MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 14/1988

Degeneration von Hodge Strukturen

4. 4. 88 bis 9. 4. 88

Die Tagung fand unter Leitung von Hélène Esnault (Bonn), Joseph Steenbrink (Nijmegen) und Eckardt Viehweg (Essen) statt.

Die Kohomologie einer glatten projektiven Varietät läßt sich in natürlicher Weise in Hodge-Typen zerlegen. Die Tagung beschäftigte sich mit der Frage:

Wie verändert sich diese Hodge-Zerlegung, wenn die Varietät singulär wird?

Der allgemeine Rahmen dieser Untersuchung wird durch den Begriff einer abstrakten (im Gegensatz zur geometrischen) Variation von Hodge-Strukturen geschaffen. Die lokalen Eigenschaften einer solchen Variation spiegeln sich in dem Verhalten der Periodenabbildung in den zugehörigen klassifizierenden Raum von Hodgestrukturen wider.

Diese Periodenabbildung wird durch nilpotente Orbits und in einem weiteren Schritt durch SL_2-Orbits approximiert. Diese Approximation erlaubt dann Aussagen über das Verhalten der Hodge-Metrik. Insbesondere kann man im Limes, also im singulären Fall, keine reine Hodge-Struktur mehr erwarten, sondern eine gemischte Hodge-Struktur im Sinne von Deligne.

Ziel der Tagung war die Anwendung dieser Theorie in dem "Purity"-Theorem und in dem Beweis der Gleichheit von Schnittkohomologie und L^2-Kohomologie.

Vortragsauszüge

Th. Höfer (Bonn):

Einführung

Der Begriff der **Variation einer polarisierten Hodge-Struktur** wurde in der folgenden geometrischen Situation motiviert. Die Kohomologie der Fasern eines projektiven glatten Morphismus $f : X \to S$ von komplexen Mannigfaltigkeiten trägt eine Hodge-Struktur, die durch das Cup-Produkt mit der Fundamentalform $\eta_s \in H^2(X_s, \mathbb{Z})$ polarisiert wird. Hier variieren die Hodge-Filtrierungen $F^\cdot$ holomorph im Basispunkt, ferner erfüllen die Hodge-Filtrierungen die Transversalitätsbedingung $\nabla F^p \subset F^{p-1}$ bezüglich des Gauß-Manin-Zusammenhangs ∇.

Eine Variation von Hodge-Strukturen wird über die zugehörige **Periodenabbildung** ϕ beschrieben, die jeder Hodge-Struktur den zugehörigen Punkt im Periodenbereich D zuordnet. Dabei ist D offen in der projektiven algebraischen Varietät $\hat{D}$ aller Hodge-Filtrierungen mit den vorgegebenen Hodge-Zahlen.

Schließlich wurde angedeutet, warum die Periodenabbildung horizontal ist.

Ch. Peters (Leiden):

Die Differentialgeometrie des Periodenbereiches

Für die offene Einheitsscheibe Δ und die punktierte Scheibe Δ^* wurde die **Poincaré-Metrik** angegeben und dazu der Zusammenhang, die Krümmung und die Schnittkrümmung berechnet. Dies wurde dann auf metrisierte Hodge-Bündel angewandt.

Es wurde der **Monodromie-Satz** bewiesen:

Der Monodromieoperator N einer Variation von polarisierten Hodge-Strukturen ist quasi-unipotent, hat also nur Einheitswurzeln als Eigenwerte.

Schließlich wurde ein Beweis der **Erweiterungseigenschaft** skizziert: die Abbildung

$$\psi(z) := \exp(-zN) \cdot \tilde{\phi}(z) : \Delta^* \longrightarrow \hat{D}$$

erweitert sich auf ganz Δ.

B. Brinkmann, F. Herrlich (Bochum):

Das Nilpotent-Orbit-Theorem

Dieses Theorem garantiert die Existenz einer **Limesfiltrierung** $F = \psi(0)$ für

$$\psi(z) := \exp(-\Sigma z_j N_j)\tilde{\phi}(z) : (\Delta^*)^n \longrightarrow \hat{D} \ .$$

Der **nilpotente Orbit** approximiert die Periodenabbildung in folgendem Sinne: für jede G-invariante Metrik auf dem Periodenbereich D existieren Konstanten $\alpha, \beta, K > 0$, so daß für $\mathrm{Im}(z_j) > \alpha$ gilt:

$$\exp(\Sigma z_j N_j) \cdot F \in D \subset \hat{D}$$

$$d(\tilde{\phi}(z), \exp(\Sigma z_j N_j) \cdot F) \leq K \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Im}(z_j)^\beta \exp(-2\pi\, \mathrm{Im}(z_j))$$

Der Beweis wurde zuerst anhand eines hermitesch-symmetrischen Gebietes, des Siegel-Halbraumes, vorgeführt und dann im allgemeinen Fall skizziert.

D. Siersma (Utrecht), **J. Steenbrink** (Nijmegen):

Monodromie-Gewichtsfiltrierung und gemischte Hodge-Strukturen

Zu einem nilpotenten Endomorphismus N eines Vektorraumes V ist die **Gewichtsfiltrierung** $W(N)$ durch

$$N(W(N)_l) \subset W(N)_{l-2}$$

bestimmt. Eine **gemischte Hodge-Struktur** besteht aus einer aufsteigenden Gewichtsfiltrierung $W_.$ und einer absteigenden Hodge-Filtrierung $F^{\cdot}$, so daß $W^{\cdot}$ über $\mathbb{R}$ definiert ist und so daß $F^{\cdot}$ auf den Gr_l^W-Termen eine reine Hodge-Struktur vom Gewicht l induziert.

Es wurde die **Spaltung** einer gemischten Hodge-Struktur eingeführt und Delignes Konstruktion einer solchen Spaltung über $\mathbb{R}$ vorgeführt. Eine solche Struktur wird durch N **polarisiert**, falls $W = W(N)[-k]$, $S(F^p, F^{k-p+1}) = 0$, $NF^p \subset F^{p-1}$ (Horizontalität) und schließlich falls die reinen Hodge-Strukturen auf den primitiven Termen der Graduierung von W durch die Form $S(\cdot, N^l \cdot)$ polarisiert werden.

Schließlich wurde die Gewichtsfiltrierung von N **relativ** einer anderen Filtrierung W' eingeführt.

R. Weissauer, W. Seiler (Mannheim):

Das SL_2-Orbit-Theorem in einer Variablen

Um genauere Information über die Annäherung des nilpotenten Orbits an die Periodenabbildung $\tilde{\phi}$ zu bekommen, approximiert man den nilpotenten Orbit seinerseits durch einen SL_2-Orbit. Dies geschieht durch einen Homomorphismus

$$\rho : SL_2(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C}),$$

der die Standard-Hodgestruktur von sl_2 in die Referenz-Hodgestruktur F_0 von Lie(G) überführt. Teilt man durch die Stabilisatoren und beschränkt man sich auf die reellen Anteile, so bekommt man aus der Abbildung ρ eine total geodätisch äquivariant eingebettete Kopie der oberen Halbebene in D, deren Approximationsverhalten an den nilpotenten Orbit durch eine Funktion g mit Werten in $G(\mathbb{R})$ beschrieben wird. Insbesondere werden die Koeffizienten der Taylorentwicklung von g um ∞ durch eine Potenz von ad N annulliert.

Als Anwendung des SL_2-Orbit-Theorems wurde die Äquivalenz zwischen gemischten Hodge-Strukturen und nilpotenten Orbits erklärt und bewiesen.

K. Timmerscheidt (Essen):

Die Gewichtsfiltrierungen in mehreren Variablen

Wir gehen aus von einem offenen Kegel

$$C = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i N_i | \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \lambda_i > 0\}$$

von nilpotenten Elementen, der einem nilpotenten Orbit zugrundeliegt.

Nach dem SL_2-Orbit-Theorem in einer Variablen bekommt man zu jedem $N \in C$ eine polarisierte gemischte Hodge-Struktur $(W(N), F)$.

Das Hauptergebnis des Vortrages besteht in der Aussage, daß diese gemischte Hodge-Struktur unabhängig von N ist und nur vom Kegel C abhängt.

Für zwei Seiten C' und C'' des Kegels C und ein Element $N \in C' - \overline{C''}$ ist $W(C' \cup C'')$ die Monodromie-Gewichtsfiltrierung von N relativ $W(C'')$.

Ch. Klingenberg (Köln):

Das SL_2-Orbit-Theorem in mehreren Variablen

Wenn wir von einem nilpotenten Orbit

$$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto \exp(\Sigma z_j N_j) \cdot F$$

in n Variablen ausgehen, so können wir für jede Seite C' des Kegels C eine $\mathbb{R}$-split gemischte Hodge-Struktur (W', F') konstruieren, so daß für eine aufsteigende Folge von Kegelseiten die zugehörigen Spaltungen kommutieren. Diese Spaltungen kann man durch halbeinfache Operatoren in $\mathrm{Lie}(G(\mathbb{R}))$ repräsentieren. Das SL_2-Orbit-Theorem behauptet die Existenz einer Referenz-Hodge-Filtrierung F_0 sowie eines Homomorphismus

$$\rho : sl_2(\mathbb{C})^n \longrightarrow \mathrm{Lie}(G(\mathbb{C})) \; ,$$

der die Standard-Hodgestruktur von $sl_2(\mathbb{C})^n$ in F_0 überführt und die halbeinfachen Elemente $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in die Spaltungen abbildet.

Ferner kann man die Approximation des nilpotenten Orbits an die Periodenabbildung exponentiell in $\mathrm{Im}(z_n)$ abschätzen. Damit nähert sich die Hodge-Metrik auf der vorgegebenen Variation von Hodge-Strukturen an die Metrik der Referenz-Hodge-Struktur F_0 an.

U. Jannsen (Regensburg):

Das Purity-Theorem für die Schnittkohomologie

Als wichtigstes Hilfsmittel für den Beweis des Purity-Theorems dient das folgende Abstiegslemma:

Sei

$$(z_1, z_2) \longmapsto \exp(z_1 N_1 + z_2 N_2) \cdot F$$

nilpotenter Orbit in 2 Variablen, W die Gewichtsfiltrierung zu dem Kegel, den N_1 und N_2 aufspannen, und

$$\tilde{V} := N_1 V, \quad \tilde{W} := N_1 W[1]$$

und

$$\tilde{F} := N_1 F[1] \ .$$

Dann definiert $(\tilde{W}[1-k], \tilde{F})$ eine gemischte Hodge-Struktur auf $\tilde{V}$, die durch $N \mid_{\tilde{V}}$ polarisiert wird.

Die Schnittkohomologie wird mit Hilfe des Komplexes

$$B^p := \bigoplus_{1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n} N_{j_1} \cdot \ldots \cdot N_{j_p} V$$

berechnet.

Das Purity-Theorem besagt, daß die Kohomologie dieses Komplexes im Gewicht kleiner oder gleich Null auftritt:

$$H^{\cdot}(B^{\cdot}) \subset \tilde{W}_0(H^{\cdot}(B^{\cdot}))$$

Ch. Deninger (Regensburg):

Die Hodge-Struktur auf der L^2-Kohomologie

Für eine reelle Variation von polarisierten gemischten Hodgestrukturen $(X, V, V_{\mathbb{R}}, F, S)$ vom Gewicht m definieren wir $L_{(2)}(X, V)$ als den Hilbertraum der V-wertigen meßbaren Formen α mit $\|\alpha\| < \infty$.

Auf den Schnitten der Garbe $\mathcal{E}^{\cdot}(V)$ kann man eine schwache Ableitung D definieren sowie ihr formal adjungiertes δ. Dann definiert die entsprechende Garbe $\mathcal{A}^{\cdot}_{(2)}(V)$ auf ganz $\overline{X}$ die L^2-Kohomologie, während ihre Einschränkung auf X einen Quasiisomorphismus mit V liefert.

Als Hauptergebnis wurde bewiesen:

Sei X offen in einer kompakt kählerschen Mannigfaltigkeit $\overline{X}$, so daß $\overline{X} - X$ ein Divisor mit normalen Kreuzungen ist, dann trägt die L^2-Kohomologie $H^k_{(2)}(X, V)$ eine reine Hodge-Struktur vom Gewicht $m + k$.

Für den Beweis braucht man eine C^∞-Kähler-Identität, um dann die Operatortheorie in Hilberträumen anzuwenden.

B. Köck, J. Neukirch (Regensburg):

Schnittkohomologie und L^2-Kohomologie stimmen überein

Als Corollar aus dem im Titel genannten Satz erhält man für kompaktes $\overline{X}$ eine reine Hodge-Struktur auf der Schnittkohomologie aus dem vorangegangenen Vortrag. Obiger Satz kann als Verallgemeinerung des Satzes von de Rham interpretiert werden, denn wie die singuläre Kohomologie ist die Schnittkohomologie zuerst rein topologisch über die Stratifizierung der Singularität definiert, wohingegen sich die de Rham-Kohomologie als Spezialfall der L^2-Kohomologie auffassen läßt.

Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach der Stratifizierungslänge geführt, wobei man sich auf eine Umgebung der Singularität beschränken kann.

Wichtigste Voraussetzungen für den Beweis sind das Purity-Theorem, die Konstruktionen aus dem vorangegangenen Vortrag sowie die asymptotischen Aussagen über das Verhalten der Hodge-Metrik aus dem SL_2-Orbit-Theorem in mehreren Variablen.

Berichterstatter: Ch. Klingenberg (Köln)

Tagungsteilnehmer

Dr. W. Bauer
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Prof.Dr. G. Harder
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Wegelerstr. 10

5300 Bonn 1

Dr. K. Behnke
Mathematisches Seminar
der Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Dr. F. Herrlich
Institut f. Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1

B. Brinkmann
Institut f. Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1

Dr. Th. Höfer
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Beringstr. 1

5300 Bonn 1

Dr. C. Deninger
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Dr. W. Homann
Mathematisches Institut
der Universität Münster
Einsteinstr. 62

4400 Münster

Dr. H. Esnault
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Dr. R. Huber
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Prof.Dr. K. Ivinskis
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

B. Köck
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Dr. U. Jannsen
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

S. Maurmann
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Drs. A.J. de Jong
Mathematisch Instituut
Katholieke Universiteit Nijmegen
Toernooiveld

NL-6525 ED Nijmegen

Prof.Dr. L. Miller
Mathematisches Institut II
der Universität Karlsruhe
Englerstr. 2

7500 Karlsruhe 1

Prof.Dr. Th. de Jong
Mathematisch Instituut
Katholieke Universiteit Nijmegen
Toernooiveld

NL-6525 ED Nijmegen

Prof.Dr. Y. Namikawa
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Dr. Ch. Klingenberg
Mathematisches Institut
der Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Prof.Dr. J. Neukirch
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Prof.Dr. C. A. M. Peters
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit Leiden
Postbus 9512

NL-2300 RA Leiden

Prof.Dr. J. H. M. Steenbrink
Mathematisch Instituut
Katholieke Universiteit Nijmegen
Toernooiveld

NL-6525 ED Nijmegen

R. Pink
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Wegelerstr. 10

5300 Bonn 1

Prof.Dr. G. Tamme
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Dr. B. Runge
Fakultät für Mathematik und
Informatik
der Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim 1

Dr. A. Thalmaier
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Dr. W.K. Seiler
Lehrstuhl für Mathematik VI
Fak.f.Mathematik und Informatik
der Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim

Dr. K. Timmerscheidt
FB 6 - Mathematik
Universität-GH Essen
Universitätsstr. 3
Postfach 103 764

4300 Essen 1

Prof.Dr. D. Siersma
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit te Utrecht
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Prof.Dr. E. Viehweg
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Prof.Dr. R. Weissauer
Fakultät für Mathematik und
Informatik
der Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim 1

Prof.Dr. K. Wingberg
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Prof.Dr. K. Zuo
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Beringstr. 4

5300 Bonn 1