

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 13a/1989

Fachschaftstagung Mathematik des Cusanuswerks 1989
Selbstbezüglichkeit/Selbstähnlichkeit

30.3 bis 2.4.1989

Die Tagung fand statt unter der Leitung von Herrn Georg Heeg (Dortmund) und Herrn Matthias Bücker (Ettlingen).

Die Fachschaftstagungen sind ein Teil der Bildungsarbeit des Cusanuswerks, Bischöfliche Studienförderung, "bei denen in Zusammenarbeit mit kompetenten Fachleuten Spezialprobleme einer einzelnen Disziplin oder Grenzfragen mehrerer Wissenschaften erörtert werden. ... Sie bieten in besonderer Weise Gelegenheit der Zusammenarbeit von Stipendiaten und Altcusanern"¹, da neben Studenten, die vom Cusanuswerk gefördert werden, auch ehemalig Stipendiaten an der Fachschaftstagung teilnehmen.

Das Thema wurde mit eingeladenen Vorträgen in 5 Schwerpunkten behandelt:

- Die Theoreme von Gödel und Löb (R.Smullyan)
- Künstliche Intelligenz/Künstliches Bewußtsein – ein Erklärungsversuch (F.J.Radermacher)
- Ist Willensfreiheit Bestandteil des Bewußtseins? (Is God a Taoist?) (R.Smullyan)
- Eine abstrakte Form des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes (W.Menzel)
- Smalltalk-80, ein Beispiel für ein selbstbezügliches System (G.Heeg)

Es nahmen an der Tagung 12 Studenten und 15 ehemalige Stipendiaten des Cusanuswerks teil. Die einzigartige Atmosphäre und die hervorragend ausgestattete Bibliothek des mathematischen Zentrums haben sich – wie schon im Jahre 1986² – auf die Qualität unserer

¹ Jahresbericht des Cusanuswerks 1985, S.10

² vergl. Tagungsbericht 47/1986 des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach.

Tagung sehr positiv ausgewirkt und ließen bei den Teilnehmern den Wunsch entstehen, die Tagungen der kommenden Jahre wieder in Oberwolfach durchzuführen.

R.SMULLYAN: DIE THEOREME VON GÖDEL UND LÖB: Aussagen und Beweisideen des zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes und Löbs Theorem wurden aus der Domäne der mathematischen Systeme in Alltagssprache übertragen:

Gegeben sei eine Insel der Ritter und Schurken, auf der folgende drei, als Inselregeln bezeichnete, Bedingungen gelten:

- (1) Ritter machen nur wahre Aussagen,
- (2) Schurken machen nur falsche Aussagen,
- (3) Jeder Einwohner der Insel ist entweder ein Ritter oder ein Schurke.

Aussagen der Einwohner der Insel können mit Hilfe der Aussagenlogik formalisiert werden. Darüberhinaus wurden noch das Mocking-Bird-Rätsel (s. SMULLYAN [78]) und ein selbst-bezüglicher Drucker, der Aussagen über druckbare Sätze druckt, als Übertragungen des Gödelschen Satzes vorgestellt.

Ein **Logiker** sei eine Person, die die Aussagenlogik beherrscht und die Forderungen

- (a) alle Tautologien werden vom Logiker für wahr gehalten,
- (b) $\forall p, q$: wenn der Logiker p und $p \Rightarrow q$ glaubt, so glaubt er auch q .

erfüllt. Dann gilt folgender Satz:

SATZ: Seien eine Insel der Ritter und Schurken und ein Logiker, der an die Inselregeln glaubt, gegeben. Dann ist es unmöglich, daß ein Einwohner der Insel zum Logiker sagt: "Sie werden nie zu recht glauben, daß ich ein Ritter bin."

Kürzt man die Aussage "Logiker glaubt p " mit Bp ab, so sei ein **fortgeschrittener Logiker** einer, der zusätzlich folgende Forderungen erfüllt:

- (c) $B((Bp \wedge B(p \Rightarrow q)) \Rightarrow Bq)$,
- (d) $Bp \Rightarrow BBp$,
- (e) $B(Bp \Rightarrow BBp)$

Dann gilt nach Gödels zweitem Unvollständigkeitssatzes:

THEOREM: Falls ein Einwohner der Insel zu einem fortgeschrittenen Logiker, der an die Inselregeln glaubt, sagt: "Sie werden niemals glauben, daß ich ein Ritter bin.", dann wird der Logiker, wenn er konsistent ist, niemals glauben, daß er konsistent ist.

THEOREM (nach Löb): Sei c eine Aussage und sage ein Einwohner der Insel zu einem fortgeschrittenen Logiker, der an die Inselregeln und an $Bc \Rightarrow c$ glaubt: "Wenn Sie glauben, daß ich ein Ritter bin, dann werden Sie c glauben." Dann wird der Logiker c glauben und folglich ist c wahr. (Beweise s. SMULLYAN [89])

Wird Bp als die Aussage " p ist in einem formalen System beweisbar" interpretiert, so erfüllt die Formel B im System der Principia Mathematica die Forderungen (a) – (e). Weiterhin gibt es in diesem System einen Satz G derart, daß die Aussage $G \Leftrightarrow \neg BG$ beweisbar ist. Diese Aussage entspricht der Aussage des Inselbewohners.

Gödels Satz ist also ein Spezialfall von Löbs Theorem. Der Zusammenhang des Mocking-Bird-Rätsels mit dem Gödelschen Satz gelingt über ein Fixpunktargument (s. SMULLYAN [84]).

In dem Vortrag wurden weiter Kuriositäten über vollständige Induktion, Unendlichkeiten und eine Geschichte über "Satan, Cantor und Unendlichkeit" vorgestellt, um die besprochenen Thematik zu vertiefen.

Literatur:

Smullyan, R.M., in *Mathematical Intelligencer*, Vol. 1, No. 2, p. 111, 1978

Smullyan, R.M., *Logik-Ritter und andere Schurken*, Wolfgang Krüger Verlag, Frankfurt, 1989

Smullyan, R.M., *Fixed Points and Selfreference*, *Int. J. Math. & Math. Science*, Vol. 17, No. 2, pp. 283

F.J.RADERMACHER: KUNSTLICHE INTELLIGENZ – EIN ERKLÄRUNGSVERSUCH: Es wird ein Welt-Modell vorgestellt, das die materielle Existenz als evident voraussetzt und die Entstehung und Entwicklung von Leben, Intelligenz und Bewußtsein als materielle Strukturen und Vorgänge erklärt, ohne die Annahme eines Wunders. Auf diesem Hintergrund wird der heutige Stand der KI-Forschung eingeordnet, aktuelle Forschungsvorhaben werden dargestellt. Aus dem vorgestellten Welt-Modell werden Konsequenzen für (bevölkerungs-) politisches Handeln abgeleitet und ausführlich diskutiert.

1. EXISTENZ: Es soll kein weiterer Versuch unternommen werden, die Existenz der Welt zu erklären. Ausgehend von der evidenten Existenz der Materie werden Leben, Intelligenz und Bewußtsein als Ergebnis des materiellen Evolutionsprozesses beschrieben, ohne dabei "Wunder" zur Erklärung heranzuziehen.

2. LEBEN UND EVOLUTION: Leben ist die Fähigkeit von materiellen Strukturen, sich selbst (mehr oder weniger ähnlich) zu reproduzieren. Ist erst einmal die erste selbstreproduktionsfähige Struktur entstanden, wie klein die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis

auch gewesen sein mag, dann – so läßt sich spieltheoretisch sagen – wird sich diese Form von Leben "explosionsartig" ausbreiten. Als Folge davon gibt es nur einen genetischen Code.

Jedes Lebewesen, vom Einzeller bis zum Menschen, hat in diesem Evolutionsprozeß seine Überlebensstrategie entwickelt, die (u.a.) im genetischen Code weitergegeben wird: ein Modell seiner spezifischen Welt. Solche partiellen Welt-Modelle können "reine Hardware" sein, wie z.B. die besondere, an seine Nahrung angepaßte Form des Einzellers. Oder sie können in neuronalen Netzen realisiert sein, als vorsprachliche, symbolische Modelle, die kommunizierbar und damit viel rascher anpaßbar und manipulierbar sind.

3. INTELLIGENZ UND KI: Die hier verwendete Definition von Intelligenz (eine allgemein akzeptierte gibt es nicht) lautet: Intelligenz ist die Fähigkeit,

- interne Modelle der umgebenden Welt zu bilden (und sie symbolisch, z.B. in formaler oder natürlicher Sprache, zu repräsentieren),
- diese Modelle zu manipulieren, und
- Schlüsse daraus abzuleiten.

Lernen ist die Erstellung und Erweiterung solcher Modelle. Wissen ist die Fähigkeit, über ein Modell zu verfügen und daraus Schlüsse zu ziehen. Bewußtsein ist eine Hierarchie (endlich, aber bei Bedarf beliebig erweiterbar) von Modellen von sich selbst. Künstliche Intelligenz bedeutet heute: erfolgreiche Manipulation von und Inferenz in eingeschränkten Welt-Modellen (wobei die erste Modellbildung nicht maschinell geschieht). Meist wird dabei versucht, aus Erfahrungsregeln eines Fachgebietes (z.B. Fertigungssteuerung) ein mathematisches, also manipulierbares Modell aufzubauen. (Exkurs: Wobei KI-Forscher oft vor dem Problem stehen, zwar die Mathematik, aber nicht die fachlichen Regeln zu beherrschen.) Aktuelle Arbeitsgebiete der KI-Forschung sind zur Zeit

- Erstellung von (sehr umfangreichen) partiellen Weltmodellen,
- Umgang mit Wahrscheinlichkeiten,
- Integration des Zeit-Begriffs.

Die KI-Forschung wird fortschreiten in einer Theorie des **Künstlichen Bewußtseins**, man wird KI-Systeme aufbauen, die neben oder in ihrem Welt-Modell auch ein Eigenmodell enthalten und sich über diese Rückkoppelung selbst modifizieren.

Handlungskonsequenzen: Als Folge des Evolutionsprozesses ist der Mensch heute mit "steinzeitlichen" Überlebensstrategien ausgestattet: größtmögliche Reproduktion, solange noch Ressourcen verfügbar sind. So ist heute die Bevölkerungsexplosion das größte Problem, das vor allen anderen gelöst werden muß.

R.SMULLYAN: IS GOD A TAOIST?: Mit der Lesung des Essays "Is God a Taoist?" (s. SMULLYAN [77] oder HOFSTADTER/DENNET [86]) wurde die – insbesondere auch für die Künstliche Intelligenz – wichtige Frage, ob ein freier Willen für das "Menschsein" (und damit für das menschliche Bewußtsein) unabdingbar ist oder nicht, behandelt. Dieses Essay ist in der Form eines Dialoges zwischen Gott und einem Sterblichen aufgebaut. Am Beginn dieses – sich nach sokratischer Methode entfaltenden – Gesprächs steht die verzweifelte Bitte des Sterblichen, Gott möge ihn vom Zwang der Willensfreiheit befreien, damit er nicht mehr sündige. Diese Bitte tritt im weiteren Verlauf jedoch immer mehr in den Hintergrund, in den Vordergrund tritt eine allgemeine Unterweisung von Seiten Gottes über sein und des Menschen wahres Wesen. Gott gibt sich zu erkennen als Utilitarist; die menschliche Willensfreiheit dient der Leidensverminderung und der Sterbliche erfährt, daß Gott keineswegs die Wahl hatte, ihn mit Willensfreiheit auszustatten oder nicht, sondern daß die Willensfreiheit unabdingbar Bestandteil des Bewußtseins, d.h. des Menschen ist. Außerdem muß der Mensch noch erkennen, daß die Natur und das "Du" ein kontinuierliches Ganzes bilden.

Literatur:

Hofstadter, D.R., D.C.Dennett, *Einsicht ins Ich*, Klett-Cotta, Stuttgart, 1986
Smullyan, R.M., *The Tao is Silent*, Harper & Row Publishers, New York, 1977

W.MENZEL: EINE ABSTRAKTE FORM DES GÖDELSCHEN UNVOLLSTÄNDIGKEITSSATZES:
Gegeben sei eine (formale) Sprache \mathcal{L} mit festgelegter Semantik, deren Sätze (Formeln) Aussagen über einen gegebenen Bereich T sind. Weiterhin sei T so *reichhaltig*, daß für jeden Satz S der Sprache \mathcal{L} ein Objekt $\lceil S \rceil$ in T existiert, der die Aussage S in T kodiert (der Name für S in T). Im folgenden bezeichne *For1* die Sätze der Sprache \mathcal{L} , die höchstens eine freie Variable enthalten und für eine Formel $B \in \text{For1}$ und $t \in T$ sei $B(t)$ die Formel, die aus B durch Ersetzen aller Vorkommen der freien Variablen t entsteht. Für die Kodierung der Sätze aus \mathcal{L} in T gelte folgende Abschlußbeigenschaft:

(A) zu jeder Formel $B \in \text{For1}$ gibt es eine Formel $B^A \in \text{For1}$, so daß für alle $A \in \text{For1}$
 $B^A(\lceil A \rceil) \Leftrightarrow B(\lceil A(\lceil A \rceil) \rceil)$.

Für jede solche Sprache \mathcal{L} über T gilt:

LEMMA (Fixpunktsatz, Relaxationstheorem): Zu jeder Formel $B \in \text{For1}$ gibt es einen Satz Fix_B , so daß $\text{Fix}_B \Leftrightarrow B(\lceil \text{Fix}_B \rceil)$.

Gegeben sei ferner ein *Beweisformalismus*, der gewisse Sätze als beweisbar auszeichnet, mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Er ist *korrekt*, d.h., nur wahre Sätze sind beweisbar.
- (2) Er ist *ausdrückbar*, d.h., es gibt eine Formel $Bew \in For_1$, so daß für alle Sätze S gilt:
 $(Bew(\ulcorner S \urcorner) \Leftrightarrow true)$ genau dann wenn S beweisbar ist.

Ein solcher Beweisformalismus ist unvollständig im folgenden Sinn:

SATZ (Gödel): Der Satz $Fix_{\neg Bew}$ ist wahr, aber nicht beweisbar.

G.HEEG: SMALLTALK-80, EIN BEISPIEL FÜR EIN SELBSTBEZÜGLICHES SYSTEM: Der Objektbegriff in Programmiersprachen beinhaltet Einheiten mit Zustand und Verhalten, die zu sich selbst und zu keinem anderen Objekt identisch sind. Gleichheit (Gleichwertigkeit) ist jedoch als Operation dem Zustand der Objekte und damit der Zeit unterworfen. Struktur und Verhalten von Objekten werden in Klassen beschrieben, die ein hierarchisches Begriffssystem darstellen und gleichzeitig selbst Objekte sind. Damit ist auch das Begriffssystem mit Veränderungsmöglichkeiten ausgestattet. Metaklassen (wieder Klassen und damit Objekte) beschreiben die Klassen. Notwendigerweise geschieht der Metaabschluß durch einen Zyklus (hier der Länge zwei). In der Hierarchie ist "*Object*" die allgemeinste Klasse. Antinomien werden durch das Fehlen von "nicht" und der Komplementbildung in der Begriffskonstruktion vermieden. In expliziter hierarchischer, selbstbezüglicher Begriffsbildung erstellte Softwaresysteme sind als "Weltbeschreibung" geeigneter als rein funktional, logisch oder algorithmisch konstruierte Systeme, da sie kleiner, verständlicher und flexibler sind.

Berichterstatter: A.Bockmayr, C.Brzoska, M.Bücker, G.Heeg, M.Knick,
B.Kremers-Knick, K.Tetzlaff, H.G.Ulrich

Tagungsteilnehmer

Alexander Bockmayr
Universität Karlsruhe
SFB 314 "Künstliche Intelligenz"
Postfach 6980
7500 Karlsruhe 1

Dr. Gertrud Heck-Weinhart
Traubenstr. 44a
7000 Stuttgart 1

Christoph Brzoska
Hirschstr. 36
7500 Karlsruhe 1

Georg Heeg
Baroper Str. 337
4600 Dortmund 50

Matthias Bücker
Heckenweg 5
7505 Ettlingen 6

Konrad Helms
Studentenheim Schweidt
Weinsbergstr. 74
5000 Köln 30

Christian Dickopp
Nizzaallee 20
5100 Aachen

Dr. Arnold Hermans
Hacklenburg 26
4400 Münster

Dr. Klaus Gornik
Konsul-Vejento-Str. 9
6501 Klein-Winternheim

Klaus Kämmerle
Im Münchfeld 29
6500 Mainz

Peter Hannig
Rußheimer Str. 2
7500 Karlsruhe-Neureut

Walter Keller
Zur Friedrichshöhe 38
7750 Konstanz

Dr. Josef Kisting
Wirtembergstr. 8
7050 Waiblingen-Hohenacker

Gisela Kurth
Friedenstr. 47
8700 Würzburg

Albrecht Kliem
Quirnstr. 34
5300 Bonn 1

Ina Leiß
Im Klämmerchen 6a
6504 Oppenheim

Manfred Knick
Nelkenstr. 19
5303 Bornheim 4

Prof. Dr. Menzel
Universität Karlsruhe
7500 Karlsruhe 1

Thomas Korb
Chamissostr. 15
5000 Köln 30

Prof. Dr. F.-J. Radermacher
Forschungsinstitut für anwendungs-
orientierte Wissensverarbeitung
Universität Ulm
Postfach 2060
7900 Ulm

Franz-Josef Krämer
Hauptstr. 35
5569 Dreis-Brück

Martin Russling
Luisenstr. 75
8000 München 40

Birgit Kremers-Knick
Nelkenstr. 19
5303 Bornheim 4

Bernhard Schmidt
Sudetenstr. 15/4
8034 Germering

Michael Schnorbach
Kullrichstr. 8
4600 Dortmund 1

Hans-Georg Ulrich
Liebigstr. 21
8025 Unterhaching

Prof. Dr. Raymond M. Smullyan
Indiana University
at Bloomington
privat: Elka Park
New York, N.Y. 12427
U.S.A.

Bernd Wagner
Rotdornweg 7
5205 St. Augustin 1

Kai Tetzlaff
Jungfernstieg 10
2300 Kiel

Erich Walter
Kirchstr. 32
8533 Scheinfeld

1

