MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 8/1991

Experimentelle, insbesondere computergraphische Methoden in der Mathematik

17.2. bis 23.2.1991

Die computergraphische Visualisierung mathematischer Objekte und Zusammenhänge, sowie die Verwendung experimenteller Methoden, haben in den letzten Jahren einen ständig wachsenden Raum in der Entwicklung mathematischer Theorien eingenommen. Vom 17.2. bis zum 23.2.1991 fand im Mathematischen Institut Oberwolfach die erste Tagung zu diesem Thema unter der Leitung von Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen (Bremen) und Prof. Dr. Ulrich Pinkall (Berlin) statt.
Eine große Anzahl verschiedener Themen wurde im Verlauf der Tagung dargestellt und diskutiert. Sie fielen im wesentlichen in die Gebiete *Differentialgeometrie*, *Computational Geometry*, *Dynamische Systeme* und *Numerik*. Computer Graphik, als mathematisches Werkzeug, war das verbindende Element dieser Vielzahl von Problemstellungen. Es wurde einerseits über neue mathematische Ergebnisse berichtet, und andererseits wurden Algorithmen und Softwarepakete vorgestellt, die eigens entwickelt wurden, um Mathematik zu visualisieren.
In zwei abendlichen Diskussionsrunden wurden Erfahrungen über die Arbeit am Computer ausgetauscht. Zusammenarbeit mit InformatikerInnen gibt es bis jetzt kaum, da sich die Informatik in der Regel nicht mit den auf der Tagung thematisierten Problemen auseinandersetzt. Visualisierungswerkzeuge für Mathematik werden bis jetzt ausschließlich von MathematikerInnen entwickelt. Die in Oberwolfach zusammengetroffenen Forschungsgruppen beschloßen die Gründung einer Fachgruppe "Experimentelle Methoden in der Mathematik" im Rahmen der DMV und der GI anzustreben, die sich nicht nur auf die Tagungsteilnehmer beschränken soll.
Im Rahmen eines Film- und Dia-Abends wurden besondere Highlights der Computergraphik mehrerer Forschungsgruppen gezeigt.

Computer Visualization as a Mathematical Tool wird im Anhang des *David II reports*[1], als eines von 27 besonders herausgehobenen Gebieten der Mathematik, die in der Zukunft besonders gefördert werden sollen, angesprochen. In der Begründung wird ausdrücklich auf die Schlüsselrolle der Computergraphik für die Theorie von Minimalflächen hingewiesen. Komplexe Probleme, die früher als nicht lösbar erschienen, konnten aufgrund von neuen, durch Computergraphik gewonnenen Einsichten ganz oder teilweise gelöst werden.

Vortragsauszüge

W. BARTH:

Algebraische Flächen auf dem IBM-PC

Es wurden Bilder algebraischer Flächen vom Grad drei, vier und sechs gezeigt, die auf einem IBM-PC mit Standard-VGA-Karte berechnet worden waren. Die Rechenmethode bestand in einer pixel-orientierten Berechnung der Farbwerte. Bei der Anfertigung von Computerbildern algebraischer Flächen spielen folgende Probleme eine wichtige Rolle:

- In einem vorgegebenen Intervall muß die kleinste Nullstelle eines Polynoms gefunden werden. Was ist hierfür die effizienteste Methode?
- Algebraische Flächen, vor allem solche höheren Grades, bestehen häufig aus ineinanderliegenden Schalen. Wie kann man dies graphisch darstellen?
- Algorithmen zum Erkennen von Singularitäten, Umrißkurven, auf der Fläche liegenden Geraden, Zusammenhangskomponenten wären nützlich.
- Durch bewegte Bilder (Film) könnte sich die Anschaulichkleit wesentlich erhöhen lassen.

O. DELGADO:

Algorithms for Constructing Periodic Tilings

It has been shown that tilings of the plane with cristallographic symmetry groups Γ can be efficiently coded by so-called Delaney-Dress-Symbols. (D-symbols for short). The D-symbol of a tiling T is essentially the image of the barycentric structure of T under the Mapping $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2/\Gamma$, together with branching information. A computer program called *RepTiles* has been written that for any appropriate D-symbol constructs and draws a corresponding tiling in the euclidean plane. A similar program exists for hyperbolic and spherical cases (K. Westphal). The algorithm of *RepTiles* works by

[1] *Renewing U.S. Mathematics, A Plan for the 1990s*, Notices of the ACM, October 1990, pp. 984-1004

cutting and unfolding the D-symbol to a graph that represents a fundamental domain of Γ in the encoded tiling, thus splitting the whole construction into a global and a local part.

R. L. DEVANEY:

Computer Experiments and Dynamics of Transcendental Functions

We present computer graphics experiments and related mathematical ideas regarding the dynamics of entire, transcendental functions of the complex plane. We descuss explosions of Julia sets, Cantor bouquets, and homoclinic bifurcations.

A. DRESS:

Pflasterungen

Mittels der baryzentrischen Unterteilung von Pflasterungen läßt sich jeder äquivarianten Pflasterungen einer einfach zusammenhängenden n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ein durch eine Σ_n-Menge $\mathcal{D}$ parametrisiertes System von Coxeter-Matrizen zuordnen (wobei Σ_n die durch $n+1$ Involutionen frei erzeugte Coxeter-Gruppe bezeichnet), welches die Pflasterung bis auf äquivariante Homeomorphie eindeutig festlegt. Anwendungen dieses Sachverhaltes in der Dimension 2 erlauben die automatische Generierung und graphische Darstellung solcher Pflasterungen (s. Vorträge von D. Huson und O. Delgado).

G. DZIUK:

Mean Curvature Flow

The gradient flow of the area functional is the flow of a surface in normal direction with the velocity given by the mean curvature. In general, singularities appear after some time. They do not appear for example if the initial surface is convex (G. Huisken). Here the surface shrinks down to a round point. A numerical algorithm is presented which decouples this nonlinear problem into a series of linear elliptic problems on a series of surfaces. Thus we have to deal with a moving grid. In order to improve the grid, the "conformal energy" is minimized (J. Hutchinson). This amounts to calculating a conformal reparametrization of a given surface.

D. HUSON:

Automatische Erzeugung und Klassifikation periodischer Pflasterungen

Jeder periodischen Pflasterung kann ein *Delaney-Dress Symbol* so zugeordnet werden, daß gilt: je zwei periodische Pflasterungen sind genau dann äquivalent, wenn die zugeordneten Delaney-Dress Symbole isomorph sind. Diese Symbole sind endliche, gefärbte Graphen, auf deren Knoten gewisse Funktionen definiert sind. Sie können per Computer erzeugt und bearbeitet werden. Die Delaney-Dress Symbole 2-dimensionaler Pflasterungen sind durch die *Krümmungsformel* genau gekennzeichnet. Durch Computerprogramme sind eine Vielzahl von Klassifikationsproblemen bezüglich 2- und 3-dimensionaler Pflasterungen bereits gelöst worden. Auch existiert nun ein Computerprogramm *RepTiles* (Autor O. Delgado), welches bei Eingabe eines Delaney-Dress Symbols als Ausgabe eine entsprechende 2-dimensionale Pflasterung zeichnet.

M. JÜNGER:

On Geometric Duality in Combinatorial Optimization

We consider geometric versions of combinatorial optimization problems such as minimum length perfect matching, minimum length spanning tree, minimum length Hamiltonian cycle on n points in the Euclidian plane. It turns out that the linear programming duals of the first two problems have nice geometric interpretations as nonoverlapping packings of discs and moats in the plane. Using an $\mathcal{O}(n \log n)$ heuristic, we show how good primal and dual solutions of the Euclidian perfect matching problem can be computed very quickly, so that not only feasible solutions but also individual quality guarantees are obtained. We give computational results on random and real world problem instances. This talk is based on joint work with W.R. Pulleyblank, IBM Research, Yorktown Heights, New York.

B. KUGELMANN:

Computer Graphic in Nonlinear Optimal Control
(Joint work with U. Leiner, M. Kiehl, H.J. Pesch.)

Computer graphic considerably supports the search for solutions of nonlinear optimal control problems in various points: When using indirect methods, series of multipoint-boundary-value problems have to be solved during the solution process. If these optimal solutions are computed by the efficient and highly accurate multiple shooting method, the partition of the interval on which the boundary-value problems are defined, is a crucial point for the convergence of that method. Finding an appropriate partitioning can be made easier by means of computer graphics to make convergence possible or, at least, to speed-up the convergence. Moreover, the different multipoint-boundary-value problems, which arise during the homotopy runs, are distinguished by different switching structures, i.e., the sequences of unconstrained and constrained subarcs for an optimal solution. A good knowledge of the switching structures to be expected is also of utmost importance for the numerical solution of optimal control problems. The point of homotopy where the structure changes can be determined much easier by means of computer graphics. Finally, computer graphics is not only a tool in the search for solutions but also in the visualization and presentation of the results. Especially, if these optimal solutions are to be realized in practice, e.g., for optimal trajectories of space vehicles, the corridor of successful controllability can be vividly described by means of computer graphics. This will be shown in a 3 min. computer film.

H.-O. PEITGEN:

From Local Divisibility to Global Patterns in Pascal's Triangle

Let p be a prime and τ be a natural number. Then define

$$S_{p^\tau} = \{(n,k) : \binom{n+k}{k} \text{ is not divisible by } p^\tau\}.$$

It has long been observed that S_{p^τ} has self-similarity features and carries fractal patterns. Using early results from E.E. Kummer, 1852, we design a hierarchical iterated function system with unique fractal attractor which characterizes an appropriate geometrical model of S_{p^τ} given by a renormalization procedure. The results are joined work with F.v. Haeseler and G. Skordev.

U. PINKALL:

Discrete Surfaces and Lattice Solitons

Discrete surfaces with "Constant Gaussian Curvature $K = -1$" are defined as maps $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{Z}^2$ = square lattice graph) with the following two properties:

1) All edges have length 1.
2) All four edges at a vertex are coplanar.

Just as the theory of continuous K-surfaces leads to the Sine-Gordon-equation $\omega_{uv} = \sin\omega$, the discrete theory comes down to a difference equation for a function $\omega : \mathbb{Z}^2 \to S^1$. As the Sine-Gordon equation, this difference equation describes a completely integrable Hamiltonian system.

K. POLTHIER:

Construction of Minimal Surfaces

In this talk we gave a few ideas on how we used computer graphics in the construction of differential geometric surfaces. Our tools were mainly developed for the computation and visualization of minimal surfaces but they can be applied to an arbitrary polygonal dataset.
With the word "construction" we want to emphasize the interactive component during the computation process, more precisely:

- continuous graphical control of all computed functions during the computation;
- possibility of interrupting the numerical process and graphically debugging the computed data and the program;
- manipulate the computed geometric data at the screen in different ways.

N. QUIEN:

Reconstruction of Surfaces from 2D-Data

Given a triangulation in the (x, y)-plane, a set of straight lines crossing the plane in the nodes of the triangulation, and vector fields along these lines, we consider the problem: Find a polygonal surface whose normals fit in these vector fields. We give an existence and uniqueness result and solve the problem numerically by minimizing a functional of least square type on a parallel transputer system. The result can be applied to the measurement of the shape of the human cornea.

M. RUMPF:

Objektorientierte Numerik und Grafik

Die Visualisierung der Lösungen partieller Differentialgleichungen und Bereitstellung von grafischer und numerischer Unterstützung zu ihrer Behandlung wurden am SFB 256 in Bonn in einen objektorientierten Ansatz eingebettet. Dieser ist besonders geeignet ein hohes Maß an Interationsfähigkeit, Programmeffizienz und Problemanpassung zu gewährleisten. Die zugrundeliegende Konzeption und die Resultate und Algorithmen im Bereich differentialgeometrischer und insbesondere kontinuumsmechanischer Aufgabenstellungen sollen zur Sprache kommen. (Vortrag + Dias + Film)

T. SAUER:

Multivariate Bernstein Polynomials and Convexity

It is well known that the univariate Bernstein polynomial

$$B_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i}, \quad f \in C[0,1], x \in [0,1]$$

preserves many geometric properties of the function f, especially convexity. This does not remain valid in two or more variables. To overcome this, we introduce two variations of convexity, one stronger, called polyhedral convexity, one weaker, called axial convexity. In fact, these properties are preserved by Bernstein polynomials and coincide with the classical notion in the univariate case. Moreover, some results are listed that can be concluded from polyhedral and axial convexity.

D. SAUPE:

Computer Graphics for Algebraic Surfaces

Raytracing is one method to generate a color display of a shaded algebraic surface in $\mathbb{R}^3$. This approach allows to include shadows, reflections and refraction. The central operation in the algorithm is as follows. Denote by $F(x,y,z)$ a polynomial specifying the algebraic surface, and by $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ a ray originating at $\gamma(0)$ (e.g. the view point). Then one must compute the smallest positive root of $F^* = F \circ \gamma$. There exist three methods for root separation: Sturm sequences, a method using differentiation, and a method due to Collins and Loos, which is based on Descartes rule of sign. All of them require knowledge of the polynomial coefficients of F^*, which are given only implicitly. We discuss computation of these coefficients, and the root separation techniques. Examples are shown: some cubic and quartic surfaces, Boy's surface, and Lawson's Klein bottle.

D. SAUPE:

Rendering Methods for Iterated Function Systems

An Iterated Function System (IFS) is defined as a finite set $\mathcal{F} = \{F_1 ..., F_N\}$ of transformations $F_i : X \to X$, where X is a complete metric space with distance funtion d, and where all F_i, $i = 1, ..., N$ are strict contractions. Here only affine transformations are considered. There exists a unique compact set $\mathcal{A}$, called the attractor, satisfying

$$\mathcal{A} = \bigcup_1^N F_i(\mathcal{A}).$$

Moreover, given a set of probabilities p_i, $i = 1, ..., N$, $\sum p_i = 1$, there is an invariant measure μ with support $\mathcal{A}$ satisfying

$$\mu = \sum_1^N p_i \mu F_i^{-1}.$$

The rendering process consists of the generation of a field of data using an IFS and its visualization using computer graphics. Two groups of methods are presented: 1. Rendering of the attractor $\mathcal{A}$ and the invariant measure. 2. Rendering of the complement of the attractor $\mathcal{A}$. There are three approaches, namely methods representing Euclidean distance from $\mathcal{A}$; repelling methods, computing the escape time of a point from $\mathcal{A}$; and methods using (electrostatic) potential functions of the attractor. The last of these methods calculates integrals with respect to the invariant measure. An algorithm which generates an approximation of such integrals with prescribed tolerance is presented. This provides an alternative to the usual approach based on Elton's Ergodic Theorem and time averages of trajectories generated by the chaos game, where no error bound is available.

A. SCHMIDT:

Numerical Treatment and Graphic Display of the Mean Curvature Flow of 3-dimensional Manifolds in $\mathbb{R}^4$

During the last years, several methods for numerical mean curvature flow of (immersed) hypersurfaces of $\mathbb{R}^3$ have been proposed (K. Brakke; G. Dziuk; Evans + Spruck). Based on the transformation of the nonlinear equation $\dot{x} = -H(x)n(x)$ to a linear equation on a manifold for each time step, a finite element method for the higher dimensional problem will be presented. It works on a piecewise linear approximation of the manifold by tetrahedra. Numerical results of the method are presented for some examples. Visualization of the results is a problem per se. We need special methods for understanding and imagination of these surfaces and their behaviour in time. Up to now, we use intersections of the 3-manifold with various hyperplanes of $\mathbb{R}^4$ and visualize the slices just like a surface in $\mathbb{R}^3$.

K.-D. SEMMLER:

Computer for Riemann Surfaces

We used computers in spectral theory of Riemann Surfaces in three problems with variable success: To study the spectrum of the Laplacian on Riemann surfaces, we need a numerical analysis for periodic boundary conditions given by a Fuchsian group. We could not find this already done, but failed in developing a corresponding tool. Still we got some insight and P. Schmutz was able to prove a result by hand. To study the length spectrum we drew part of the spectrum on the screen, and varying the parameters we could learn to distinguish the essential behaviour of the spectrum. By changing parameters we got evidence how to prove the result.
Theorem: There are no isospectral one holed tori.
We used the computer to find low genus isospectral surfaces. (P.Buser)

I. STERLING:

Willmore Surfaces and Computer

Critical points of the Willore integral $W(f) := \int_{M^2} H^2 dA$ were surveyed:
For $M^2 = S^2$: classified by Bryant.
For $M^2 = \mathbb{R}P^2$: classified by Bryant.
For $M^2 = T^2$: partial classification via soliton geometry.
For $M^2 =$ Klein bottle: Lawson's Klein bottle is the conjectured absolute minimum.
For $M^2 = M^2g =$ genus > 2 (and oriented): Lawson's examples are the conjectured (by Kuaner) to be the absolute minima in this genus. Other examples due to Karcher, Pinkall and S. exist.
Computer pictures of all the above were shown.

E.-H. TJADEN:

Elastische Raumkurven

Gerahmte elastische Raumkurven sind Extremale des Funktionals

$$\int_0^L \{\frac{1}{2} \parallel \kappa \parallel^2 + \tau^2 + c\} ds,$$

(κ= Krümmung, τ= Torsion des begleitenden orthonormalen Rahmens, c = Lagrangemultiplikator zur Längenkontrolle). Bis auf Skalierung des umgebenden Raumes ist die Parameterwelt für diese Kurven dreidimensional. Mit Hilfe der Computergrafik wird die Gesamtheit der elastischen Kurven effizient und begreifbar durchforstet.

A. WIERSE:

Objektorientierte Programmierung in GRAPE

Am SFB 256 der Universität Bonn wurde eine Grafikprogrammierumgebung geschaffen, die es vereinfacht, Ergebnisse numerischer Berechnungen zu visualisieren. Ziel des Vortrages war, das zugrundeliegende Konzept darzustellen, mit dem die vielfältigen Probleme, die bei der Aufbereitung, Verarbeitung und Arbeit mit den Daten auftreten, gelöst wurden. Eingegangen wurde auf die Objektorientiertheit der Programmierumgebung, die auf sehr einfache Weise die Aufnahme der natürlichen Datenstrukturen in ein hierarchisches Konzept ermöglicht. Ein weiterer Aspekt bestand in der Realisierung der Geräteunabhängigkeit der Programmierumgebung.

C. ZAHLTEN:

Piecewise Linear Approximation of Isovalued Surfaces

Continuation methods provide a frame for the efficient approximation of isovalued surfaces in 3D space. We are discussing two related algorithms in this field. The first one is based on subdividing space into cubes, while the second one uses a triangulation approach. The algorithms determine all cubes (or simplices) intersecting the surface and then generate an oriented polygonal approximation. Comparison shows, that the cube approach takes less time and memory. The resulting surfaces have different properties concerning symmetry and connectedness. For demonstration and comparison we use one fractal and some smooth surfaces. These surfaces are implicitely defined by a function, but it is also possible to apply both methods to 3D volume data.

Berichterstatterin: C. Zahlten

Tagungsteilnehmer

Prof.Dr. Wolf Barth
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Prof.Dr. Gerhard Dziuk
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Freiburg
Hermann-Herder-Str. 10

7800 Freiburg

Helmut Biesenbach
Institut für Angewandte Mathematik
Sonderforschungsbereich 256
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Matthias Heil
Fachbereich Mathematik - FB 3
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136

1000 Berlin 12

Olaf Delgado
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 8640

4800 Bielefeld 1

Dr. Daniel Huson
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 8640

4800 Bielefeld 1

Prof.Dr. Robert L. Devaney
Department of Mathematics
College of Liberal Arts
Boston University
111 Cummington Street

Boston , MA 02215
USA

Dr. Michael Jünger
Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Paderborn
Postfach 1621
Warburger Str. 100

4790 Paderborn

Prof.Dr. Andreas Dress
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 8640

4800 Bielefeld 1

Dr. Bernd Kugelmann
Institut für Informatik
TU München
Arcisstr. 21
Postfach 20 24 20

8000 München 2

Prof.Dr. Heinz-Otto Peitgen
Fachbereich 3
Mathematik und Informatik
Universität Bremen
Bibliothekstr.1, PF 33 04 40

2800 Bremen 33

Thomas Sauer
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Prof.Dr. Ulrich Pinkall
Fachbereich Mathematik - FB 3
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136

1000 Berlin 12

Dr. Dietmar Saupe
Fachbereich 3
Mathematik und Informatik
Universität Bremen
Bibliothekstr.1, PF 33 04 40

2800 Bremen 33

Konrad Polthier
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 4

5300 Bonn 1

Alfred Schmidt
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Freiburg
Hermann-Herder-Str. 10

7800 Freiburg

Dr. Norbert Quien
Interdisziplinäres Zentrum
für Wissenschaftliches Rechnen
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 368

6900 Heidelberg 1

Klaus-Dieter Semmler
Dept. de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale
de Lausanne
61, Avenue de Cour

CH-1015 Lausanne

Martin Rumpf
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Dr. Ivan Sterling
Fachbereich Mathematik - FB 3
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136

1000 Berlin 12

Ekkehard-H. Tjaden
Fachbereich Mathematik - FB 3
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136

1000 Berlin 12

Jürgen Werner
Abt. EP/ADTK
Daimler-Benz AG
Postfach 226

7032 Sindelfingen

Andreas Wierse
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Cornelia Zahlten
Institut für Dynamische Systeme
Universität Bremen
Postfach 33 04 40

2800 Bremen 33

e-mail Adressen

Barth, Wolf	barth@CNVE.RRZE.UNI-ERLANGEN.DBP.DE
Biesenbach, Hartmut	UNM104@DBNRHRZ1.bitnet
Delgado, Olaf	delgado@math10.uni-bielefeld.de
Devaney, Robert L.	bob@math.bu.edu
Dress, Andreas	Uni-Bielefeld über Daniel Huson
Dziuk, Gerhard	gerd@titan.mathematik.uni-freiburg.de
Heil, Matthias	matt@willmore.math.tu-berlin.de
Huson, Daniel	huson@math1.uni-bielefeld.de
Jünger, Michael	mjuenger@uni-paderborn.de
Kugelmann, Bernd	BerndKugel@Mathematik.TU-Muenchen.de
Peitgen, Heinz-Otto	peitgen@mathematik.uni-Bremen.de
Pinkall, Ulrich	pinkall@willmore.math.tu-berlin.de
Polthier, Konrad	UNM40E@DBNRHRZ1.bitnet
Quien, Norbert	V07@dhdurz1.bitnet
Rumpf, Martin	UNM104@DBNRHRZ1.bitnet
Sauer, Thomas	sauert@CNVE.RRZE.UNI-ERLANGEN.DBP.DE
Saupe, Dietmar	saupe@mathematik.uni-Bremen.de
Schmidt, Alfred	alfred@titan.mathematik.uni-freiburg.de
"	ALFR@DFRRUF1.bitnet
Semmler, Klaus-Dieter	sem@masg1.epfl.ch
Sterling, Ivan	ivan@willmore.math.tu-berlin.de
Tjaden, Ekkehard-H.	ekki@willmore.math.tu-berlin.de
Zahlten, Cornelia	conny@mathematik.uni-Bremen.de