# Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Tagungsbericht 22a/1992

## Mathematik und Philosophie - Paradoxien und Antinomien

Tagung der Fachschaft Mathematik im Cusanuswerk
27. Mai bis 31. Mai 1992

Die Tagung[1] stand unter der Leitung von Herrn Manfred Knick (Ulm), Herrn Kai Tetzlaff (Augsburg) und Herrn Reinhard Kahle (München) und verfolgte das Ziel, die Bewertung von Paradoxien und Antinomien aus philosophischer und mathematischer Sicht und ihre Konsequenzen in den beiden Disziplinen zu diskutieren.
Von den beiden geladenen Referenten behandelte Prof. Dr. Ch. Thiel (Erlangen) die *Terminologie*, die *Geschichte* und eine *Klassifikation* der Paradoxien und Antinomien aus philosophischer Sicht, und Prof. Dr. E. Specker (Zürich) trug über drei Paradoxien und zwei Antinomien und ihre Formalisierungen in der Mathematik vor: Die *Antinomie von Russell*, die *Antinomie des Lügners* und die *Vorhersageparadoxie*.

Die einzigartige Atmosphäre und die hervorragend ausgestattete Bibliothek des mathematischen Forschungszentrums haben sich — wie schon in den letzten Jahren — auf die Qualität unserer Tagung sehr positiv ausgewirkt. Die Teilnehmer (30 studierende und ehemaligen Stipendiaten des Cusanuswerkes) äußerten einhellig ihre Dankbarkeit für die Gastfreundschaft in Oberwolfach und den Wunsch, die Tagung des kommenden Jahres wieder in Oberwolfach durchzuführen.

[1]Fachschaftstagungen sind Teil der Bildungsarbeit der Bischöflichen Studienstiftung, Cusanuswerk„bei denen in Zusammenarbeit mit kompetenten Fachleuten Spezialprobleme einer einzelnen Disziplin oder Grenzfragen mehrerer Wissenschaften erörtert werden." Neben den geförderten Studenten nehmen auch ehemalige Stipendiaten der Fachrichtung an den Veranstaltungen teil, die „in besonderer Weise Gelegenheit der Zusammenarbeit von Stipendiaten und Altcusanern" bietet. (vgl. Jahresbericht des Cusanuswerkes 1985, S.10)

**Ch. Thiel**

**a) Terminologie**

In der Terminologie unterscheidet man ein Paradoxon, als einen Sachverhalt, der der Erwartung zuwiderläuft, von einer Antinomie, die einen (tatsächlichen) Widerspruch darstellt, bei dem aber beide Seiten allem Anschein nach gleich gut begründbar sind.

Im allgemeinen Sprachgebrauch stehen Paradoxien darüberhinaus noch eine Vielzahl von Phänomenen und Schlüssen. Diese, wie z.B. Paradoxien der Physik, des Unerwarteten oder Trugschlüsse, wurden aber in der folgenden Analyse nicht weiter beachtet.

**b) Geschichte**

Auf Zeno von Elea gehen die Paradoxien von Achilles und der Schildkröte und dem ruhenden Pfeil zurück.

Die älteste semantische Antinomie ist die vom Lügner („Ich lüge jetzt."). Eine Variation hiervon findet sich im Titusbrief des Apostels Paulus. Hierbei wird ein sprachliches Gebilde vorschnell als Aussage mit Wahrheitswert aufgefaßt.

Bei der Analyse des Unendlichen sind die aristotelischen Begriffe des aktual und potentiell Unendlichen zu betrachten. Für Galilei sind gewisse mathematische Relationen nicht auf aktual unendliche Mengen anwendbar (Größenvergleich unendlicher Mengen). Die unendlich kleinen Größen in der Differentialrechnung werden von Leibniz als Amphilie zwischen Sein und Nichtsein angesehen. Ohne einen korrekten Kalkül ergeben sich schon bei unendlichen Reihen etliche Ungereimtheiten ($0 = 1 - 1 + 1 - \cdots = 1$).

Die Kantsche Antinomie der Vernunft, für die der Name „Antinomie" wohl nicht ganz passend ist, bezeichnet die Tatsache, daß das Denken sich in Widersprüche verwickelt, sobald es seine Zuständigkeit überschreitet. Kant formuliert vier Antinomien, worin die jeweiligen Alternativen gleich gut begründet erscheinen.

Die Antinomie der Frage nach der Ordinalzahl der Menge alle Ordinalzahlen ist von Burali-Forti aufgeworfen worden.

Die Russellsche Antinomie: „Die Menge, die alle Mengen umfaßt, die sich nicht selbst enthalten." war unabhängig von Russell schon Zermelo bekannt, hatte eine enorme Wirkung in der Diskussion der Grundlagen der Mathematik, zerstörte insbesondere einen ersten, von Frege vorgenommenen Versuch die Mathematik auf die Logik zurückzuführen.

Die Richardsche Antinomie fragt nach der kleinsten nicht mit $n$ Worten beschreibbaren Zahl.

Autologisch heißt ein Begriff, wenn er mit seinem Inhalt übereinstimmt (z.B. kurz, dreisilbig), heterologisch als Gegenstück (lang, zweisilbig). Ist nun heterologisch hetero- oder autologisch? (Grelling-Nelson-Antinomie) Sie weist auf eine notwendige Unterscheidung von Objekt- und Metasprache hin.

### c) Klassifikation und Lösungsvorschläge

Läßt man die Paradoxien aus der Erkenntnistheorie, der Wissenschaftstheorie und der Physik außer acht, so gibt es die Paradoxien der Logik und Mengenlehre (syntaktische), die semantischen Paradoxien, sowie die Paradoxien des Unendlichen.

Eine Gemeinsamkeit aller entdeckten Antinomien ist eine Kombination von Verneinung und Rückbezüglichkeit. Ein rigoroser Lösungsvorschlag stammt von Russell und Whitehead. Sie wollten grundsätzlich Selbstreferenz nicht zulassen (Zirkelfehlerprinzip). Dabei gingen jedoch auch harmlose Selbstbezüge verloren.

Bei Peano findet sich ein erster Versuch, die Antinomien zu klassifizieren. Er beabsichtigte dadurch einen Teil zu eliminieren. Lorenz unterscheidet Verstöße gegen das Diagonalprinzip und gegen das Zirkelprinzip. Ein Nutzen in der Klassifikation wurde darin gesehen, daß man durch Zusammenfassen von Ähnlichem, Gemeinsames lernen kann.

Francis Bacon forderte eine Lehre von Definitionen. Auch Pascal stellte Forderungen für Definitionen und Axiome auf. Heinrich Behmann nahm dessen Postulat nach der Eliminierbarkeit von Nominaldefinitionen ernst. Er analysierte die Russellsche Antinomie typenfrei, erkannte darin den Mißbrauch eines Kurzzeichens und stellte Regeln für dessen Gebrauch auf. Die Korrektheit dieses Ansatzes wird allerdings in Zweifel gezogen.

Abschließend läßt sich festhalten, daß Paradoxien neben einem gewissen Unterhaltungseffekt auch aus wissenschaftsgeschichtlichem Gesichtspunkt interessant sind. Meschkowski spricht sogar von einer Bildungsfunktion. So kann man daraus lernen, voreilige Verallgemeinerungen zu vermeiden, den gewissenhaften Gebrauch von Sprache zu lernen und die Fehlbarkeit der eigenen Intuition zu erkennen.

**Literatur:**

G.Vollmer, Paradoxien und Antinomien, Naturwiss. 77, 49 – 66 (1990)

**E. Specker:**

## Die Antinomie von Russell

Die Russellsche Antinomie (Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten) ergab sich bei der Formalisierung der idealen Mengenlehre. Diese enthielt ein unbeschränktes Komprehensionsschema: Für jede Formel $\phi(x)$ gilt: Es gibt eine Menge, die genau diejenigen $x$ enthält, auf die $\phi(x)$ zutrifft. Formal ausgedrückt:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

Wählt man für $\phi(x)$ die Formel $x \notin x$, gilt demnach:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$$

Setzt man nun genau dieses $y$ für $x$ ein, erhält man die Russellsche Antinomie:

$$\exists y (y \in y \leftrightarrow y \notin y)$$

Als Ausweg aus dieser Antinomie bietet sich zuerst an, den Quantor für $x$ im Komprehensionsschema so einzuschränken, daß das „neue“ $y$ dafür nicht eingesetzt werden darf. Dieser Weg wurde von Russell mit Hilfe der Typentheorie gewählt.

## Die Antinomie des Lügners

Die Lügnerantinomie („Ich lüge jetzt“ oder „Dieser Satz ist falsch“) wurde von Prof. Specker in der Form des „Weltbuches“ nach R. Smullyan dargestellt:

Gegeben sei ein Buch, das aus Wörtern, d.h. Folgen von Buchstaben, über dem Alphabet $a, d, k, n$ besteht. Dabei wollen wir Wörter der Form $XkX$ *zu* $X$ *assoziiert* nennen, und legen die Semantik von $dakX$ mit „das zu $X$ assoziierte Wort ist im Buch“ und die von $ndakX$ mit „das zu $X$ assoziierte Wort ist nicht im Buch“ fest. Es stellt sich die Frage, ob es ein vollständiges Buch, d.h. ein Buch mit allen wahren (und keinen falschen) Sätzen gibt. Wir nehmen an, daß es ein vollständiges Buch gibt und das Wort *ndaknda* im Buch enthalten ist. Nach der semantischen Festlegung heißt das, daß das zu *nda* assoziiert Wort nicht im Buch enthalten ist. Das zu *nda* assoziiert Wort hat aber gerade die Form *ndaknda*. Wenn *ndaknda* nicht im Buch steht, muß wegen der Vollständigkeit *daknda* drinstehen, und es folgt analog, daß das zu *nda* assozierte Wort, das w[illegible] *ndaknda* ist, im Buch stehen müßte. Aus diesem Widerspruch folgt sofort, daß ein vollständiges Buch nicht existieren kann.

In diesem Weltbuch war *ndaknda* eine Formalisierung des Satzes „Dieser Satz steht nicht im Buch.“, analog läßt sich die Aussage „Diese Aussage ist nicht beweisbar.“ in der Zahlentheorie formalisieren.

Gegeben sei eine formale Sprache $\mathcal{L}$, die reichhaltig genug ist, um die natürlichen Zahlen $\mathcal{N}$ mit $+, \cdot, =$ auszudrücken. $\vdash \phi$ stehe dafür, daß $\phi$ in unserer Theorie herleitbar sei.

Das Wesen der Gödelschen Unvollständigkeitssätze beruht auf der Möglichkeit, Sätze (Formeln) aus $\mathcal{L}$ und ihre Beweise in den natürlichen Zahlen zu kodieren und dadurch in der Sprache $\mathcal{L}$ über Sätze aus $\mathcal{L}$ und ihre Beweise Aussagen formulieren zu können.

Für diese Kodierung wird jedem Symbol $s$ aus $\mathcal{L}$ eine natürliche Zahl $\ulcorner s \urcorner$ zugeordnen. Diese Kodierung $\ulcorner \cdot \urcorner$ läßt sich auf die Formeln, die ja endliche Folgen von Symbolen aus $\mathcal{L}$ sind, und die Beweise, die endliche Folgen von Formeln sind, fortgesetzen. Die so einem Symbol, einer Formel bzw. einem Beweis zugeordnete natürliche Zahl heiße *Gödelnummer*.

In $\mathcal{L}$ läßt sich insbesondere eine Funktion $sub(m, n)$ definieren, die die Substitution der Variablen $x$ in einer Formel mit Gödelnummer $m$ durch $n$ auf der Ebene der kodierten Formeln modelliert, d.h. $sub(\ulcorner \phi(x) \urcorner, n) = \ulcorner \phi(n) \urcorner$ für jede Formel $\phi(x)$ Damit läßt sich das folgende, zentrale Lemma beweisen:

*Diagonallemma:* Zu jeder Formel $\phi(x)$ mit einer freien Variablen $x$ gibt es eine Formel $\psi$, so daß gilt $\vdash \phi(\ulcorner \psi \urcorner) \leftrightarrow \psi$.

Es folgt sofort der *Satz von Tarski*, daß es keine formale Definition des Wahrheit gibt: Angenommen es gibt ein Prädikat $W(x)$ mit $\vdash \psi \leftrightarrow W(\ulcorner \psi \urcorner)$ für alle $\psi$. Dann erhält man aus dem Diagonallemma mit $\phi(x) = \neg W(x)$ einen Widerspruch.

Beweisbarkeit läßt sich dagegen formalisieren, d.h. es gibt eine Formel $bew(x)$ mit $\vdash \phi \Leftrightarrow \vdash bew(\ulcorner \phi \urcorner)$. Analog zum obigen Satz erhalten wir hier aus dem Diagonallemma mit $\phi(x) = \neg bew(x)$ den *1. Gödelschen Unvollständigkeitssatz*:

*Es gibt eine Formel $\psi$ mit $\nvdash \psi$ und $\nvdash \neg\psi$.*

Schreiben wir $bew(\ulcorner \psi \urcorner)$ mit Hilfe eines modalen Operators als $\Box\psi$, reicht es für diesen die *Löbschen Bedingungen*:

*L1*: $\vdash \psi \Rightarrow \vdash \Box\psi$

*L2*: $\vdash (\Box\phi \wedge \Box(\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow \Box\psi$

*L3*: $\vdash \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$

zu fordern, um den *Satz von Löb* zu beweisen:

*Ein Satz ist genau dann beweisbar, wenn beweisbar ist, daß er aus seiner Beweisbarkeit folgt.* In Formeln: $\vdash \Box\psi \rightarrow \psi$ gdw. $\vdash \psi$.

Wählen wir für $\psi$ eine Aussage die nicht herleitbar sein darf, z.B. $0 = 1$, folgt hieraus der *2. Gödelsche Unvollständigkeitssatz*, der besagt, daß die Konsistenz nicht innerhalb des Systems bewiesen werden kann, formal: $\nvdash \neg\Box 0 = 1$.

Zudem läßt sich die *Frage von Henkin* positiv beantworten, ob aus $\vdash \psi \leftrightarrow \Box\psi$ schon $\vdash \psi$ folgt.

**Das Vorhersageparadoxon.**

Zum Abschluß der Tagung wurde das sogenannte *Vorhersageparadoxon* diskutiert. Einem frommen Eremiten wurde offenbart, daß die Welt am folgenden Donnerstag, Freitag oder Samstag zu Ende geht. Er wird es jedoch vorher nicht wissen. Eine Formalisierung dieser Aussage in der epistemischer Logik ergibt

$$\begin{aligned} C \equiv\ & ((D \wedge \neg F \wedge \neg S \wedge \neg\Box_M D) \vee \\ & (\neg D \wedge F \wedge \neg S \wedge \neg\Box_D F) \vee \\ & (\neg D \wedge \neg F \wedge S \wedge \neg\Box_F S)), \end{aligned}$$

wobei $D, F, S$ die Aussagen: die Welt geht am Mittwoch, Donnerstag bzw. am Samstag zu Ende und $\Box_x A$ die Aussage: Man weiß am Tag $x$ die Aussage $A$, bezeichnet.

Nach der üblichen Argumentation kann aber am Samstag die Welt nicht untergehen, da aus $C$ mit $\neg D \wedge \neg F$ bereits $S$ folgt und dies dem Eremit schon am Freitag bekannt wäre. Nachdem so das 3. Disjunktionsglied von $C$ wegfällt, kann man analog aus dem Rest schließen, daß die Welt nicht am Freitag, und nach nochmaliger Anwendung des Arguments auch nicht am Donnerstag untergehen kann.

Interessant ist nun zu untersuchen, welchen formalen Anforderungen an den epistemischen Operator $\Box_x A$ gestellt werden müssen, so daß $C$ nicht erfüllbar wird. Eine eingehende Analyse zeigt, daß dazu folgende 3 Axiome nötig sind, deren Evidenz aber nicht offensichtlich sein muß:

*S1*: $\Box_x A \rightarrow A$

*S2*: $\Box_x(\Box_x A \rightarrow A)$

*S3*: $(A \rightarrow B) \wedge \Box_x A \rightarrow \Box_x B$

**Literatur:**

D.Kaplan und R.Montague, A Paradox Regained, Notre Dame Journal of Formal Logic 1, 79 – 90 (1960)

**Berichterstatter:** E. Walter, Ch. Brzoska, R. Kahle.

**Tagungsteilnehmer:**

Gregor Berg
Eichenweg 18
6653 Blieskastel

Christian Dickopp
Eckertweg 20
5100 Aachen

Klaus Haun
Nassauische Str. 41
1000 Berlin 31

Konrad Helms
Alfred Kubin Str. 7
5090 Leverkusen

Anne Henke
Rotbornstr. 6
6370 Oberursel

Bernd Irlenbusch
Wipperfürther Str.304
5067 Kürthen/Eichhof

Dr. Josef Kallrath
Südtiroler Ring 36
6719 Weisenheim am Berg

Manfred Knick
FAW Helmholtzstr.16
7900 Ulm

Bernhard Lippert
Graurheindorfstätter Str. 9
5300 Bonn 2

Peter-Michael Minnema
Masbergweg 6
4000 Düsseldorf 30

Christoph Brzoska
Hirschstr. 36
7500 Karlsruhe

Peter Hannig
Nachtigallweg 13
7500 Karlsruhe-Neurent

Prof. Dr. Gerhard Heinzmann
10, Rue des Glains
F- 54000 Nancy

Anja Held
Klütersstiege 7
4429 Uetelen

Marco Hilgers
Kempenerstr. 115
5060 Bergisch-Gladbach 2

Reinhard Kahle
Berliner Str. 43
3406 Bovenden

Albrecht Kliem
Haydenstr. 5
5300 Bonn 1

Dr. Cornelia Liesenfeld
Prof.Messerschmitt-Str. 5
8900 Augsburg

Bettina Metzler
Laubestr. 3
6000 Frankfurt a.M. 70

Michael Rösgen
Römerstr. 9
5300 Bonn 1

Phillip Rosenau
Lassallestr. 4
3300 Braunschweig

Wolfgang Ruß
Sandäckerstr. 10
7400 Tübingen 6

Albert Schmidt
Im Grün 12
7800 Emmendingen

Prof. Dr. Ch. Thiel
Bismarckstr. 1
8520 Erlangen

Erich Walter
Stephanstr. 40
8500 Nürnberg

Dirk Wingenfeld
Jahnstr. 43
6000 Frankfurt a.M. 1

Jörg Rudolf
Breisacherstr. 54
7800 Freiburg

Martin Russling
Luisenstr. 75
8000 München 40

Prof. Dr. E. Specker
Steinbrüchelstr. 45
CH-8053 Zürich

Markus Walgenbach
Eichholzstr. 1
4320 Hattingen 16

Irmgard Walter
Brückenkopfstr. 9
6600 Heidelberg

Georg Zimmermann
Barfüßerweg 7
7900 Ulm



Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft