

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 14/1993

## Durchmesser und Volumen von Polytopen

21. - 27.03.1993

Die Tagung fand unter Leitung von Professor Friedrich Juhnke (Technische Universität Magdeburg) und Priv.-Doz. Dr. Günter M. Ziegler (Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin) statt.

An der Tagung nahmen acht Mathematiker aus den alten und neuen Bundesländern sowie der Schweiz teil. Das Format eines sehr informellen Arbeits-Treffens zu einem eingeschränkten Thema hat sich dabei hervorragend bewährt: in nur 10 Vorträgen wurde über neueste Forschungsergebnisse und -richtungen diskutiert. Dabei konnte jeweils ohne Zeitbegrenzung vorgetragen und diskutiert werden.

In diesem Format, das alle Teilnehmer einhellig als ideal empfanden, ergaben sich sowohl ein reger Austausch von Ergebnissen und Perspektiven, sowie konzentrierte Diskussionen, als auch intensive Arbeit an einigen neuen, sehr erfolgversprechenden Ideen zur Durchmesser- und Volumen-Berechnung von konvexen Körpern und Polytopen. Diese basieren auf völlig neuartigen Techniken (orientierte Matroide, Faser-Polytope...) und versprechen neue Zugänge zu klassischen Problemen und Fragestellungen, wie der Berechnung von Quermaßen und der Hirsch-Vermutung. Ein Teil der Vorträge, über die die nachfolgenden Zusammenfassungen berichten, konnten schon auf vor Ort gewonnene Ergebnisse zurückgreifen. Wertvoll war auch der Zugriff auf fast vergessene Quellen der klassischen Konvexgeometrie, für die wir die hervorragende Bibliothek des Instituts nutzen konnten.

Die Veranstalter und die Teilnehmer danken dem Institut für die freundliche Unterstützung sowie die hervorragende Betreuung.

## VORTRAGSAUSZÜGE

M. HENK:

### Finite packings of centrally symmetric convex bodies

Let  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , be a centrally symmetric convex body with volume  $V(K) > 0$  and distance function  $f$ . For  $n \in \mathbb{N}$  let

$$P_n(K) = \{C_n : C_n = \text{conv}\{x^1, \dots, x^n\}, f(x^i - x^j) \geq 2 \text{ for } i \neq j\}$$

Then  $C_n + K : C_n \in P_n(K)$  is a packing of  $n$  translates of  $K$ . For  $\rho \geq 0$  let

$$\Delta(K, n, \rho) = \min\{V(C_n + \rho K) | n : C_n \in P_n(K)\}.$$

We show that for each  $n \in \mathbb{N}$  there exists a  $\rho > 0$  such that  $\Delta(K, n, \rho)$  is attained if  $C_n$  is a segment, i.e.,  $C_n + \rho K$  is a 'sausage'. In particular we prove L. Fejes Tóth's *sausage conjecture* for  $d \geq 13.387$ .

(Joint work with Ulrich Betke and Jörg M. Wills, Siegen)

FRIEDRICH JUHNKE:

### Covering and embedding by ellipsoids of extremal volume

The ellipsoid of minimal volume containing a given set  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  ("Löwner-ellipsoid") will be described as the solution of certain nonlinear semi-infinite optimization problems. Using the corresponding necessary optimality conditions of the John-Kuhn/Tucker type, we shall prove the uniqueness of the minimal ellipsoid. In special cases the minimal ellipsoid will be constructed explicitly (using the optimality conditions).

Furtheron it will be shown that the uniqueness of the minimal ellipsoid turns out to be also a consequence of certain nonclassical convexity properties of both the feasible regions and the objective functions of the investigated optimization problems.

Similar results will be presented concerning the ellipsoid of maximal volume contained in a given convex body  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ .

PETER KLEINSCHMIDT:

### Network flow algorithms in manpower planning

Optimally assigning workers to jobs is often mentioned as a paradigm of an application for the assignment problem. However, it is hardly ever used in practical systems. I will demonstrate the use of variations of the assignment problem and min-cost-flow algorithms for manpower planning in several manufacturing environments.

PETER MANI-LEVITSKA:

**Locally convex triangulations and smooth structures on topological manifolds**

Let us say that a triangulation  $C$  of a compact topological manifold  $M$  is locally convex if for every vertex  $v$  of  $C$  there exists a convex polytope  $P_v$  whose boundary complex is combinatorially isomorphic to the link of  $v$  in  $C$ . We show that the manifold  $M$  has a smooth structure if, and only if,  $M$  allows a locally convex triangulation.

We discuss related questions and applications of this result.

(Joint work with Nikolai Mnëv, St. Petersburg/Bern)

HORST MARTINI:

**Cross-section measures of convex bodies**

Let  $Q$  be the set of all  $q$ -dimensional flats parallel to a given  $q$ -dimensional linear sub-space of  $R^d$ ,  $q \in \{1, \dots, d-1\}$ . The orthogonal projection of a convex body  $K \subset R^d$  onto a  $q$ -dimensional subspace yields a  $q$ -dimensional convex body, whose  $q$ -volume is called the *outer* cross-section measure of  $K$  at this subspace. The maximum of the  $q$ -volumes of all intersections  $F \subset K$  with  $F \in Q$  is named the *inner* cross-section measure of  $K$  at the subspace in  $Q$ .

The lecture contains results on such measures of convex bodies in  $R^d$ , such as reconstruction results, information on extremal cross-section measures, the role of such measures in the theory of geometric inequalities and others. In particular, cone polytopes are intensively studied.

JÜRGEN RICHTER-GEBERT:

**Zonotopes, zonotopal tilings, and oriented matroids**

A *zonotope* can be considered as the Minkowski-sum of a finite set of line segments. If every such line segment is represented by a vector  $v_i$ , then the face lattice of the corresponding zonotope  $Z(v_1, \dots, v_n)$  represents the combinatorial structure of the *oriented matroid*  $M(v_1, \dots, v_n)$  associated to the vector configuration  $(v_1, \dots, v_n)$ .

We will present an easy proof for the fact that the *one-element liftings* of the oriented matroid  $M(v_1, \dots, v_n)$  are in one-to-one correspondence to the *tilings* of  $Z(v_1, \dots, v_n)$ , where the tiles are translates of smaller zonotopes of the form  $Z(w_1, \dots, w_k)$ , for  $\{w_1, \dots, w_k\} \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$  (vgl. Bohne & Dress 1992).

Applications to the theory of fiber polytopes and sphere-shellings will be given.

(Joint work with Günter M. Ziegler)

BERNULF WEISSBACH:

### Über Volumina gewisser Polyeder

In Beantwortung einer Frage von H. Lenz (siehe Problem-Book Oberwolfach) wird gezeigt: Für  $d \geq 4$  gibt es im  $\mathbb{R}^d$  Simplexe mit inhaltsgleichen Facetten, die jedoch nicht alle untereinander kongruent sind.

Im zweiten Teil des Vortrags wird die Approximation eines regulären Kreuzpolytops im  $\mathbb{R}^d$  durch achsenparallele Würfel in der durch das Volumen der symmetrischen Differenz gegebenen Metrik behandelt.

GÜNTER M. ZIEGLER:

### Recent Progress on Polytopes

In these three lectures we gave an account of three areas of recent (and quite spectacular) progress in the combinatorial theory of polytopes:

1. a discussion of graphs of polytopes, with Kalai's new bound for the *diameters* of polytopes (getting closer to the notorious "Hirsch Conjecture"), and a simple proof for the case of 0/1-polytopes,
2. an introduction to *Gale diagrams*: a tool to construct and analyze high-dimensional polytopes with unexpected properties, including non-rational polytopes and non-isotopic polytopes; this yields the Lawrence construction, and the "Universality Theorem for Polytopes" (Mnev). We construct a 5-dimensional polytope (10 facets, 12 vertices) for which the shape of a 2-face cannot be prescribed,
3. a new construction, *fiber polytopes* (Billera & Sturmfels), which can be used to construct polytopes whose faces correspond to polyhedral subdivisions. We report about the permuto-associahedra (Reiner & Ziegler), monotone-path polytopes, and other examples. This should be the first step in investigating the "universal constructions" for a category of polytopes.

In all these topics the decisive break-through is quite recent, and this led to extensive discussions of current problems.

Berichterstatter: G. M. Ziegler

## Tagungsteilnehmer:

Dr. Martin Henk  
Institut für Mathematik  
Universität Siegen  
Hölderlinstr. 3  
W-5900 Siegen

Prof. Dr. Friedrich Juhnke  
Institut für Mathematische Optimierung  
TU Magdeburg  
PSF 4120  
O-3010 Magdeburg

Prof. Dr. Peter Kleinschmidt  
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät  
(Lehrstuhl für Wirtschaftsinformatik)  
Universität Passau  
Innstr. 29  
W-8390 Passau

Prof. Dr. Peter Mani  
Mathematisches Institut  
Universität Bern  
Sidlerstr. 5  
CH-3012 Bern  
Schweiz

Prof. Dr. Horst Martini  
Fachbereich Mathematik  
Universität Chemnitz  
Reichenhainer Str. 41  
O-9022 Chemnitz

Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert  
Auf dem Wingert 3  
W-6101 Roßdorf

Prof. Dr. Bernulf Weißbach  
Institut für Diskrete und Numerische Mathematik  
TU Magdeburg  
PSF 4120  
O-3010 Magdeburg

Priv.-Doz. Dr. Günter M. Ziegler  
ZIB-Berlin  
Heilbronner Str. 10  
W-1000 Berlin 31

