# MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

## T a g u n g s b e r i c h t 16/1989

## p-adische Hodge-Theorie

9.4. bis 15.4.1989

Die Tagung fand unter der Leitung von Herrn Dr. Jannsen (Regensburg) und Herrn Prof. Dr. Schneider (Köln) statt. Im Mittelpunkt des Interesses standen Arbeiten über die Hodge-Tate-Vermutung und die kristalline Vermutung. Diese stellen Verbindungen her zwischen der p-adischen Etalkohomologie und der de Rham- bzw. kristallinen Kohomologie und ihren natürlichen Strukturen. Im einzelnen wurden folgende Themenkreise behandelt:

- Tate: Hodge-Tate-Zerlegung für p-divisible Gruppen;
- Bloch/Kato: Beweis der Hodge-Tate-Vermutung im Falle guter ordinärer Reduktion;
- Fontaine/Messing: kristalline Vermutung im Falle guter Reduktion für $\dim X < p$ ;
- Faltings: Hodge-Tate-Vermutung.

Nicht behandelt wurde Faltings' Beweis der kristallinen Vermutung.

## Vortragsauszüge

F. Lorenz (Münster): Lokale Körper

Sei $K$ ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$ und einer vollständigen diskreten Exp.-Bewertung $v$ sowie mit einem perfekten Restklassenkörper $k$ mit $\mathrm{char}(k) = p > 0$. Wir normieren $v(p) = 1$. Für eine endliche Körpererweiterung $L/K$ definieren wir die Differente durch $D(L/K) := \mathrm{Ann}(\Omega_{O_L/O_K})$. Es wurden folgende zwei Sätze bewiesen:

Satz 1 (Fontaine): Wir haben einen Isomorphismus von $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-Moduln

$$\overline{K}/p^{-\delta}\overline{K} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1) \xrightarrow{\sim} \Omega_{O_{\overline{K}}/O_K}$$

$$p^{-n}a \otimes (\zeta_m)_m \mapsto a\,\frac{d\zeta_n}{\zeta_n}$$

mit $a \in O_{\overline{K}}$, $\zeta_n$ eine primitive $p^n$-te Einheitswurzel, $\delta = v(D(K/K^{nr})) + \frac{1}{p-1}$

$$(\zeta_n) \in \varprojlim_n \mu_{p^n} =: \mathbb{Z}_p(1) .$$

Der Beweis beruht auf der wiederholten Anwendung folgender Fakten:

i) $\Omega_{O_L/O_K}$ ist ein zyklischer $O_L$-Modul für $L/K$ wie oben.

ii) $v(D(\mathbb{Q}_p(\zeta_n)/\mathbb{Q}_p)) = n - \frac{1}{p-1}$ ist explizit berechenbar.

iii) Für $A \subseteq B \subseteq C$ endliche Ringerweiterungen von Ringen ganzer Zahlen in lokalen Körpern ist die Sequenz

$$0 \to \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B} \to 0$$

exakt.

Trickreicher zu beweisen ist der

Satz 2 (Faltings): Gegeben sei ein Körperturm $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots$ mit $v(D(K_n/K)) = an + b + c_n$ mit Konstanten $a > 0$, $b$ und einer Nullfolge $c_n$. Dann gilt für jede endliche Körpererweiterung $L/K$ mit $L_n = K_nL$:

$$v(D(L_n/K_n)) \to 0 \qquad \text{für} \qquad n \to \infty .$$

G. Harder (Bonn): p-divisible Gruppen

In diesem Vortrag wurden zunächst die Grundbegriffe aus der Theorie der endlichen kommutativen Gruppenschemata über einem Basisschema $S$ behandelt. Für $S = \mathrm{Spec}(R)$, $R$ ein noetherscher vollständiger lokaler Ring, existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to G^0 \to G \to G^{\text{ét}} \to 0 \quad ,$$

wobei $G^0$ die 1-Komponente und $G^{\text{ét}}$ ein etales Gruppenschema ist. Diese exakte Sequenz verallgemeinert sich auf p-divisible Gruppen; eine p-divisible Gruppe $G$ über $R$ der Höhe $h$ ist ein induktives System $G = (G_v, i_v)$, $v \geq 0$, mit:

i) $G_v$ ist ein endliches kommutatives Gruppenschema über $R$ der Ordnung $p^{vh}$.

ii) Für jedes $v$ ist $0 \to G_v \xrightarrow{i_v} G_{v+1} \xrightarrow{p^v} G_{v+1}$ exakt.

$G^{\text{ét}}$ kann identifiziert werden mit $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h$, $h$ die Höhe von $G^{\text{ét}}$, versehen mit einer stetigen $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-Operation.

$G^0$ entspricht einer p-dividierbaren formalen Gruppe über $R$. Als Beispiel wurde die p-divisible Gruppe assoziiert zu einer elliptischen Kurve bei verschiedenem Reduktionsverhalten betrachtet.

C.-G. Schmidt (Groningen): Galoiskohomologie von $\hat{\bar{K}}$ und die Hodge-Tate-Struktur von p-divisiblen Gruppen

Für einen lokalen Körper $K$ operiert $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ natürlich auf der Komplettierung $C = \hat{\bar{K}}$ des algebraischen Abschlusses $\bar{K}$. Der Satz von Tate und Springer berechnet die stetige Galoiskohomologie der Tate-Twists $C(n)$. Er lautet:

$$H^i(G_K, C(n)) = \begin{cases} K & \text{für } n = 0 \;, \; i = 0,1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dieser Satz geht wesentlich ein in den Beweis von Fontaine über die Hodge-Tate-Zerlegung von p-divisiblen Gruppen über $O_K$:

Theorem (Tate): Es gilt

$$\mathrm{Hom}(T_p(G), C) \simeq t_{\check{G}}(C) \oplus t^*_G(C)(-1)$$

mit:

$T_p(G)$ der Tate-Modul zu $G$

$t_{\check{G}}$ der Tangentialraum vom Cartierdualen $\check{G}$

$t^*_G$ der Kotangentialraum von $G$ .

Dieses Theorem war für Tate der Anlaß, für eine beliebige glatte eigentliche Varietät $X/K$ eine Zerlegung

$$H^i_{ét}(\bar{X},\mathbb{Q}_p) \otimes C \simeq \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C(-j)^{d_{ij}}$$

mit $d_{ij} = \dim H^{i-j}(X,\Omega^j_X)$ zu vermuten.

Tates Theorem impliziert die Vermutung für $i = 1$ .

M. Rapoport (Bonn): <u>Dieudonné-Moduln</u>

Der Ring $W(k)$ der Wittvektoren eines beliebigen Ringes $k$ wurde eingeführt. Danach wurde die kontravariante Dieudonné-Theorie von Fontaine vorgestellt, die jeder p-divisiblen Gruppe über einem perfekten Körper $k$ der Charakteristik $p > 0$ einen Modul $M(G)$ über dem Dieudonnéring von $k$

$$D_k = W_k[F,V] / \langle Fx = \sigma(x)F, xV = V\sigma(x), VF = FV = p\rangle ,$$

$\sigma$ : vom Frobenius induzierte Abb. auf $W(k)$ ,

zuordnet. Sie liefert eine Äquivalenz von Kategorien zwischen p-divisiblen Gruppen und $D_k$-Moduln, die über $W(k)$ endlich erzeugt und frei sind. So führt die Klassifikation von p-divisiblen Gruppen bis auf Isogenie zur Klassifikation der Isokristalle $(M(G) \otimes \mathbb{Q},F)$ . Sie wurde für $k = \bar{k}$ vorgestellt. Den Schluß bildete ein Liftungssatz von Fontaine, der die Liftungen einer p-divisiblen Gruppe von $k$ zu $W(k)$ in eineindeutige Korrespondenz zu Liftungen von Sequenzen von k-Vektorräumen zu Sequenzen von freien $W(k)$-Moduln setzt.

C. Greither (Bonn): Dividierte Potenzen

Für eine kommutative $\mathbb{Q}$-Algebra $A$ und $I \subseteq A$ ein Ideal erfüllen die Abbildungen $\gamma_n : I \to I$, $\gamma_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ für $n \geq 1$ zusammen mit $\gamma_0 \equiv 1$ fünf mehr oder weniger offensichtliche Identitäten, z. B.

$$\gamma_n(x+y) = \sum_{i+j=n} \gamma_i(x)\gamma_j(y) \quad .$$

Eine DP-Struktur ist ein Tripel $(A,I,(\gamma_n))$, $A$ ein beliebiger kommutativer Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal, $\gamma_n : I \to I$ $(\gamma_0 : I \to A)$ Abbildungen, die den fünf Identitäten genügen. Zu dem Vergißfunktor

$$\begin{array}{ccc} (\text{DP-Strukturen}) & \xrightarrow{V} & (\text{Ringe mit ausgezeichnetem Ideal}) \\ (A,I,\gamma) & \longmapsto & (A,I) \end{array}$$

konstruiert man einen linksadjungierten Funktor DP zusammen mit einem Morphismus von Funktoren $\mathrm{Id} \to V \circ DP$. Das heißt, daß für jedes Paar $(A,I)$ die sogenannte DP-Hülle $DP(A,I)$ ein universelles Abbildungsproblem löst. Zum Schluß wurde das DP-Poincaré-Lemma bewiesen:

Der Komplex

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\langle \underline{t} \rangle \xrightarrow{d} \mathbb{Z}\langle \underline{t} \rangle \otimes_{\mathbb{Z}[\underline{t}]} \Omega^1_{\mathbb{Z}[\underline{t}]/\mathbb{Z}} \xrightarrow{d} \cdots$$

mit $\mathbb{Z}\langle \underline{t} \rangle := \bigoplus_{i \geq 0} \mathbb{Z} \frac{t^i}{i!}$ ist exakt.

A. Scholl (Durham): Kristalline Kohomologie

Für ein Schema $X$ über $W_n$ wurde der kristalline Situs eingeführt, dessen Objekte gewisse DP-Verdickungen von Zariski-offenen Teilmengen von $X$ sind. Hierauf definiert man die Strukturgarbe $\mathcal{O}_{X/W_n}$. Durch Ableiten des globalen Schnittfunktors $\Gamma$ erhält man die kristalline Kohomologie:

$$H^i(X/W_n^{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X/W_n}) := R^i\Gamma(\mathcal{O}_{X/W_n}) \quad .$$

Sei $Y/W_n$ ein glattes $W_n$-Schema und $X \xrightarrow{i} Y$ eine abgeschlossene $W_n$-Immersion. Die DP-Hülle $D = D(X \to Y/W_n)$ ist ein Schema mit dem gleichen zugrundeliegenden topologischen Raum wie $X$. Darauf definieren wir den Zariski-Garben-Komplex $\Omega^\bullet_{D/W_n} := \mathcal{O}_D \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} i^{-1}\Omega^\bullet_{Y/W_n}$. Dann gilt der folgende Vergleichssatz:

Satz: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$H^i(X/W_n^{cris}, O_{X/W_n}) \xrightarrow{\sim} H^i_{Zar}(D, \Omega^\bullet_{D/W_n}) \quad .$$

Es genügt zu zeigen, daß für $u : X_{cris} \to X_{Zar}$ gilt:

$$R^\bullet u_* O_{X/W_n} \xrightarrow{\sim} \Omega^\bullet_{D/W_n} \quad .$$

Das Diagramm von Topoi

$$\begin{tikzcd}
(X/W_n)_{cris} \mid \tilde{D} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"] & D_{Zar} \arrow[d, equal] \\
(X/W_n)_{cris} \arrow[r, "u"] & X_{Zar}
\end{tikzcd}$$

reduziert die Behauptung auf:

i) $\mathbb{L}(\xi) := j_* \varphi^*(\xi)$ ist $u_*$ azyklisch. iii) $u_* \mathbb{L}(\xi) \simeq \xi$ kanonisch.

ii) $O_{X/W_n} \to \mathbb{L}(\Omega^\bullet_{D/W_n})$ ist eine Auflösung.

i) folgt aus der Exaktheit von $j_*$ und $\varphi_*$,

ii) leitet man aus dem DP-Poincaré-Lemma ab.

N. Schappacher (Bonn): Frobenius und die Hodge-Filtrierung

Für ein eigentliches glattes Schema $X/W$ mit spezieller Faser $X_o$ haben wir nach dem vorhergehenden Vortrag auf

$$N := M \otimes_W K = H^m_{cris}(X_o/W) \otimes_W K \simeq H^m_{DR}(X/K)$$

sowohl eine semilineare Operation des Frobenius als auch eine Filtrierung. Zur Beschreibung dieser Strukturen führt man das Hodge-Polygon für die Filtrierung und das Newton-Polygon für die Frobeniusoperation ein. Für projektives $X$ wurde (unter Benutzung von Poincaré-Dualität und Hard Lefschetz auf $H^m_{cris}$ ) gezeigt, daß die Endpunkte beider Polygone übereinstimmen. Die Vermutung von Katz besagt nun:

$$\text{Newton-Polygon} \leq \text{Hodge-Polygon} \ .$$

Nach Laffaille folgt dies aus der Frobenius-Divisibilität:

$$\varphi M^j \subseteq p^j M \quad .$$

Mazur beweist diese wiederum unter folgenden Voraussetzungen:

i) $m < p$ ;

ii) $X$ glatt und projektiv;

iii) alle $H^r(X/W,\Omega^s)$ torsionsfrei.

E. Nart (Bonn): de Rham-Witt Komplex

Für ein glattes Schema $X$ über einem perfekten Körper $k$ der Charakteristik $p > 0$ definiert man die Zariski-Garben $W_n\Omega^i$ durch

$$W_n\Omega^i|_U := \mathcal{H}^i(\Omega^\bullet_{U_n/W_n}) \quad ,$$

wobei $U_n$ eine glatte Liftung einer affinen offenen Teilmenge $U \subseteq X$ nach $W_n(k)$ ist. $W_n\Omega^\bullet := \bigoplus_{i \geq 0} W_n\Omega^i$ ist eine graduierte Algebra mit reicher Zusatzstruktur: Differential, Verschiebung, Frobenius. Sie gibt eine weitere Möglichkeit, die kristalline Kohomologie durch eine Zariskikohomologie auszudrücken:

Satz: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$H^*_{cris}(X/W_n) \xrightarrow{\sim} H^*_{Zar}(X, W_n\Omega^\bullet) \quad ,$$

welcher funktoriell in $X$ und verträglich mit Produkten und Übergangsmorphismen ist.

Beim Beweis führt man mittels Hyperüberdeckungen das Problem auf ein "lokales" zurück, so daß man die Liftbarkeit von $X$ mit Frobenius zu einem glatten $X_n/W_n$ voraussetzen kann. Die Einführung von höheren Cartieroperatoren liefert einen Quasiisomorphismus

$$C^{-n} : \Omega^\bullet_{X_n} \to W_n\Omega^\bullet \quad .$$

Die Isomorphie von de Rham- und kristalliner Kohomologie im glatten Fall liefert die Behauptung.

S. Stienstra (Utrecht): <u>Die Slope-Spektralsequenz</u>

Aus der Darstellung der kristallinen Kohomologie als Hyperkohomologie des de Rham-Witt Komplexes erhält man zwei Spektralsequenzen:

die "Slope Spectral Sequence" $E_1^{ij} := H^j(X,W\Omega_X^i) \Longrightarrow H^*_{cris}(X/W)$

und die "Conjugate Spectral Sequence" $E_2^{ij} := H^i(X,\mathcal{H}^j(W\Omega_X^\bullet)) \Longrightarrow H^*_{cris}(X/W)$ .

Es seien $(P^{m,i})_{0\leq i\leq \dim X}$ bzw. $(P_i^m)_{0\leq i\leq \dim X}$ die zugehörigen Filtrierungen auf $H^m_{cris}(X/W)$ . Das sind die Anstiege des kristallinen Frobenius $\underline{F}$ auf $P^{m,i}$ alle $\geq i$ und $\leq \dim X$ bzw. auf $P_i^m$ alle $\leq i$ und $\geq 0$ . Tensoriert man mit $\mathbb{Q}$ , so degenerieren beide Spektralsequenzen schon auf dem Anfangsniveau. Für eine ordinäre Varietät $X$ (d. h. $H^q(X,d\Omega_X^i) = 0$ für alle $q,i$ ) zerfallen beide Spektralsequenzen (auch ohne die Tensorierung mit $\mathbb{Q}$ ) auf dem Anfangsniveau und die Filtrierungen sind komplementär zueinander:

$$H^m_{cris}(X/W) = \bigoplus_{r=0}^{m} H^{m-r}(X,W\Omega_X^r)$$

$$P^{m,i} = \bigoplus_{r\geq i} H^{m-r}(X,W\Omega_X^r) \quad \text{bzw.} \quad P_i^m = \bigoplus_{r\leq i} H^{m-r}(X,W\Omega_X^r)$$

und $\underline{F}$ operiert mit Anstieg $i$ auf $H^{m-i}(X,W\Omega_X^i)$ . Die Fixpunktmenge von $F = p^{-i}\underline{F}$ in $H^{m-i}(X,W\Omega_X^i)$ läßt sich darstellen als $H^{m-i}_{\text{ét}}(X,W\Omega^i_{X,\log})$ , wobei die Garbe auf $X_{\text{ét}}$ durch die exakte Sequenz

$$0 \to W\Omega^i_{X,\log} \to W\Omega_X^i \xrightarrow{1-F} W\Omega_X^i \to 0$$

definiert wird. Lokal wird $W\Omega^i_{X,\log}$ erzeugt von den Elementen $x_1^{-1}dx_1\cdot\ldots\cdot x_i^{-1}dx_i$ .

C. Beckmann (Köln): <u>Milnor K-Theorie und etale Kohomologie</u>

Dieser und der folgende Vortrag behandeln die Arbeit "p-adic ètale cohomology" von Bloch und Kato. Der erste Teil ist von "lokaler" Art und verallgemeinert eine Arbeit von Tate über die Beziehung zwischen $K_2$ und der Galoiskohomologie. Der Hauptsatz lautet:

<u>Satz.</u> <u>Für einen diskret bewerteten henselschen Körper</u> $K$ <u>der Charakteristik</u> $0$ <u>mit</u> <u>Restklassenkörper der Charakteristik</u> $p > 0$ <u>haben wir einen Isomorphismus</u>

$$K_q^M K/p^n K_q^M K \xrightarrow{\sim} H^q_{\text{ét}}(K,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(q)) ,$$

<u>wobei</u> $K_q^M K$ <u>die</u> q-te <u>Milnor</u> K-<u>Gruppe von</u> $K$ <u>bezeichnet.</u>

Die Abbildung wird induziert durch den Isomorphismus $K^*/K^{*p^n} \tilde{\to} H^1(K,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1))$ und durch das Cupprodukt.

Der Beweis wird geführt über die Einführung der Filtrierung nach höheren Einseinheiten auf der Milnor K-Theorie, deren Graduiertes man in Zusammenhang bringt mit der K-Theorie und dem Differentialmodul des Restklassenkörpers $F$ . Die nötige Kenntnis von $K_\bullet^M F$ erhält man durch den Isomorphismus

$$K_q^M F/p^n K_q^M F \tilde{\to} W_n\Omega^q_{F,\log} \quad .$$

A. Langer (Köln): <u>p-adische Etalkohomologie bei ordinärer Reduktion</u>

In der Situation eines vollständigen diskret bewerteten Körper $K$ der Charakteristik $0$ mit Restklassenkörper $k$ der Charakteristik $p > 0$ wurde gezeigt, daß die p-adische Etalkohomologie der generischen Faser $V$ eines glatten eigentlichen Schemas $X/\mathrm{Spec}\ O_K$ bei ordinärer Reduktion eine Hodge-Tate-Zerlegung

$$H^q(\overline{V},\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \hat{\overline{K}} \simeq \bigoplus_{i=0}^{q} H^{q-i}(V,\Omega^i_{V/K}) \otimes_K \hat{\overline{K}}(-i)$$

besitzt.

Sind $j : V \to X$ und $i: Y \to X$ die Fasern von $X$ , so führt die Leray-Spektralsequenz $H^s(\overline{Y},i^*R^qj_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\ (q))(-q) \Longrightarrow H^{s+q}(\overline{V},\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ zu der Garbe der verschwindenden Zykel $M_n^q := i^*R^qj_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\ (q)$ . Ist $v \to Y$ der generische Punkt von $Y$ , so gilt nach dem letzten Vortrag:

$$(M_n^q)_{\overline{v}} = H^q(\mathrm{Spec}\ O_{X,\overline{v}}[\tfrac{1}{\pi}],\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\ (q)) \simeq K_q^M(L)/p^nK_q^M(L)$$

für $L = O_{X,\overline{v}}[\frac{1}{\pi}]$ . Der Zusammenhang zwischen Etalkohomologie, Milnor K-Theorie und dem de Rham-Witt Komplex wird nun globalisiert auf die Garbe $M_n^q$ . Auf $\overline{Y}$ bekommt man die exakte Sequenz

$$0 \to U\overline{M}_n^q \to \overline{M}_n^q \to W_n\Omega^q_{\overline{Y},\log} \to 0 \quad .$$

Dabei ist $U\overline{M}_n^q = \lim\limits_{\substack{\to \\ K'/K \text{ endlich}}} U^1(M^q_{n,K'})$ , wobei $U^1(\ )$ die garbifizierte Version der Filtrierung der Milnor K-Theorie bezeichnet. Für ein ordinäres $\overline{Y}$ verschwindet die Kohomologie von $U\overline{M}_n^q$ , so daß der $E_2$-Term der Leray-Spektralsequenz sich durch die Kohomologie von $W_n\Omega^q_{\overline{Y},\log}$ berechnet. Das Zerfallen der Slope-

Spektralsequenz liefert zusammen mit Tates Resultat über $H^1(G_K,\hat{\bar{K}}(n))$ die Behauptung.

G. Tamme (Regensburg): $\underline{B_{cris}}$

Sei $\bar{O}$ der Ganzheitsring von $\bar{K}$ und $\tilde{O} = \bar{O}/p\bar{O}$ . Man betrachtet $H^o_{cris}(\tilde{O}) := \varprojlim_n H^o_{cris}(\tilde{O}/W_n)$ und setzt

$$B^+_{cris} := H^o_{cris}(\tilde{O}) \otimes_W K$$

$$B_{cris} := B^+_{cris}[\frac{1}{t}] \quad ,$$

wobei $t$ das Bild eines Erzeugenden von $\mathbb{Z}_p(1)$ unter der kanonischen Abbildung $\log : \mathbb{Z}_p(1) \to H^o_{cris}(\tilde{O})$ ist. $B_{cris}$ besitzt eine Filtrierung, einen Frobenius und eine $Gal(\bar{K}/K)$-Operation. Für ein glattes eigentliches K-Schema mit guter Reduktion besagt die kristalline Vermutung die Existenz eines Vergleichsisomorphismus

$$H^*_{et}(\bar{X},\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \xrightarrow{\sim} H^*_{cris}(X) \otimes_K B_{cris}$$

zwischen etaler und kristalliner Kohomologie. Durch Übergang zum Graduierten folgt hieraus die Hodge-Tate-Zerlegung.

Für die Untersuchung des Ringes $H^o_{cris}(\tilde{O})$ bzw. allgemeiner für die Untersuchung der Kohomologie $H^i_{cris}(\tilde{O})$ wurde folgender, anläßlich der Arbeitstagung entdeckter Satz bewiesen:

<u>Satz:</u> <u>Ist</u> A <u>eine k-Algebra mit surjektivem Frobenius, so besitzt der Situs</u> $Cris(A/W_n)$ <u>das</u> DP-<u>Schema</u> $Spec(W_n^{DP}(A))$ <u>als finales Objekt</u>.

B. Köck (Regensburg): <u>Die syntomische Kohomologie</u>

Der Vortrag befaßte sich mit dem von Fontaine und Messing stammenden

<u>Theorem:</u> <u>Für ein glattes eigentliches Schema</u> X <u>über</u> W(k) <u>der Dimension kleiner als</u> p <u>ist die de Rham-Kohomologie modulo Torsion ein stark divisibles Gitter und die Hodge-de Rham Spektralsequenz</u>

$$E_1^{ij} = H^i(X,\Omega^j) \Longrightarrow H^*_{DR}(X)$$

<u>degeneriert in</u> $E_1$ .

Als wesentliches Hilfsmittel für den Beweis wird die Interpretation der de Rham-Kohomologie $H^i(X_n, \Omega^{\geq r})$ als syntomische Kohomologie gewisser Garben $J_n^{[r]}$ auf dem syntomischen Situs von $X_n$ benutzt. Ein zentraler Punkt ist die exakte Sequenz $(0 \leq r < p\ ,\ m,n \geq 1)$

$$J_{n+m}^{[r]} \xrightarrow{p^m} J_{n+m}^{[r]} \xrightarrow{p^n} J_{n+m}^{[r]} \xrightarrow{\pi} J_n^{[r]} \to 0$$

auf dem syntomischen Situs von $\mathrm{Spec}(k)$ . Zum Nachweis der Exaktheit kann man zu Ringen mit surjektivem Frobenius übergehen und die Ergebnisse des vorhergehenden Vortrags anwenden.

W. Bauer (Regensburg): <u>Zulässige Varietäten</u>

Eine endlichdimensionale p-adische Darstellung $V$ von $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ heißt kristallin, wenn für $D(V) := (B_{cris} \otimes V)^G$ die Beziehung $\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_K D(V)$ gilt. $D$ heißt dann zulässiger gefilterter Modul. Die kristalline Vermutung von Fontaine besagt, daß für glatte eigentliche Schemata $X/W$ die Etalkohomologie $H^*_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ kristallin und $D(H^*_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p))$ isomorph zu $H^*_{cris}(X_K) := H^*_{cris}(X_k/W) \otimes_W K$ ist. Für $\dim X_K < p$ gibt es nach dem letzten Vortrag ein stark divisibles Gitter in $H^*_{cris}(X_K)$ , woraus nach Fontaine-Laffaille die Zulässigkeit folgt. Für $\mathfrak{X} := \varinjlim \bar{X}_n$ und die syntomischen Garben $J_n^{[r]}$ definiert man $H^*(\mathfrak{X}, J_{\mathbb{Q}_p}^{[r]}) := \varprojlim_n H^*(\bar{X}_n, J_n^{[r]}) \otimes \mathbb{Q}_p$ . Hierfür gilt nun die Künnethformel $H^*(\mathfrak{X}, J_{\mathbb{Q}_p}^{[r]}) = F^r(B^+_{cris} \otimes_K H^*_{DR}(X_K))$ . Wesentlich ist hierbei die Degeneration der Hodge-de Rham-Spektralsequenz. Definiert man die syntomischen Garben $\tilde{S}_n^r$ durch die exakte Sequenz $0 \to \tilde{S}_n^r \to J_n^{[r]} \xrightarrow{\Phi - p^r} O_n^{cris}$ , so gilt:

<u>Theorem: Ist</u> $H^*_{DR}(X_K)$ <u>zulässig, z. B. für</u> $\dim X_K < p$ , <u>so hat man für</u> $0 \leq m \leq r$ <u>die exakte Sequenz</u>

$$0 \to H^m(\mathfrak{X}, \tilde{S}^r_{\mathbb{Q}_p}) \to F^r(B^+_{cris} \otimes H^m_{DR}(X_K)) \xrightarrow{\Phi - p^r} B^+_{cris} \otimes H^m_{DR}(X_K) \ .$$

C. Deninger (Regensburg): Die Garben $S_n^r$ und die kristalline Vermutung

Ziel des Vortrags war der Beweis des folgenden Hauptsatzes der Fontaine-Messing Theorie:

Satz: Sei $X/W$ ein glattes eigentliches Schema. Ist $X$ zulässig, z. B. $\dim X_K < p$, so gibt es kanonisch funktorielle Isomorphismen

$$V(H^*_{cris}(X)) = H^*_{ét}(X) \quad \text{und} \quad D(H^*_{ét}(X)) = H^*_{cris}(X) \quad ,$$

also insbesondere

$$B_{cris} \otimes_K H^*_{cris} \simeq B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^*_{ét} \quad .$$

Hierbei ist

$$V(\ ) = Fil^0(B_{cris} \otimes (\ ))^{\Phi=1}$$

$$D(\ ) = (B_{cris} \otimes (\ ))^{G_K} \quad .$$

Setzen wir für einen beliebigen $\Phi$-filtrierten Modul $D$

$$V_r(D) := Fil^r(B_{cris} \otimes D)^{\Phi=p^r} \quad ,$$

dann lautete das Hauptresultat des letzten Vortrags:

$$H^m(\mathfrak{X}, S^r_{\mathbb{Q}_p}) = V_r(H^m_{cris}(X)) \quad .$$

Die Hauptarbeit dieses Vortrags bestand in der Konstruktion einer Abbildung $\beta : H^m(\mathfrak{X}, S_n^r) \to H^m_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r))$, so daß die induzierte Abbildung $\gamma : V_r(H^m_{cris}(X)) \to H^m_{ét}(X)$ mit Twistung, Cupprodukt und der ersten Chernklasse vertauscht. Für $X$ zulässig folgt dann die Isomorphie von $\gamma$ aus formalen Gründen.

K. Wingberg (Erlangen): Die Theorie von Fontaine und Laffaille

In diesem Vortrag wurde folgender Satz von Fontaine und Laffaille bewiesen:

Satz: Sei $D$ schwach zulässiger filtrierter Modul mit Filtrierungslänge $\leq p-2$. Dann ist $D$ zulässig.

Es wurde der von Faltings wesentlich vereinfachte Beweis vorgetragen: Sei $\mathcal{MF}(V)^{t,f}_{[0,p-2]}$ die volle Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{MF}(V)^{t}$ der filtrierten p-Torsions-V-Moduln $M$, für die $\lg_V M < \infty$ und $\sum_i \varphi^i F^i M = M$ gilt. Dann gelten für den Fontaine-Laffaille Funktor

$$\mathcal{F} : \mathcal{MF}^{t,f}_{[0,p-2]} \to \mathbb{Z}_p - \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\text{-Moduln}$$

$$M \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

mit $B_\infty = H^0_{cris}(\overline{V}/p\overline{V})$ die Beziehungen:

a) $\lg_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{F}(M) = \lg_V M$

b) $\mathrm{Ext}^1(M, B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$

c) $M \to \mathrm{Hom}_{G_K}(\mathcal{F}(M), B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ ist injektiv

d) $\mathcal{F}$ ist treu

Faltings Idee besteht nun darin, für Moduln $M$ mit $pM = 0$ das komplizierte Objekt $B_\infty/pB_\infty$ durch $\overline{V}/p\overline{V}$ zu ersetzen und dann auf elegante Weise $\# \mathrm{Hom}(M, V/pV) = \dim_k M$ zu zeigen. Ein leichter Übergang zu stark divisiblen Gittern bzw. schwach zulässigen Moduln beendet den Beweis.

C. Brinkmann (Bonn): <u>Differentialmoduln und fast unverzweigte Erweiterungen</u>

Der Gegenstand des Vortrages war das folgende "lokale" Resultat aus Faltings' Beweis der Hodge-Tate-Vermutung:

<u>Theorem: Sei $V$ ein diskreter Bewertungsring mit perfektem Restklassenkörper. Man betrachte einen Integritätsring $R$, etal über $V[T_1^{\pm 1},\ldots,T_d^{\pm 1}]$, in dem $V$ algebraisch abgeschlossen ist. Sei $\overline{R}$ der ganze Abschluß von $R$ in der maximalen Erweiterung $L/\mathrm{Quot}(R)$, in der die Normalisierung von $R[\frac{1}{p}]$ unverzweigt über $R[\frac{1}{p}]$ ist. Sei $\Delta = \mathrm{Gal}(\overline{R}/R \otimes \overline{V})$. Dann gibt es einen kanonischen Morphismus von $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-Moduln (mit $K = \mathrm{Quot}(V)$)</u>

$$\Omega^i_{R/V} \otimes_R \widehat{R \otimes \overline{V}}\,(-i) \to H^i_{cont}(\Delta, \hat{\overline{R}}) ,$$

<u>dessen Kern und Kokern von einer endlichen p-Potenz annuliert werden.</u>

U. Stuhler (Wuppertal): <u>Beweis der Hodge-Tate-Zerlegung nach Faltings</u>

In diesem Vortrag wurde Faltings' Beweis der Hodge-Tate-Vermutung für den allgemeinen Fall skizziert. Die wesentliche Idee ist die Konstruktion einer Hilfskohomologietheorie

$$\mathcal{H}^{\bullet}(X) \quad := \quad H^{\bullet}(\operatorname{Tot} C^{\bullet}(\Delta(U_{\bullet}),\overline{R}(U_{\bullet})^{\wedge}))$$

zusammen mit Morphismen in die de Rham- und in die Etalkohomologie. Dabei bedeutet:

- $U_{\bullet} \to X$ eine Hyperüberdeckung von $X$ in $X_{Zar}$ durch "kleine" Mengen.
- $C^{\bullet}(\Delta(U_i),\overline{R}(U))$ der Komplex, der die stetige Gruppenkohomologie der Gruppe $\pi_1(U_i \otimes_V \overline{V}) = \Delta(U_i)$ mit Werten in $\varprojlim_n \overline{R}(U_i)/p^n\overline{R}(U_i)$ berechnet.

Man zeigt:

1) Man hat eine vernünftige Kohomologietheorie $X \to \mathcal{H}^{\bullet}(X)$.

2) Man hat

$$\mathcal{H}^{r}(X)[\tfrac{1}{p}] \simeq \bigoplus_{a+b=r} H^{a}(X,\Omega^{b}_{X/V}) \otimes_V \hat{K}(-b) \quad .$$

3) Man hat eine natürliche Transformation

$$H^{\bullet}_{et}(X_{\overline{K}},\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \hat{\overline{K}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H}^{\bullet}(X)[\tfrac{1}{p}] \quad .$$

4) $\varphi$ ist ein Isomorphismus.

<u>Berichterstatter:</u> Ch. Kaiser (Bonn)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

## Tagungsteilnehmer

Prof.Dr. A. H. Assadi
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

B. Brinkmann
Institut f. Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1

Dr. W. Bauer
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

C. Brinkmann
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Beringstr. 4

5300 Bonn 1

C. Beckmann
Mathematisches Institut
der Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Dr. C. Deninger
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Prof.Dr. R. Berndt
Mathematisches Seminar
der Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Dr. H. Esnault
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Dr. S. Böcherer
Mathematisches Institut
der Universität Freiburg
Hebelstr. 29

7800 Freiburg

Dr. J. Franke
Karl-Weierstraß-Institut für
Mathematik der Akademie der
Wissenschaften
Mohrenstr. 39, PF: 1304

DDR-1086 Berlin

Dr. E.-U. Gekeler
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

C. Kaiser
Gudenauer Weg 88

5300 Bonn

Dr. C. Greither
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Prof.Dr. N. Klingen
Mathematisches Institut
der Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Prof.Dr. G. Harder
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Wegelerstr. 10

5300 Bonn 1

Prof.Dr. H. Koch
Karl-Weierstraß-Institut für
Mathematik der Akademie der
Wissenschaften
Mohrenstr. 39, PF: 1304

DDR-1086 Berlin

Dr. F. Herrlich
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

B. Köck
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Dr. U. Jannsen
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

A. Langer
Mathematisches Institut
der Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Prof.Dr. F. Lorenz
Mathematisches Institut
der Universität Münster
Einsteinstr. 62

4400 Münster

Prof.Dr. H.-J. Nastold
Mathematisches Institut
der Universität Münster
Einsteinstr. 62

4400 Münster

Prof.Dr. L. Miller
Mathematisches Institut II
der Universität Karlsruhe
Englerstr. 2

7500 Karlsruhe 1

Prof. Dr. J. Neukirch
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Dr. B. Moonen
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Prof.Dr. M. Rapoport
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Beringstr. 1

5300 Bonn 1

Prof.Dr. J. P. Murre
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit Leiden
Postbus 9512

NL-2300 RA Leiden

Dr. H.-G. Rück
Fachbereich 9 - Mathematik
Universität des Saarlandes
Bau 27

6600 Saarbrücken

E. Nart
Departamento de Matematicas
Universidad Autonoma de Barcelona
Campus Universitario

E-08193 Bellaterra Barcelona

Dr. B. Runge
Fakultät für Mathematik und
Informatik
der Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim 1

Dr. N. Schappacher
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Prof.Dr. J. Schoof
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit te Utrecht
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Dr. C.-G. Schmidt
Subfaculteit Wiskunde en
Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800

NL-9700 AV Groningen

Dr. R. Schulze-Pillot
Institut für Mathematik II
der Freien Universität Berlin
Arnimallee 3

1000 Berlin 33

A. Schmitz-Tewes
Oppelner Str. 61

5300 Bonn 1

Dr. W.K. Seiler
Lehrstuhl für Mathematik VI
Fak.f.Mathematik und Informatik
der Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim 1

Prof.Dr. P. Schneider
Mathematisches Institut
der Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Prof. Dr. V. Srinivas
School of Mathematics
Tate Institute of Fundamental
Research
Homi-Bhabha Road

Bombay 400 005
INDIA

Dr. A. J. Scholl
Dept. of Mathematics
The University of Durham
Science Laboratories
South Road

GB- Durham , DH1 3LE

Prof.Dr. J. Stienstra
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit te Utrecht
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Prof.Dr. U. Stuhler
Fachbereich 7: Mathematik
der Universität/Gesamthochschule
Wuppertal, Gaußstr. 20
Postfach 10 01 27

5600 Wuppertal 1

Prof.Dr. G. Tamme
Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Prof. Dr. B. B. Venkov
Leningrad Branch of Steklov
Mathematical Institute - LOMI
USSR Academy of Science
Fontanka 27

Leningrad 191011
USSR

Prof.Dr. R. Weissauer
Fakultät für Mathematik und
Informatik
der Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim 1

Prof.Dr. K. Wingberg
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3