MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 17/1993

Homology Stability of the Mapping Class Groups and Intersection Theory on Moduli Spaces

12.4. bis 17.4.1993

Die Tagung fand unter der Leitung von Eduard Looijenga (Utrecht) und Carl-Friedrich Bödigheimer (Göttingen) statt. Im Mittelpunkt des Interesses standen Fragen an die Homologie der Modulräume bzw. Abbildungsklassengruppen Riemannscher Flächen. Dabei standen folgende zwei kürzliche Entwicklungen im Vordergrund:

Im ersten Teil wurde die Stabilität der Homologie der Abbildungsklassengruppen bzw. Modulräume behandelt. Dieses Stabilitätsresultat wurde von Ivanov und Harer gezeigt. Es besagt, daß die Homologie in einem Bereich, der mit dem Geschlecht g der betrachteten Flächen wächst, unabhängig von g ist.

Im zweiten Teil wurden die Schnittzahlen von bestimmten stabilen Homologieklassen, den Mumford-Miller-Morita Klassen, behandelt. Dabei ging es hauptsächlich um die Vermutung von Witten über die erzeugende Funktion dieser Schnittzahlen. Diese Vermutung wurde kürzlich von Kontsevich bewiesen.

Vortragsauszüge

Dietrich Burde: Abbildungsklassengruppen und Modulräume

Der klassische Modulraum $\mathcal{M}_g$ besitzt verschiedene Beschreibungen als Raum der ebenen algebraischen Kurven, als Isometrieklassen hyperbolischer Metriken und als Äquivalenzklassen komplexer (bzw. konformer) Strukturen auf einer geschlossenen orientierten Fläche vom Geschlecht ≥ 2.

Für topologisch endliche Flächen $\Sigma^s_{g,r}$ mit r Randkomponenten und s Punktierungen wurden die Abbildungsklassengruppen $\Gamma^s_{g,r}$, der Modulraum $\mathcal{M}^s_{g,r}$ und der Teichmüllerraum $\mathcal{T}^s_{g,r}$ definiert. Die komplexen Strukturen auf der Fläche $\Sigma^s_{g,r}$ wurden hierbei als vollständige hyperbolische Metriken auf $\Sigma^s_{g,r}$ interpretiert, so daß die Randkurven der Fläche Geodätische sind.

Eine Parametrisierung von $\mathcal{T}^s_{g,r}$ wurde mit den Fenchel-Nielsen- Koordinaten angegeben. Man erhält mit diesen Koordinaten einen Diffeomorphismus $\mathcal{T}^s_{g,r} \to \mathbb{R}_+^{3g-3+2r+s} \times \mathbb{R}^{3g-3+r+s}$. Mit Hilfe der Interpretation des Teichmüllerraumes durch quasikonforme Abbildungen kann man zeigen, daß $\mathcal{T}^s_{g,r}$ für $r = 0$ sogar eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Die Abbildungsklassengruppe $\Gamma^s_{g,r}$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf dem Teichmüllerraum $\mathcal{T}^s_{g,r}$. Der Quotient dieser Operation ist der Modulraum $\mathcal{M}^s_{g,r}$. Für $r = 0$ ist der Modulraum eine komplexe V-Mannigfaltigkeit und somit ein normaler komplexer Raum. Für $r > 0$ operiert die Abbildungsklassengruppe frei, und der Modulraum $\mathcal{M}^s_{g,r}$ ist eine Mannigfaltigkeit und der klassifizierende Raum von $\Gamma^s_{g,r}$

Für die rationale Homologie hat man $H_k(\Gamma^s_{g,r}, \mathbb{Q}) \cong H_k(\mathcal{M}^s_{g,r}, \mathbb{Q})$. Für $r > 0$ gilt dies dann auch für Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Explizite Ergebnisse sind: $H_1(\Gamma^s_{g,r}, \mathbb{Z}) \cong 0$ für $g \geq 3$ und $H_2(\Gamma^s_{g,r}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{s+1}$ für $g \geq 5$. Dann gibt es folgendes Stabilitätsresultat:

$H_k(\Gamma^s_{g,r}; \mathbb{Z})$ ist unabhänig von g und r, wenn $g \geq 3k + 1$.

Stefan Schröer : Homologische Stabilität der Abbildungsklassengruppen

Homologische Stabilitätseigenschaften von Familien von Gruppen (z. B. Matrizengruppen, Abbildungsklassengruppen) kann man häufig durch folgenden abstrakten Stabilitätssatz nachweisen:

Satz: Sei X ein simplizialer Komplex und Γ eine Gruppe, die simplizial auf X operiert, so daß für eine Inklusion von Simplizes $\tau \subset \sigma$ die Inklusion $\Gamma_\tau \subset \Gamma_\sigma$ für deren Standgruppen gelte. Weiter sollen folgende Voraussetzungen erfüllt sein ($g \geq 0$):

(1) X ist $(g-1)$ -zusammenhängend.

(2) Γ operiert transitiv auf der Menge der p-Simplizes für $p = 0, ..., g$.

(3) Für $\tau \subset \sigma$ gelte: $H_q(\Gamma_\sigma) \to H_q(\Gamma_\tau)$ ist injektiv für $2q+$ dim $\sigma \leq g-1$ und surjektiv für $2q+$ dim $\sigma \leq g$.

(4) Für jeden 1 -Simplex $\sigma = (v_0, v_1)$ gibt es ein $\gamma_{01} \in \Gamma$ mit $v_0 = \gamma_{01} v_1$, so daß für $G := \{\gamma \in \Gamma_\sigma \,|\, \gamma\gamma_{01}\gamma = \gamma_{01}\}$ gilt: $H_q(G) \to H_q(\Gamma_\sigma)$ ist surjektiv für $2q + 1 \leq g$.

Dann gilt: Für alle Ecken $v \in X$ ist $H_q(\Gamma_v) \to H_q(\Gamma)$ injektiv für $2q \leq g-1$ und surjektiv für $2q \leq g$.

Der Beweis besteht aus der Analyse einer Standardspektralsequenz, in der die Homologie der Stabilisatoren organisiert wird.

Bernd Brinkmann: Der Kurvenkomplex

In einer kompakten Riemannschen Fläche Σ (eventuell mit Rand) betrachtet man die Menge V aller Isotopieklassen einfach geschlossener Kurven (= Kreise) auf Σ, die nicht zu einem Punkt oder nach $\partial\Sigma$ deformierbar sind. Diese Isotopieklassen bilden auf folgende Weise die Ecken eines Komplexes $C(\Sigma)$:

$C_0, ..., C_p \in V$ bilden ein p-Simplex $\langle C_0, ..., C_p \rangle$, falls alle C_i paarweise verschieden sind. Es gilt:

- $C(\Sigma)$ ist (lokal) unendlich.

- dim $C(\Sigma) = 3g(\Sigma) - 4 + \#$ {Randkomponenten}, wobei $g(\Sigma)$ das Geschlecht von Σ ist.

- $C(\Sigma)$ bestimmt einen topologischen Raum $|C(\Sigma)|$ (= geometrische Realisierung).

- Die Abbildungsklassengruppe der Fläche operiert auf $C(\Sigma)$.

Beim Beweis werden folgende Konstruktionen benutzt:

Jeder Familie $\{f_t : \Sigma \to \mathbb{R}\}$ von nicht degenerierten Funktionen läßt sich (in nicht kanonischer Weise) ein Komplex C und eine Abbildung $\varphi : C \to C(\Sigma)$ zuordnen. Dabei werden die Kreise auf Σ durch Niveau-Mengen der f_t konstruiert.

Umgekehrt kommt jede Abbildung $\varphi : C \to C(\Sigma)$ für endliche Komplexe C von einer solchen Familie her. Der Parameterraum P der Familie ist dabei $|C|$.

Theodor Bröcker: Der Kurvenkomplex und die Homologie der Abbildungsklassengruppe

Folgende Sätze wurden nach einem Manuskript von E. Looijenga (nach van der Kallen) und N.V. Ivanov bewiesen:

1. Zusammenhangstheorem: Die kompakte Fläche Σ habe $0, 1$ oder ≥ 2 Randkomponenten, und es sei jeweils $d \leq e, e-1, e-2$ mit $e := -\chi(\Sigma)$. Dann kann man jede d-parametrige Funktionenfamilie durch eine nicht-degenerierte C^1 -Familie approximieren. Die Funktionen in dieser Familie haben eine reguläre Niveaukomponente, die weder eine Scheibe noch zusammen mit einer Komponente von $\partial\Sigma$ einen Zylinder berandet. Es folgt, daß der Komplex $C(\Sigma)$ der Isotopieklassen geschlossener Kurven auf der Fläche Σ jeweils $(e-1), (e-2)$ bzw. $(e-3)$ -zusammenhängend ist.

2. Ivanovs Stabilitätssatz: Angenommen die Fläche Σ ensteht aus einer Fläche R durch das Anheften von Hosen an die Randkomponenten von R. Dann induziert die Abbildung der Abbildungsklassengruppen $\Gamma(R) \to \Gamma(\Sigma)$ in der q-ten Homologie eine Inklusion (bzw. Surjektion) für $2q \leq g(R) - 1$ (bzw. $\leq g(R)$). $g(R)$ bezeichnet dabei das Geschlecht der Fläche R.

Die Beweise sind geometrisch mit zahlreichen Figuren, durch die die Bedingungen des Stabilitätssatzes, über den Stefan Schröer vorgetragen hat, verifiziert werden. Dieser Satz läßt sich auf die Operation der Abbildungsklassengruppe auf den Kurvenkomplex $C(\Sigma)$ anwenden.

Ralf Ehrenfried: Abbildungsklassengruppen als virtuelle Dualitätsgruppen

Man nennt eine Gruppe Γ eine Dualitätsgruppe der kohomologischen Dimension n, falls es einen Isomorphismus $H^i(\Gamma, M) \to H_{n-i}(\Gamma, D \otimes M)$ für alle i und alle Γ -Moduln M gibt. Dabei nennt man $D := H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$ den dualisierenden Γ -Modul. Die Existenz eines solchen Isomorphismuses ist gleichbedeutend damit, daß alle $H^i(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) = 0$ für $i \neq n$ und D torsionsfrei (als abelsche Gruppe) ist. Ist nur eine Untergruppe $\Gamma' \subset \Gamma$ von endlichen Index eine Dualitätsgruppe, so nennt man Γ eine virtuelle Dualitätsgruppe. Alle torsionsfreien Untergruppen von endlichen Index haben eine gemeinsame kohomologische Dimension, die dann als virtuelle kohomologische Dimension von Γ bezeichnet wird.

Es läßt sich nun zeigen, daß die Abbildungsklassengruppe $\Gamma_{g,r}$ für $r > 0$ eine Dualitätsgruppe ist. Im Fall von geschlossenen Flächen kann man zeigen, daß die Torelligruppe (mod p) $\Gamma_g' \subset \Gamma_g$ eine Dualitätsgruppe ist. Diese Gruppe ist torsionsfrei und hat endlichen Index in Γ_g. Somit ist Γ_g eine virtuelle Dualitätsgruppe.

Desweiteren lassen sich die kohomologischen Dimensionen cd $\Gamma_{g,r}$ und die virtuellen kohomologischen Dimensionen vcd Γ_g genau bestimmen. Es gilt:

cd $\Gamma_{0,r} = 0$ für $r = 0, 1$

cd $\Gamma_{0,r} = 2r - 3$ für $r \geq 2$

vcd $\Gamma_1 = 1$

cd $\Gamma_{1,r} = 2r$ für $r \geq 1$

vcd $\Gamma_g = 4g - 5$ für $g \geq 2$

cd $\Gamma_{g,r} = 4g - 4 + 2r$ für $g \geq 2, r \geq 1$

Zum Beweis konstruiert man die sogenannte Borel-Serre Erweiterung $\widehat{\mathcal{T}_g}$ des Teichmüller raumes $\mathcal{T}_g$ und betrachtet die freie Operation der Torelligruppe Γ_g' auf dieser Erweiterung, die eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial\widehat{\mathcal{T}_g}$ mit Ecken ist. Dieser Rand ist nun homotopieäquivalent zur geometrischen Realisierung des Kurvenkomplexes $C(\Sigma_g)$. Damit lassen sich die Gruppen $H^i(\Gamma_g', \mathbb{Z}\Gamma_g')$ und $H^i(\Gamma_{g,r}, \mathbb{Z}\Gamma_{g,r})$ bestimmen, und deren benötigte Eigenschaften zeigen.

Herbert Kurke: Deligne-Mumford Kompaktifizierung und tautologische Klassen

Der Raum $\mathcal{M}_g$ wird hier als Modulraum der glatten projektiven algebraischen Kurven betrachtet. Erlaubt man gewisse singuläre Kurven, erhält man eine Kompaktifizierung $\overline{\mathcal{M}_g}$. Dazu betrachten wir sogenannte stabile Kurven:

Das sind zusammenhängende algebraische Kurven, die gewöhnliche Doppelpunkte haben und auf dem glatten Teil eine hyperbolische Struktur erlauben (d.h. Komponenten vom Geschlecht 0 müssen mindestens 3 Doppelpunkte haben).

Die Konstruktion von $\overline{\mathcal{M}_g}$ mittels der geometrischen Invariantentheorie wurde skizziert. Daraus folgt, daß $\overline{\mathcal{M}_g}$ eine quasiprojektive normale algebraische Varietät ist. Aus dem stabilen

Reduktionssatz folgert man, daß $\overline{\mathcal{M}_g}$ projektiv ist. Analog lassen sich die Modulräume $\overline{\mathcal{M}_g^s}$ von stabilen Kurven mit s ausgezeichneten Punkten konstruieren.

Durch die Betrachtung der universellen Deformation wurde erklärt, welche lokalen Strukturen $\overline{\mathcal{M}_g}$ und $\overline{\mathcal{M}_g}\backslash\mathcal{M}_g$ haben: $\overline{\mathcal{M}_g}$ ist ein Orbifold und $\overline{\mathcal{M}_g}\backslash\mathcal{M}_g$ ist im Sinne von Orbifolds ein Divisor mit normalen Kreuzungen.

Global ist $\overline{\mathcal{M}_g}\backslash\mathcal{M}_g$ eine Summe von Divisoren $\Delta_j, j < \frac{g}{2}$. Dabei besteht Δ_j aus den Kurven, die durch einen singulären Punkt in eine Kurve vom Geschlecht $j > 0$ und $g-j$ getrennt werden können, bzw. durch die Immersion einer stabilen Kurve vom Geschlecht $g-1$ und einen neuen Doppelpunkt entstehen.

Die tautologischen Klassen sind die Zykelklassen $\kappa_l = \pi_*(\omega^{l+1}_{\overline{C_g}/\overline{\mathcal{M}_g}})$ im rationalen Chowring bzw. in $H^*(\overline{\mathcal{M}_g}, \mathbb{Q})$ oder $H^*(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q})$. Dabei ist $\pi : \overline{C_g} \to \overline{\mathcal{M}_g}$ die universelle Familie stabiler Kurven und $\omega_{\overline{C_g}/\overline{\mathcal{M}_g}}$ das relative kanonische Bündel.

Eine topologische Interpretation von $\kappa_l \in H^*(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q})$ wurde skizziert und der Beweis des Nichtverschwindens der κ_l für große g wurde gezeigt. Hierzu werden Konstruktionen von geeigneten Faserungen projektiver algebraischer Varietäten $\pi : Z \to X$ mit glatten Kurven vom Geschlecht g als Fasern betrachtet, so daß $\pi_*(\omega^{l+1}_{Z/X}) \neq 0$ ist (nach Miller und Morita).

Günter Harder:
Die Vermutung von Witten

Es wurde der kompaktifizierte Modulraum $\overline{\mathcal{M}_g^s}$ der stabilen und mit s Punkten markierten Riemannschen Flächen eingeführt. Auf diesen Raum sind durch die Punktierungen s Geradenbündel $\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_s$ gegeben. Man interessiert sich nun für die Schnittzahlen

$$\langle \tau_{d_1}, ..., \tau_{d_s} \rangle = c_1(\mathcal{L}_1)^{d_1} \cdot ... \cdot c_s(\mathcal{L}_s)^{d_s} ,$$

wobei natürlich $\sum d_i = 3g-3+s$ sein muß. Es ist so, daß wir wegen der Symmetrie unter der symmetrischen Gruppe von s Punkten nur die Zahlen $\nu_k = \#\{i \mid d_k = 0\}, k = 1, ..., s$ kennen müssen. Wir setzen formal:

$$\langle \tau_{d_1}, ..., \tau_{d_s} \rangle = \langle \tau_0^{\nu_0}, ..., \tau_k^{\nu_k} \rangle$$

Es gilt dann $0 \cdot \nu_0 + 1 \cdot \nu_1 + ... + k \cdot \nu_k = 3g-3+s$ und $\nu_0 + ... + \nu_k = s$. Man hat hiermit den Ausdruck $\langle \tau_0^{\nu_0}, ..., \tau_k^{\nu_k} \rangle$ formal definiert, falls die resultierende Zahl g ganz und ≥ 0 ist. Sonst setzt man diesen Ausdruck Null. Es ist z.B. $\langle \tau_0^3 \rangle = 1$. Betrachtet man die erzeugende Funktion

$$F(t_0, ..., t_s) = \sum_{\{\nu_0, ..., \nu_k\}} \frac{t_0^{\nu_0}}{\nu_0!} \cdot ... \cdot \frac{t_k^{\nu_k}}{\nu_k!} \cdot \langle \tau_0^{\nu_0}, ..., \tau_k^{\nu_k} \rangle ,$$

so hat Witten vermutet, daß für diese Funktion gilt:

(1) $U = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} F$ genügt einem System

$$\frac{\partial U}{\partial t_s} = R_{s+1}(U, \frac{\partial U}{\partial t_0}, \frac{\partial^2 U}{\partial t_0^2}, ...)$$

von Differentialgleichungen, wobei die R_{s+1} Polynome in $U, \frac{\partial U}{\partial t_0}, ...$ usw. sind, die sich aus der KdV-Hierachie ergeben.

(2) F genügt der String-Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = t_0^2 + \sum t_{i+1} \frac{\partial F}{\partial t_i}$$

Die String-Gleichung hat eine einfache geometrische Erklärung in Termen der Modulräume $\overline{\mathcal{M}_g^s}$. Diese wurde erläutert.

Frank Herrlich:
Eine Zellenzerlegung von $\mathcal{M}_g^n \times I\!R_+^n$

Ein Bändergraph ist ein Graph zusammen mit einer zyklischen Anordung der Kanten in jeder Ecke. Die Kantenmenge eines Bändergraphen zerfällt in Randzyklen (oder Randpolygone). Man führt die Menge $\mathcal{M}_g^{n,comb}$ der metrisierten Bändergraphen mit n (geordneten) Randzyklen und Geschlecht g ein und versieht sie in naheliegender Weise mit einer Orbifoldstruktur.

Man kann in die Randzyklen eines Bändergraphen punktierte Kreisscheiben so einkleben, daß eine n-fache punktierte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g mit fast überall flacher Metrik entsteht. Umgekehrt findet man nach einem Satz von Strebel zu n Punkten auf einer Riemannschen Fäche stets ein meromorphes quadratischen Differential mit geschlossenen Trajektorien, das an den vorgegebenen Punkten Pole der Ordnung 2 hat und ansonsten holomorph ist; außerdem kann man die Länge der geschlossenen Trajektorien um die Pole vorschreiben. Es folgt:

Satz: *$\mathcal{M}_g^{n,comb}$ ist homöomorph zu $\mathcal{M}_g^n \times I\!R_+^n$.*

Mit gewisser Einschränkung läßt sich dieser Homöomorphismus auf die Kompaktifizierung fortsetzen.

Man beachte nun das Geradenbündel $\mathcal{L}_i := x_i^*(\omega_{C/\overline{\mathcal{M}_g^n}})$, $(i = 1, \dots, n)$ und ziehe es auf $\mathcal{M}_g^{n,comb}$ zurück. Das assozierte S^1-Bündel hat als Faser über einem metrisierten Bändergraphen gerade das i-te Randpolygon. Die Chernklasse dieses Bündels berechnet man als Krümmungsform eines Zusammenhangs. Damit kann man eine Volumenform auf der Faser der Projektion $\mathcal{M}_g^{n,comb} \to I\!R_+^n$ (also auf Kopien von $\mathcal{M}_g^n$) definieren. Durch Laplace-Transformation mit positiven reellen Zahlen λ_1, $i = 1 \dots, n$ erhält man Kontsevichs *Main Identity*:

$$\sum_{d_1+\dots+d_n=d} \langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle \prod_{i=1}^{n} \frac{(2d_i-1)!!}{\lambda^{2d_i+1}} = \sum_G \frac{1}{2^{\#Ecken(G)}} \frac{1}{\#Aut\, G} \prod_{\substack{e \text{ Kante} \\ \text{von } G}} \frac{1}{\lambda_{i(e)} + \lambda_{i(\bar{e})}},$$

wobei $d = 3g - 3 + n$ ist und $\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle$ die Schnittzahl $c_1(\mathcal{L}_1)^{d_1} \dots c_1(\mathcal{L}_n)^{d_n}$. Die rechte Summe erstreckt sich über alle 3-valenten numerierten (g, n)-Bändergraphen G.

Gregor Masbaum:
Ein Hermitesches Matrizenmodell

In diesem Vortrag wurde

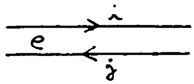
$$\log \int_{\mathcal{H}_N} \exp(iTr\frac{X^3}{3} - \frac{1}{2}Q_\Lambda(X))dX$$

berechnet, wobei $\mathcal{H}_N$ der Raum der Hermitschen $N \times N$-Matrizen ist, und $Q_\Lambda(X) = Tr(\Lambda X^2)$ mit $\Lambda = diag(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N)$, $\Lambda_i > 0$. Es handelt sich um ein einfaches Beispiel des sogenannten Feynman-Kalküls.

Das Resultat ist im wesentlichen

$$\sum_G \frac{i^{|G_0|}}{|Aut\, G|} \prod_{e \in G_1} \lambda_e^{-1},$$

wobei G die Isomorphieklassen von zusammenhängenden 3-valenten Bändergraphen mit N-kolorierten Randzykeln durchläuft. Hier ist $|G_0|$ die Anzahl der Ecken von G, G_1 die Menge der Kanten von G, und der Propagator λ_e ergibt sich aus der Kolorierung gemäß



$$\lambda_e = \frac{\Lambda_i + \Lambda_j}{2}.$$

Dieses Resultat liefert einen Schritt in Kontsevichs Beweis der Witten-Vermutung (vgl. die "Main Identity" in F. Herrlichs Vortrag).

Guido Kings: KdV-Hierarchie und Grassmannsche

Sei $Psd := \left\{ \sum_{i=\infty}^N r_i(x) D^i \mid N \in I\!N,\ D = \frac{\partial}{\partial x},\ r_i \in C^\infty(I\!R) \right\}$ der Ring der formalen Pseudodifferentialoperatoren und $L = D^n + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(x,t) D^i$ ein Differantialoperator. Dann existiert $L^{\frac{1}{n}} \in Psd$ mit $(L^{\frac{1}{n}})^n = L$, und bezeichnet $L_+^{\frac{r}{n}}$ den Differentialoperatorteil von $(L^{\frac{1}{n}})^r$, so ist die Gelfand-Dikii-Hierarchie gegeben durch

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \left[L_+^{\frac{r}{n}}, L \right]$$

(für $n = 2$: KdV-Hierarchie). Ziel des Vortrags war es, die Hilfsmittel bereitzustellen, um Lösungen der KdV-Hierarchie zu bestimmen. Die Lösungen werden parametrisiert durch Grassmannsche. Sei $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$, $H_\pm$ Unterraum der Fourierreihen mit positiven bzw. negativen Exponenten, so setzt man:

$$\begin{aligned} Gr(H) := \{ W \subset H \text{ abgeschl.} \mid\ & pr_+ : W \to H_+ \text{ Fredholm vom Index } 0, \\ & pr_- : W \to H_- \text{ Hilbert-Schmidt} \} \end{aligned}$$

Dies ist eine Hilbertmannigfaltigkeit, und es werden Standard-Koordinaten angegeben. Für die Theorie der τ-Funktionen wird das Determinantenbündel über $Gr(H)$ benötigt. Die Konstruktion mittels zulässiger Basen wurde angegeben, und eine Erweiterung $1 \to \mathbb{C}^* \to \widehat{GL}_{res} \to GL_{res} \to 1$ der Strukturgruppe GL_{res} von $Gr(H)$ konstruiert, die auf dem Determinantenbündel operiert.

Anette Huber: KdV-Hierarchie und τ-Funktionen

Sei $\Gamma_+ = \left\{ f : \overline{D} \to \mathbb{C}^* \mid f \text{ holomorph}, f(0) = 0 \right\}$. Dieses operiert durch Multiplikation auf der Grassmannschen des letzten Vortrags. Standardkoordinaten sind $\Gamma_+ \ni g = \exp(\sum_{i \geq 1} t_i z^i)$

($x = t_1$). Weiter sei $\Gamma_+^W := \{g \in \Gamma_+ \mid g^{-1}W \cap H_- \neq 0\}$. Dann ist die *Bakerfunktion* $\psi_W : \Gamma_+^W \to W$ ($W \in Gr(H)$) gegeben durch $g \mapsto g(\mathrm{pr}_{g^{-1}W}^{-1}(1))$, wobei $\mathrm{pr}_{g^{-1}W} : g^{-1}W \to H_+$.

Satz. *Für $r \geq 2$ existieren eindeutige Differentialoperatoren P_r*

$$P_r = D^r + \mu_{r,2}D^{r-2} + \ldots + \mu_{r,r},$$

so daß für $W \in Gr^{(n)}$ gilt $\frac{\partial \psi_W}{\partial t_r} = P_r \psi_W$, d. h. für $z^n W \subset W$ gilt weiter $P_n \psi_W = z^n \psi_W$. In diesem Falle erfüllt $L := P_n$ die GD-Hierarchie, d. h.

$$\frac{\partial L}{\partial t_r} = \left[L_+^{\frac{r}{n}}, L\right].$$

Als nächstes werden die Funktionen $\tau_W : \Gamma_+ \to \mathbb{C}$ eingeführt, die aus einem Schnitt des Kodeterminantenbündel über Gr hervorgeht. ($g \mapsto \frac{\sigma(g^{-1}W)}{g^{-1}\sigma(W)}$, wobei σ der kanonische Schnitt ist, $g^{-1}W \cap H_- \neq 0$.)

Diese Funktion ist holomorph und kann als unendliche Determinante berechnet werden, nach Parameterwechsel auf gewissen Untermengen auch als endliche Determinante. Es wurde gezeigt, daß die Koeffizienten der Entwicklung von $g^{-1}\psi_W$ von der Form $\frac{E_i \tau_W}{\tau_W}$ sind, E_i ein explizit bekannter Differentialoperator. Damit kann der Differentialoperator L von oben explizit in Termen von τ_W bestimmt werden, seine Koeffizienten sind holomorph. Speziell für $n = 2$ (KdV-Hierarchie) hat er die Form

$$L = D^2 + \mu_W = D^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau_W.$$

Carl-Friedrich Bödigheimer: τ - Funktionen zu Airy-Funktionen

Dieser Vortrag bildete den Abschluß des Beweises der Witten-Vermutung. Zur klassischen Airy-Funktion

$$a(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} dy\; exp\sqrt{-1}(xy + \frac{1}{3}y^3) \qquad , x \in \mathbb{R}$$

wird für reelle Diagonalmatrizen $x = diag(x_1, ..., x_N)$ die Funktion

$$A(x) := \int_{\mathcal{H}_N} dY\; exp\; tr\sqrt{-1}(xY + \frac{1}{3}Y^3)$$

betrachtet, wobei $\mathcal{H}_N$ der Raum der Hermite'schen ($N \times N$) - Matrizen ist. Dieses Integral wird auf die Funktion $a(x)$ selbst nebst ihren Ableitungen zurückgeführt.

$$A(x) = const \frac{det(a_{i-1}(x_j))}{det(x_i^{j-1})}$$

mit

$$a_k(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} dy\; y^k\; exp\sqrt{-1}(xy + \frac{1}{3}y^3)$$

Man setzt jetzt $t_k = t_k(\Lambda) = -\frac{1}{k}tr(\Lambda^{-1})$ für ein $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_N)$, $\lambda_i < 0$. In der Funktion

$$F(t_0, ...) = \sum_s \frac{1}{s!} \sum_{d_1,...,d_s} \langle \tau_{d_1}, ..., \tau_{d_s} \rangle t_{d_1} \cdot ... \cdot t_{d_s}$$

wechseln wir zu Variablen $T_1, T_2, ...$ mit $t_i = (2i+1)!!\ T_{2i+1}$. Aus dem Vortrag Masbaum erhält man:

$$exp(F(t(\Lambda))) = const\ A(2^{\frac{-2}{3}}\Lambda^2) \prod_{i<j}(\lambda_i + \lambda_j) \prod_i \lambda_i^{\frac{1}{2}} = const \frac{det(z_{i-1}(\lambda_j))}{det(\lambda_i^{j-1})}$$

mit den neuen Funktionen $z_k(\lambda) := c_k \lambda^{\frac{1}{2}}\ exp(-\frac{\lambda^3}{3})\ a_k(2^{\frac{-2}{3}}\lambda^2)$, $\lambda < 0$. Diese Funktionen besitzen eine asymptotische Entwicklung für $\lambda = \infty$. Die Konstante c_o kannn so gesetzt werden, daß $z_0(0) = 1$. Setze $z_0 := z$. Der Differentialoperator $D = \lambda^{-1}\frac{d}{d\lambda} - \frac{1}{2}\lambda^{-2} + \lambda$ erfüllt

$$D^2 z_0(\lambda) = \lambda^2 z_0(\lambda) \quad , D z_k(\lambda) = const\ z_{k+1}(\lambda).$$

Man kann deshalb die Konstanten c_k wählen durch $z_{2k} := \lambda^{2k} z$ und $z_{2k+1} := \lambda^{2k} Dz$. Aus den Vorträgen Kings/Huber folgt nun, daß $exp(F)$ die τ-Funktion für den $\mathbb{C}[\lambda^2]$- Modul $W = span\{z, Dz\} \subset \mathbb{C}((\lambda^{-1}))$ ist mit Anfangswert $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2x$.

Eduard Looijenga: Generalisations of the Witten conjecture

The talk described two directions in which Witten generalised his conjecture about intersection numbers on $\overline{\mathcal{M}_g^n}$.

1) If τ_p denotes the τ-function of the Gelfand-Dikii hierachy with "initial value" $(\frac{\partial}{\partial x})^p + px$ $(p \geq 2)$, then $\log \tau_p$ should be equal to the generating function F_p obtained as follows: Given a genus $g \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $(k_1, \ldots, k_n \in \{0, \ldots, p-2\}$ such that $r := \frac{1}{p}(2g - 2 - \sum_{i=1}^n k_i) \in \mathbb{Z}$, Witten defines a class

$$e(p, k_1, \ldots, k_n) \in H^{2(g-1-r)}(\overline{\mathcal{M}_g^n})$$

so that we can form

$$\sum_{\substack{n\geq 1\\ g\geq 0}} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(d_1,\ldots,d_n)\\ (k_1,\ldots,k_n)}} \frac{1}{p^{2g}} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}_g^n}} e(p, k_1, \ldots, k_n) c_1(\mathcal{L}_1)^{d_1} \ldots c_1(\mathcal{L}_n)^{d_n} \right) t_{d_1 + \frac{k_1}{p}} \cdots t_{t_{d_n} + \frac{k_n}{p}}.$$

Then after substituting

$$t_{d+\frac{k}{p}} = T_{dp+k+1}(k+1)(p+k+1)\ldots(dp+k+1)$$

we find our generating function

$$F_p \in \mathbb{Q}[[T_1, T_2, \ldots]].$$

2) The second generalisation involves Witten's expansion relative a simply connected projective manifold M with negative canonical bundle. The expansion has coefficients in the tensor algebra generated by $H^*_{ev}(M)$.

Ulrich Stuhler:
Kohomologie von Liealgebren und die Abbildungsklassengruppen

Es wurde über ein Preprint von Kontsevich, "Formal (non)-commutative symplectic geometry", berichtet: Seien l_n, a_n resp. c_n die Liealgebren der Derivationen folgender Algebren: $L_n =$ freie Liealgebra in den Erzeugenden $\langle p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\rangle$ bzw. $A_n = \langle p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\rangle$ die freie assoziative Liealgebra (ohne 1) in den Symbolen p_i, q_i resp. $C_n = \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n]$ (Polynomring in den Unbestimmten), so daß $\sum_{i=1}^n [p_i, q_i]$ resp. $\sum_{i=1}^n [p_i, q_i]$ resp. $\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ invariant sind.

Setze $h_n := l_n$ resp. a_n resp. c_n, $\lim_{n\to\infty} h_n =: h_\infty$. Dann ist $H_*(h_\infty)_Q$ eine kommutative und kokommutative Hopfalgebra und damit nach einem Satz von Milnor–Moore isomorph zur freien (im $\mathbb{Z}/2$-graduiertem Sinne) kommutativen Algebra über dem primitiven Anteil $PH_*(h_\infty)$. Dieser primitive Teil der Homologie wurde mit i) der Gruppenkohomologie der Gruppe der äußeren Automorphismen einer freien Gruppe resp. ii) der Kohomologie der Abbildungsklassengruppen bzw. der Modulräume komplexer Kurven resp. iii) Graphenhomologie in Zusammenhang gebracht. Es wurde der Beweis für iii) gezeigt (mit einer Lücke) und der von ii) angedeutet.

Eine Rolle spielt 1) die Tatsache, daß $sp(2\infty) \subset h_\infty$ und 2) die Existenz einer weiteren Beschreibung der Liealgebra als Poissonalgebra in den nichtkommutativen Situationen i) und ii).

Berichterstatter: Ralf Ehrenfried, Stefan Schröer

Tagungsteilnehmer

Dr. Claas Becker
Institut f. Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA
Universitätsstr. 150

W-4630 Bochum 1
GERMANY

Ralf Ehrenfried
SFB 170 "Geometrie und Analysis"
Mathematisches Institut
Universität Göttingen
Bunsenstr. 3-5

W-3400 Göttingen
GERMANY

Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer
Mathematisches Institut
Universität Göttingen
Bunsenstr. 3-5

W-3400 Göttingen
GERMANY

Prof.Dr. Carel Faber
Department of Mathematics
University of Amsterdam
Plantage Muidergracht 24

NL-1018 TV Amsterdam

Dr. Bernd Brinkmann
Institut f. Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA
Universitätsstr. 150

W-4630 Bochum 1
GERMANY

Prof.Dr. Gerard van der Geer
Fakulteit Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24

NL-1018 TV Amsterdam

Prof.Dr. Theodor Bröcker
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31

W-8400 Regensburg
GERMANY

Prof.Dr. Wulf-Dieter Geyer
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

W-8520 Erlangen
GERMANY

Dietrich Burde
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 1

W-5300 Bonn 1
GERMANY

Bruno Haible
Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe
Kaiserstr. 12

W-7500 Karlsruhe 1
GERMANY

Prof.Dr. Günter Harder
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Wegelerstr. 10

W-5300 Bonn 1
GERMANY

Ralph Kaufmann
Endenicher Allee 17/3523

W-5300 Bonn
GERMANY

Dr. Hans-Werner Henn
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288/294

W-6900 Heidelberg 1
GERMANY

Guido Kings
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

W-4400 Münster
GERMANY

Prof.Dr. Frank Herrlich
Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe
Englerstr. 2

W-7500 Karlsruhe 1
GERMANY

Prof.Dr. Herbert Kurke
Institut für Reine Mathematik
Fachbereich Mathematik
Humboldt-Universität Berlin
Unter den Linden 6

O-1080 Berlin
GERMANY

Annette Huber
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

W-4400 Münster
GERMANY

Prof.Dr. Eduard J.N. Looijenga
Faculteit Wiskunde
Rijksuniversiteit Utrecht
Postbus 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Dr. Johannes Huebschmann
U. E. R. Mathématiques
Université de Lille 1

F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

Dr. Gregor Masbaum
U. F. R. de Mathématiques
T. 45-55, 5ème étage
Université de Paris VII
2, Place Jussieu

F-75251 Paris Cedex 05

Dr. Roin Nadiradze
Universität Heidelberg
Math. Institut
Im Neuenheimer Feld 288/294

W-6900 Heidelberg 1
GERMANY

Prof.Dr. Kyoji Saito
Research Institute for Mathematical
Sciences
Kyoto University
Kitashirakawa Sakyo-ku

Kyoto 606
JAPAN

Thomas Nüßler
Fachbereich Mathematik
Universität Kaiserslautern
Postfach 3049

W-6750 Kaiserslautern
GERMANY

Martin Schlichenmaier
Fakultät für Mathematik und
Informatik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

W-6800 Mannheim 1
GERMANY

Dr. Takeshi Ooe
Lehrstuhl für Mathematik VI
Fak.f.Mathematik und Informatik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

W-6800 Mannheim 1
GERMANY

Dr. Alexander Schmidt
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288/294

W-6900 Heidelberg 1
GERMANY

Prof.Dr. Frans Oort
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit te Utrecht
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Prof.Dr. Peter Schneider
Mathematisches Institut
Universität zu Köln
Weyertal 86-90

W-5000 Köln 41
GERMANY

Martin Pikaart
Abstederdijk 261

NL-3582 BK Utrecht

Prof.Dr. Martin Schottenloher
Mathematisches Institut
Universität München
Theresienstr. 39

W-8000 München 2
GERMANY

Stefan Schröer
Pfalz-Grona-Breite 56

W-3400 Göttingen
GERMANY

Martin Schröter
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

W-4400 Münster
GERMANY

Dr. Jörg Schürmann
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

W-4400 Münster
GERMANY

Dr. Wolfgang K. Seiler
Lehrstuhl für Mathematik VI
Fak.f.Mathematik und Informatik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

W-6800 Mannheim 1
GERMANY

Prof.Dr. Dirk Siersma
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit te Utrecht
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Prof.Dr. Peter Slodowy
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstr. 55

W-2000 Hamburg 13
GERMANY

Prof.Dr. Jan Stienstra
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit te Utrecht
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Prof.Dr. Ulrich Stuhler
Fachbereich 7: Mathematik
U-GHS Wuppertal
Gaußstr. 20

W-5600 Wuppertal 1
GERMANY

Matthias Weber
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 6

W-5300 Bonn 1
GERMANY

Dr. Chris G. Zaal
Fakulteit Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24

NL-1018 TV Amsterdam