daraus lässt sich hypothetisch die Existenz einer anderen arabischen Uebersetzung ableiten. Ausserdem zeigt ein stichpunktartiger Vergleich zwischen der Uebersetzung von Tābit b. Qurra und dem edierten griechischen Text der "Introductio Arithmeticae", dass Tābit offenkundig eine davon abweichende griechische Textvariante ins Arabische übersetzt hat. An konkreten mathematischen Einzelleistungen wurden einige Beiträge zu den vollkommenen und befreundeten Zahlen vorgestellt. (Der Vortrag wurde von Frau Y. Dold-Samplonius verlesen).

A. DJEBBAR:

#### Quelques aspects de théorie des nombres au Maghreb à travers le 8<sup>e</sup> chapitre du Fiqh al-Hisāb d' Ibn Mun<sup>c</sup>im (m. 1228).

Ibn Mun<sup>c</sup>im war ein Mathematiker andalusischer Herkunft. Er hat mehrere Bücher zur Geometrie und Zahlentheorie verfasst. Ein einziges Buch ist uns bisher

überliefert, das *Fiqh al Hisāb*, geschrieben in Marrakech Ende des 12. oder Anfang des 13. Jahrhunderts. Es wurde 1982 in Rabat gefunden. Die besondere Bedeutung des Kapitels VIII dieses Werkes liegt darin, dass es einen der wenigen erhalten gebliebenen Texte zur Zahlentheorie des islamischen Westens darstellt. Dieses Kapitel VIII und seine Fortsetzungen in den Kapiteln IX und X informieren uns über: 1. Die Fortführung der zwei arithmetischen Traditionen des Euklid und des Nikomachos in Andalusien und Maghreb in bezug auf das Studium gewisser Klassen ganzer Zahlen (gerade, ungerade, gerademal gerade, gerademal ungerade, befreundete, vollkommene usw.). 2. Die Fortsetzung der zweifachen arabischen Tradition der Behandlung endlicher Reihen (arithmetischer, geometrischer, Reihen von Potenzen) und ihrer Summation. 3. Die Verwendung des Verfahrens der Analysis und Synthesis beim Beweis von arithmetischen Sätzen. Das o.g. Werk ist auch von Bedeutung für Informationen über die verlorenen mathematischen Schriften Andalusiens und über die maghrebischen Mathematiker.

J.P. HOGENDIJK:

King Yūsuf al Mu'taman ibn Hūd as a geometer.

Das kürzlich entdeckte "*Kitāb al Istikmāl*" (Buch der Vervollkommnung) des al-Mu'taman ibn Hūd (der in Saragossa von 1081 bis 1085 regierte) ist grösstenteils eine Kompilation mathematischer Materialien aus den Werken früherer Autoren. Die Art und Weise, wie dieses Material angeordnet und gestrafft wurde, zeigt, dass al-Mu'taman diese früheren Werke vollkommen beherrschte und dass er sie gelegentlich besser verstand als deren Autoren selbst (als Beispiel dafür wurde das Problem der Konstruktion des Reflexionspunktes beim sphärischen Spiegel aus Ibn al-Haythams Optik herangezogen). Die erhaltenen Fragmente der Teile 2 - 5 des *Istikmāl* enthalten auch einige Theoreme, welche man in anderen bekannten antiken oder mittelalterlichen Quellen nicht finden kann, und weil al-Mu'taman nirgends auf irgendein anderes Werk oder irgendeinen anderen Autor verweist, bleibt der Ursprung dieser Theoreme manchmal im Dunkeln (dies ist z. B. der Fall beim "Satz des Ceva"). In einigen Fällen gibt es Hinweise darauf, dass al-Mu'taman der Autor der fraglichen Sätze ist (Beispiele sind die Konstruktion zweier mittlerer Proportionaler mittels Kreis und Parabel und einige Sätze über Segmente von Kegelschnitten).

K. JAOUICHE:

Analysis and Synthesis: The book of Ibn al-Haytham.

Die Methode der Analysis und Synthesis war in der griechischen und besonders in der arabischen Mathematik weit verbreitet. Aber während wir viele Texte haben, wo diese Methode angewendet wird, haben wir nur sehr wenige, wo sie erklärt und kommentiert wird (z.B. für fast die gesamte griechische Literatur nur zwei Seiten in Pappos' "Collectio"). Das unterstreicht die Wichtigkeit der

drei überlieferten arabischen Bücher über Analysis und Synthesis: das von Ibrahim Ibn Sinān (909-946), das von As-Sis̄gi (10.Jh.) und das von Ibn al-Haytham (965-1041). Dies letztere Buch hat fünf Teile und handelt von Analysis und Synthesis in den vier fundamentalen antiken und mittelalterlichen Wissenschaften: Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik. Im ersten Teil erklärt Ibn al-Haytham, was seiner Meinung nach die Natur des mathematischen Denkens ausmacht. Er meint, dass es nicht auf rein syllogistische Deduktionen reduziert werden kann und hebt die Intuition des Mathematikers hervor. Nachdem er im zweiten Teil eine interessante Klassifikation der verschiedenen Arten von Analysis und Synthesis gegeben hat, erklärt Ibn al-Haytham im dritten die logische Natur der Analysis. Im vierten macht er Bemerkungen zu den "Data" des Euklid und im fünften Teil gibt er Beispiele von Anwendungen der Methode auf konkrete Probleme.

D. KING:

Mathematics in the service of Islam.

Der Vortrag widmete sich drei der insgesamt fünf Hauptgebiete der "Islamischen Wissenschaften": (1) der Problematik des Mondkalenders, (2) der Bestimmung der Gebetszeiten und (3) der Bestimmung der Richtung von Mekka von einem gegebenen Ort aus. (1): Die muslimische Astronomie entwickelte eine Reihe von Kriterien zur Voraussage der Sichtbarkeit des Halbmondes. Es wurde vom Referenten ausführlich auf Sichtbarkeitstabellen und zugrundeliegende Sichtbarkeitsbedingungen eingegangen. (2): Die Gebetszeiten wurden astronomisch bestimmt. Seit dem 9. Jh. gab es dafür Tafeln, die nach und nach immer komplizierter und umfangreicher wurden. Diesen Tafeln liegen bedeutende Leistungen in der sphärischen Trigonometrie und Astronomie einschliesslich der zugehörigen numerischen Berechnungen zugrunde. (3): Ab etwa 800 kannte man für die Bestimmung der Richtung von Mekka exakte Methoden, ab etwa 900 nutzte man Projektionsmethoden und sphärische Trigonometrie. Die Tafeln, die man vom 9.Jh. an zur Bestimmung der Richtung von Mekka bei gegebener geographischer Breite und Länge hatte, beruhten jedoch mehr auf approximativen denn auf exakten Formeln. - Die Mathematik, die in allen drei besprochenen Fällen den z.T. sehr umfangreichen Tabellen zugrundeliegt, verdient besondere Beachtung als ein neues Kapitel in der Geschichte der arabischen Mathematik.

E.S. KENNEDY:

Iterative algorisms in medieval science.

Der Referent demonstrierte fünf Beispiele für die Anwendung iterativer Algorithmen in der islamischen Wissenschaft. Auf dem Gebiet der Mathematik handel-

te es sich um die Auflösung der Kepler-Gleichung  $y = x - b \cdot \sin x$  nach  $x$  aus den Tafeln von al-Habash al-Hāsib al Marwazī (um 830) und um die Berechnung von  $\sin 1^\circ$  durch al-Kāshī (um 1420), auf dem Gebiet der graphisch-mechanischen Verfahren um die Bestimmung der Tageszeit mit dem Shakkāziya-Astrolab des al-Zarqālluh (gest. 1100), für astrologische Zwecke um die Bestimmung des Konzeptionstermins zur Sicherung eines günstigen Geburtstermins nach den Khāqānischen Tafeln al-Kāshīs und auf dem Gebiet der Astronomie um die Bestimmung des Aufgangspunktes aus al-Kāshīs Tafeln. In seinen allgemeinen Bemerkungen rief der Referent dazu auf, die Errungenschaften der Araber in der Geschichte der Mathematik besser zu berücksichtigen, insbesondere auf den Gebieten Numerik, Trigonometrie, analoge Rechengерäte und graphische Methoden. Er hob hervor, dass für die Historiographie der Mathematik im islamischen Bereich die Verbindung von Mathematik und Astronomie besonders zu beachten ist.

A. VOLODARSKY:

The study of ancient and medieval Indian mathematics: its achievements and prospects.

Der Vortrag beschäftigte sich mit allgemeinen Problemen der Mathematikgeschichte, die nicht nur für Indien, sondern auch für andere antike Zivilisationen wie Babylonien, Aegypten und China, von grundlegender Bedeutung sind: (1) Zeit und historischer Ort des Beginns von Mathematik als Wissenschaft, (2) gab es eine Einheitlichkeit des mathematischen Wissens oder eine Vielzahl von "Mathematiken"? (3) gab es eine einzige Quelle der Mathematik oder mehrere unabhängige Anfänge mathematischen Wissens? (4) das Problem der Interpretation antiker Texte, (5) die Mathematisierung der Naturwissenschaften in der Antike und (6) der Ursprung des dezimalen Positionssystems. Zu (1) setzte sich der Referent mit der Auffassung auseinander, Mathematik als Wissenschaft beginne dort, wo sie eine deduktive Struktur annehme. Zu (2) meinte er, dass im Anfangsstadium einer jeden Zivilisation ein im wesentlichen gleichartiges mathematisches Wissen (von der Struktur, den Methoden und Problemen her) festzustellen sei. Zu (3) ging der Referent auf die Diskussionen um van der Waerden's These eines einheitlichen Ursprungs aller Mathematik ein. Problem (4) machte er an der Diskussion um die Diophant-Interpretation von I. Baschkakova deutlich. (5) und (6) behandelte er speziell im Hinblick auf den indischen Kulturkreis.

M. ASCHER; R. ASCHER:

An introduction to quipus: a logical-numerical system in a New World civilisation.

Die Referenten wiesen zunächst auf einige Errungenschaften der Inka-Kultur

vor ihrer Vernichtung durch Pizarro und seine Nachfolger. Die Inka-Zivilisation in Südamerika wird i.a. als Ausnahme von der Regel angesehen, dass eine entwickelte Zivilisation eine Schrift besitzt. Dessen ungeachtet hat die staatliche Bürokratie der Inka Informationen aufgezeichnet und über ein riesiges Imperium verbreitet. Sie bediente sich dabei eines Hilfsmittels, welches "quipus" genannt wurde. Die quipus sind mehrfarbige räumliche Anordnungen verknoteter Schnüre, die ein logisch-numerisches System verkörpern. Es sind mehrere hundert solche Objekte erhalten geblieben, die zwischen 3 und 2000 Schnüre besitzen. Die Referenten stellten das System und die logische Struktur einiger dieser Gebilde vor und gaben Möglichkeiten zur Entschlüsselung der darin enthaltenen quantitativen und nichtquantitativen Daten an. Einige spezifische Beispiele von arithmetischen und logischen Beziehungen auf solchen quipus wurden angegeben.

J. FAUVEL:

The Western discovery of Indian mathematics: Henry Colebrooke and his contemporaries as a test case for Orientalism.

In seinem Buch "Orientalism" (1978) diskutierte Edward Said die These, dass der Orient eine ideologische Erfindung des Westens sei, wobei der orientalistische Diskurs den Mechanismus der europäischen Vorherrschaft über den Osten verkörpere. Das starke Aufblühen der britischen Sanskrit-Wissenschaft im frühen 19. Jh. ist ein zentraler Punkt, in dem Said die Entstehungsperiode dieser Vorherrschaft sieht. Der Referent untersuchte das Werk von Henry Colebrooke, des Uebersetzers von Bhramagupta und Bhaskara, und das anderer britischer Orientalisten (Taylor, Rosen u.a.) und die Reaktion auf ihre Schriften (z.B. bei J. Leslie), um festzustellen, ob das bis dahin nie dagewesene Zugänglichmachen indischer mathematischer Werke aus Saims Perspektive besser verstanden werden kann.

I. GRATTAN-GUINNESS:

On the recognition of Arabic mathematics in the writings of Montucla and Delambre.

Der Vortrag war ein Beitrag zur Geschichte der Geschichtsschreibung der arabischen Mathematik. Zwei Werke wurden betrachtet: Bd. 1 der "Histoire des mathématiques" von Montucla (1799) und die "Histoire de l'astronomie du moyen age" von Delambre. Beide Autoren haben ehrlich zugegeben, dass sie das Arabische nicht beherrschen, sich aber nicht weiter beunruhigt gezeigt, dass sie dadurch vollkommen auf lateinische Editionen angewiesen waren. Montucla gab einen Einblick in die arabische Mathematik ganz in dem Sinne, wie er von Teilnehmern dieser Konferenz gefordert wurde: er betrachtete nicht nur Arith-

metik, Algebra und Geometrie, sondern auch Astronomie, Optik und Musik. Ausser Montucla und Delambre waren auch verschiedene andere ihrer Zeitgenossen an arabischer und orientalischer Mathematik interessiert. Sie übersetzten und edierten einige Texte, insbesondere die Tafeln von 'Ebn Younis' nach einem in Leiden vorhandenen Manuskript (1804). Zu Beginn seines Vortrags machte der Referent einige Bemerkungen über die französische Expedition nach Aegypten (1798-1801) und ihre Bedeutung für die Entstehung der Aegyptologie.

A.P. JUSCHKEVITCH:

Mathématique "orientale" et mathématique "occidentale" au Moyen Age.

Der Referent warf eine Reihe von allgemeinen Fragen auf, welche die Verwendung von Begriffen wie "Wissenschaft", "Beweis", "Revolution in der Wissenschaft", "Strenge" u.a. betreffen - Begriffen, die von den Wissenschaftshistorikern, insbesondere den Mathematikhistorikern, unterschiedlich behandelt und benutzt werden. Es wurden die "eurozentristische" Konzeption der Entwicklung der Mathematik betrachtet, die im 19. Jh. vorherrschte und die auch in unserer Zeit Anhänger hat, und die "asienzentristische" Konzeption, die an Verbreitung zu gewinnen beginnt. In den chronologischen Grenzen der antiken und mittelalterlichen Zivilisationen standen diese Konzeptionen einander nicht selten gegenüber. Es wurde die Notwendigkeit hervorgehoben, den konkreten Sinn der in einer historischen Untersuchung verwendeten Terminologie präzise anzugeben. Die Unterschiede zwischen den allgemeinen Tendenzen etwa der mittelalterlichen Mathematik in den Ländern des Ostens und Europas und den für die verschiedenen Regionen charakteristischen spezifischen Zügen sollten deutlich herausgearbeitet werden. Bei richtiger Interpretation widerspiegeln die Ausdrücke "östlich" und "westliche" Wissenschaft durchaus den realen Verlauf der Entwicklung der Mathematik. Der Referent kritisierte den von E. Renan benutzten Ausdruck "Griechisches Wunder"; analoge Wunder findet man in vielen Ländern und auf vielen Gebieten der geistigen Kultur der Menschheit und man benötigt in der Geschichtsforschung in jedem Fall eine genaue Analyse der sozialen und logisch-psychologischen Bedingungen.

J.L. BERGGREN:

Sheres of influence: The Islamic world's acquisition and naturalization of Greek sperics.

Der Vortrag präsentierte einen Teil der Untersuchungen des Referenten zur Geschichte griechischer Texte über Sphärik vom 4. Jh. v.u.Z. bis zum 13. Jh.u.Z. in Griechenland und in den Ländern des Islam. Es ging vor allem um die Sammlung, die in der Spätantike als "Die kleine Astronomie" bekannt war und die einen

Lehrtext für Studenten darstellte. Sie enthielt Abhandlungen von Euklid, Autolykos, Hypsikles, Aristarch und Theodosios. Im Verlaufe des 9. Jh. wurde dieses Material ins Arabische übersetzt und in eine grössere Sammlung von Lehrmaterial eingefügt, welches in der islamischen Welt als "Die mittleren Bücher" bekannt war. Diese Sammlung enthielt nicht nur Material zur Sphärik, sondern auch Abhandlungen über eine breite Vielfalt mathematischer Gegenstände. Das Ziel des Vortrags war es, zu zeigen, wie dieses Material sowohl bei seiner Transformation ins Arabische als auch durch die nachfolgenden Forschungen in den islamischen Ländern verändert und geformt wurde. Es zeigten sich Änderungen folgender Art: (1) Bessere Herausarbeitung der logischen Struktur, (2) Hinzufügung von Material, anscheinend um Lücken in der Argumentation zu füllen und (3) die Veränderung von Beweisen, um einen einheitlichen Zugang zu verschiedenen Fällen zu erreichen.

G.P. MATVIEVSKAJA:

Die Erforschung der arabischen Mathematik in Usbekistan.

Der Vortrag gab einen Ueberblick über die in Usbekistan durchgeführten Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik des mittelalterlichen Nahen und Mittleren Ostens. Grosse Aufmerksamkeit hat man dabei der Edition (in russischer und usbekischer Sprache) und der Popularisierung der Werke herausragender Gelehrter Mittelasiens (al-Khwārizmi, al-Bīrūnī, Ibn Sina, Ulug Beg u.a.) geschenkt. Gegenwärtig besteht die Hauptaufgabe in der Erforschung einer beträchtlichen Anzahl mathematischer und astronomischer Manuskripte, die am Institut für orientalische Studien der Akademie der Wissenschaften der Usbekischen SSR in Taschkent aufbewahrt werden. Die Referentin gab eine kurze Charakterisierung dieser Manuskriptsammlung und ging der Geschichte ihrer Entstehung nach.

J. SESIANO:

Der "Liber mahameleth".

Eines der umfangreichsten mathematischen Werke des frühen lateinischen Mittelalters ist der "Liber mahameleth". Er wurde in der zweiten Hälfte des 12. Jh. in Spanien verfasst, und zwar von einem unbekanntem Mathematiker, dem arabische Quellen zur Verfügung standen. Das Werk zerfällt in zwei Hauptteile. Im ersten werden die Grundlagen der Rechenkunst erklärt (arithmetische Operationen mit ganzen Zahlen und Brüchen sowie Näherungsverfahren für das Ausziehen von Quadratwurzeln). Der zweite besteht aus Anwendungen auf den Handelsverkehr (arabisch "mu'āmalāt" - daher der Name des Buches) sowie Unterhaltungsaufgaben. Von einem guten Teil der ca. 325 Aufgaben wird nicht nur eine arithmetische, sondern auch eine algebraische Auflösung gegeben sowie ein geometrischer Beweis nach Euklidischem Muster dargeboten. Mit diesem Werk wird ein-

deutig gezeigt, dass im damaligen Spanien nicht bloss Uebersetzer, sondern auch Mathematiker wirkten, die das Vorhandensein arabischer Quellen zur Vertiefung ihrer Kenntnisse und zum Verfassen selbständiger Werke genutzt haben.

M.M. ROZANSKAJA:

Die arabische Statik.

Die Referentin umriss den Gegenstand der Mechanik als einer wissenschaftlichen Disziplin im Mittelalter. Die Hauptrichtungen der mittelalterlichen arabischen Mechanik waren die theoretische und die praktische Richtung. Erstere wurde in der geometrisch-axiomatischen Tradition des Archimedes, letztere in der kinematischen Tradition des Heron betrieben. In die theoretische Richtung fallen folgende Probleme und Gebiete: Gewicht und Schwere, Kraft und Gleichgewicht, Schwerpunkt ebener Figuren, Schwerpunkt von Körpern und Systemen von Körpern, Hydrostatik. Grundlegende Probleme der praktischen Richtung waren das Studium der sogenannten einfachen Maschinen und ihrer Kombinationen, die Theorie der Gewichte und des Wägens, die Bestimmung des spezifischen Gewichts und der Zusammensetzung von Legierungen. Hierbei bediente man sich arithmetischer, algebraischer und geometrischer Methoden sowie mechanischer Verfahren (Wägen von Mustern nach speziellen universalen Gewichten). Referentin gab einen Abriss über ein grundlegendes Werk der Statik im mittelalterlichen Orient, das "Kitab mizām al-hikma" (Buch der Waage der Weisheit) des al-Khāzini (12.Jh.).

R. LORCH:

The determination of tawassut (mediatio) in Arabic astronomy.

Die "mediatio", der Ko-Kulminationspunkt der Ekliptik, war eine vielbenutzte Sternkoordinate in der mittelalterlichen arabischen Astronomie. Man findet sie gewöhnlich in Kombination mit der Deklination oder (speziell in Instrumente betreffenden Texten) mit der Distanz zwischen mediatio und Stern benutzt. Im "Qānūn" behandelte al-Bīrūnī (11.Jh.) die Bestimmung von Deklination und mediatio aus Länge und Breite und umgekehrt, und zwar ziemlich am Beginn des Kapitels über sphärische Astronomie. Die Methoden des Qānūn und anderer Werke al-Bīrūnīs wurden im Vortrag verglichen mit denen der "tabulae probatae" (9.Jh.), mit al-Battānī (um 900) und Ptolemaios (2.Jh.), um die Entwicklung der sphärischen Trigonometrie bis zur Zeit al-Bīrūnīs zu illustrieren.

A. DJAFARI-NAEINI:

Muhammad Bāqir Yazdī, ein persischer Mathematiker aus dem 17. Jahrhundert.

Zur Zeit der Safaviden-Dynastie lebte (wahrscheinlich in Isfahān) Muhammad Bāqir Yazdī (gest. etwa 1637). Sein wichtigstes Werk ist 'Uyūn al-hisāb. Es

gibt Zeugnis über den damaligen Stand des mathematischen Wissens in Persien. Hieraus wurden zwei zahlentheoretisch wichtige Abschnitte behandelt: die Gewinnung der befreundeten und der gleichgewichtigen Zahlen. Zu den befreundeten Zahlen hat Yazdī nach der Regel von Tābit ibn Qurra (830-901) ein neues Zahlenpaar, 9363584 und 9437056, gefunden. Ein Novum stellen die gleichgewichtigen Zahlen dar (das sind Zahlen mit  $\sigma'(a) = \sigma'(b)$ ), für deren Auffinden er eine Bildungsregel aufgestellt hat. Als Beispiel gibt er das Zahlenpaar 39 und 55 an. Nach Angaben seines Uebersetzers Hātunābādī jedoch reicht diese Regel nicht aus, um alle gleichgewichtigen Zahlen aufzufinden. Als Beweis dafür gibt er ein kleineres Paar an, das er nicht nach Yāzsis Anleitung gefunden hat. Im Vortrag wurden nun drei neue Bildungsgesetze vorgestellt. Ausserdem wurde der Satz bewiesen, dass die Anzahl der gleichgewichtigen Zahlen, die ein gemeinsames Gewicht grösser 1 haben, endlich ist.

#### Y. DOLD-SAMPLONIUS:

##### Quadratic equations in Arabic mathematics.

Obwohl schon den Babyloniern bekannt war, wie man quadratische Gleichungen löst, waren die ersten, die systematische Abhandlungen über diesen Gegenstand schrieben, arabische Mathematiker: Sind ibn 'Alī, Ibn Turk und besonders Muh. b. Mūsā al-Khwārizmī. An al Khwārizmīs Kompendium der Algebra (Kitāb al-mukhtaṣar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala) anknüpfend, hat eine Reihe von Gelehrten über mehrere Jahrhunderte die Arbeit an den quadratischen Gleichungen fortgesetzt. Die einfache algebraische Lösung blieb dieselbe und ist sogar noch zu finden - in eine elegante Form gebracht - in al-Kāshīs "Schlüssel der Arithmetik" (Miftah al-hisāb), welcher 1427 erschien. Gleichzeitig wurden aber auch speziellere Lösungen entwickelt und al-Khwārizmīs geometrischer Beweis, der lediglich rein illustrativ und erklärend war, wurde bald durch eine strengere Beweisführung ersetzt. Diese griff auf Euklid zurück, insbesondere auf die Sätze II,5, II,6 und VI,24.

#### M. SCHRAMM:

##### Maya-Astronomie.

Alles was von der Wissenschaft der Maya an Quellen vorhanden ist, zeigt eine Mathematik, die im Elementaren blieb. Die Maya haben aber mit dieser Mathematik erstaunliche astronomische Leistungen vollbracht. Die Hieroglyphen der Maya sind nur zum geringen Teil entziffert. Man weiss jedoch, dass sie ein Positionssystem zur Basis 20 hatten, welches ausschliesslich der Tageszählung diente. Ihrem Kalendarium lag ein Zyklus von  $13 \cdot 20 = 260$  Tagen zugrunde. Der Referent hat sich mit seinen Mitarbeitern hauptsächlich mit der Mondtafel des

Codex Dresden beschäftigt. Der Umfang der Tafel beträgt 11960 Tage. Legt man den 260-er Zyklus zugrunde und ordnet die Daten auf einem Kreis mit 260 Umfangseinheiten an, so kann man feststellen, dass alle Daten dieser Tafel in drei Sektoren des Kreises liegen. Die entscheidende Hypothese des Referenten bestand darin, dass es sich bei dieser Tafel nicht um direkte Voraussagedaten von Mondfinsternissen handelt, sondern um ein Raster von kritischen Daten, in dem sich Finsternisse ereignen können. Eine Ueberprüfung ergab, dass tatsächlich keine Finsternisse aus diesem Raster herausfallen. Der Referent erläuterte den astronomischen Hintergrund seiner Erklärung und ging dann noch kurz auf das Problem der Sonnenfinsternisse ein.

Berichterstatter: W. Purkert (Leipzig)

Tagungsteilnehmer

Dr. K. Andersen  
History of Science Department  
Aarhus University  
Ny Munkegade

DK-8000 Aarhus C

Prof.Dr. P. Bockstaele  
Graetboslaan 9

B-3031 Oud-Heverlee

Prof.Dr. M. Ascher  
524, Highland Road

Ithaca , NY 14850  
USA

Prof.Dr. H. J. M. Bos  
Mathematisch Instituut  
Rijksuniversiteit te Utrecht  
Budapestlaan 6  
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Prof.Dr. R. Ascher  
524, Highland Road

Ithaca , NY 14850  
USA

Prof.Dr. U. Bottazzini  
Via Plutarco 12

I-20145 Milano

Dr. J. L. Berggren  
435, Donald Street

Coquitlam , B. C. V3K 3Z9  
CANADA

Dr. W. Breidert  
Philosophisches Seminar  
der Universität  
Kollegium am Schloß, Bau II

7500 Karlsruhe

Dr. C. Binder  
Inst. f. Analysis, Technische  
Mathematik u. Versicherungsmathem.  
Technische Universität Wien  
Wiedner Hauptstr. 8 - 10/114

A-1040 Wien

Dr. H. L. L. Busard  
Herungerstraat 123

NL-5911 AK Venlo

Prof.Dr. J. W. Dauben  
Department of Mathematics  
Herbert H. Lehman College  
CUNY  
Bedford Park, Blvd. West

Bronx , NY 10468  
USA

Dr. Y. Dold  
Türkenlouisweg 14  
6903 Neckargemünd

Dr. S. S. Demidov  
Institute of the History of Science  
and Technology  
of the ANSSR  
Staropanski per 1/5

103012 Moscow K-12  
USSR

Prof.Dr. J. Fauvel  
Faculty of Mathematics  
The Open University  
Walton Hall

GB- Milton Keynes , MK7 6AA

Prof.Dr. J. G. Dhombres  
Mathematiques  
Universite de Nantes  
2, chemin de la Houssiniere

F-44072 Nantes Cedex 03

Dr. E.A. Fellmann  
Euler-Edition  
Arnold-Böcklin-Straße 37

CH-4051 Basel

Prof. Dr. A. R. Djafari-Naini  
Department of Mathematics  
Faculty of Science  
Shahid Beheshti University  
Eveen

Teheran  
IRAN

Prof.Dr. M. Folkerts  
Institut für Geschichte der  
Naturwissenschaften  
der Universität München  
Deutsches Museum

8000 München 26

Prof.Dr. A. Djebbar  
Mathematiques  
Universite de Paris Sud (Paris XI)  
Centre d'Orsay, Bat. 425

F-91405 Orsay Cedex

Dr. J. Folta  
Ustredni archiv CSAV  
Karlova 2

110 00 Praha 1  
CZECHOSLOVAKIA

Prof. Dr. R. Franci  
Centro Studi della Matematica  
Medioevale  
Universita di Siena  
Via del Capitano 15

I-53100 Siena

I. Hupp  
Unterer Sandbühlweg 9  
8708 Gerbrunn

Prof. Dr. N. de Grande-de Kimpe  
Dept. of Mathematics  
Vrije Universiteit  
CP 218 Campus Plaine  
Pleinlaan 2(10 F 7)

B-1050 Bruxelles

Prof. Dr. K. Jaouiche  
128, rue de la croix Nivert  
F-75015 Paris

Dr. I. Grattan-Guinness  
34, Hillside Gardens  
GB- Barnet, Herts EN5 2NJ

Prof. Dr. A. P. Juskevic  
Institute for the History of  
Science and Technology  
Staropanski 1/5

Moscow 103012  
USSR

Dr. J. J. Gray  
Faculty of Mathematics  
The Open University  
Walton Hall

GB- Milton Keynes , MK7 6AA

Prof. Dr. W. Kaunzner  
Zollerstraße 9  
8400 Regensburg

Dr. J. P. Hogendijk  
Mathematisch Instituut  
Rijksuniversiteit te Utrecht  
Budapestlaan 6  
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Prof. Dr. E. S. Kennedy  
Institut für Geschichte der  
Arabisch-Islamischen Wissenschaften  
Universität  
Beethovenstraße 32

6000 Frankfurt 1

Prof.Dr. D. King  
Institut für Geschichte der  
Naturwissenschaften  
Universität  
Beethovenstraße 32

6000 Frankfurt

Phil. Lic. O. Kurola  
Dept. of Mathematics  
University of Oulu  
Linnanmaa

SF-90570 Oulu

Dr. W. Kirsanov  
Institute for the History of  
Science and Technology  
Staropanskii 1/5

Moscow 103012  
USSR

Prof.Dr. L. Y. Lam  
Department of Mathematics  
National University of Singapore  
Kent Ridge

Singapore 0511  
SINGAPORE

Prof.Dr. E. Knobloch  
Frohnauer Str. 117

1000 Berlin 28

Prof.Dr. U. Libbrecht  
Zulzekestraat 32

B-9690 Kluisbergen

Dr. H. Kogelschatz  
Kapuzinerstraße 20/III Rgb.

8000 München 2

Dr. R. P. Lorch  
Branmsstr. 8

8034 Germering

M. Kool  
Jonkheer Ramweg 28 B  
NL-3998 JR Schalkwijk

Dr. J. Lützen  
Matematisk Institut  
Kobenhavns Universitet  
Universitetsparken 5

DK-2100 Kobenhavn

Prof.Dr. J. C. Martzloff  
Charge de Recherche au  
CNRS  
146, rue Danielle Casanova

F-93200 Saint-Denis

Prof.Dr. K. Reich  
Ehrenhalde 23

7000 Stuttgart 1

Prof.Dr. G. P. Matvievskaya  
Institute of Mathematical Studies  
of the Academy of Sciences of Uzbek  
SSR  
Faizula Khodzhaeva 29

700 143 Tashkent 41  
USSR

Dr. M. M. Rozhanskaya  
Institute for the History of  
Science and Technology  
Staropanskii 1/5

Moscow 103012  
USSR

PD Dr. E. Neuenschwander  
Mathematisches Institut  
der Universität Zürich  
Rämistr. 74

CH-8001 Zürich

Prof.Dr. I. Schneider  
Institut für Geschichte der  
Naturwissenschaften  
der Universität München  
Deutsches Museum

8000 München 26

Dr. L. Novy  
Ustredni archiv CSAV  
Karlova 2

110 00 Praha 1  
CZECHOSLOVAKIA

Dr. E. Scholz  
Julius-Lucas-Weg 48 b

5600 Wuppertal 1

Dr. W. Purkert  
Karl-Sudhoff-Institut für  
Geschichte der Naturwissenschaften  
und der Medizin  
Talstraße 33/II

DDR-7010 Leipzig

Prof.Dr. M. Schramm  
Institut für Geschichte der  
Naturwissenschaften der Universität  
Köstlinstraße 6

7400 Tübingen

Dr. G. Schubring  
Institut für Didaktik der  
Mathematik  
der Universität Bielefeld  
Postfach 8640

4800 Bielefeld 1

Prof.Dr. O. Volk  
Matthias-Ehrenfried-Str. 19  
8700 Würzburg

Prof.Dr. C.J. Scriba  
Institut für Geschichte der Natur-  
wissenschaften, Mathematik und  
Technik der Universität Hamburg  
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Dr. A. I. Volodarsky  
Institute for the History of  
Science and Technology  
Staropanskii 1/5

Moscow 103012  
USSR

Dr. J. Sesiano  
Dept. de Mathematiques  
Ecole Polytechnique  
Federale de Lausanne

CH-1015 Lausanne-Dorigny

Prof.Dr. H. Wußing  
Karl-Sudhoff-Institut für  
Geschichte der Naturwissenschaften  
und der Medizin  
Talstraße 33/II

DDR-7010 Leipzig

Prof.Dr. L. Toti Rigatelli  
Centro Studi della Matematica  
Medioevale  
Universita di Siena  
Via del Capitano 15

I-53100 Siena

11  
12  
13  
14

