T a g u n s b e r i c h t 14/1995

AG: Darstellungstheorie reeller reduktiver Lie-Gruppen

9.– 14.04.1995

Organisatoren: Wolfgang Soergel (Freiburg),
Dragan Miličić (Salt Lake City)

Introduction

The theory of (infinite dimensional) representations of real reductive Lie groups is now almost fourty years old, and its principal results as the Plancherel formula or the classification of irreducible representations may be regarded as "classical". More recently, Beilinson and Bernstein discovered the "localization for $\mathfrak{g}$-modules" which can be viewed as a vast generalization of the classical Bott-Borel-Weil theory. This relates representation theory to the geometry of flag manifolds and has lead to tremendeous advances, most notably the determination of the characters of all irreducible representations. Looking at the resulting formulas, Vogan noticed that there also is an intimate connection with the geometry of the flag manifold of the Langlands dual group. Although this connection (together with its conjectural generalization to p-adic groups) is of compelling beauty, it remains a complete mystery at the moment: The proof (in the known cases) is just heavy combinatorics.

In this AG we want to focus on the approach to representation theory by localization and use it to study the structure of our representations in some detail. In particular we want to understand the Langlands classification from a geometric point of view. The classics and mysteries will be left to the first and last day respectively.

Vortragszusammenfassungen

Halbeinfache komplexe Lie-Algebren
Stefan Kühnlein, Düsseldorf

Der klassische Stoff wird referiert (alles über $\mathbb{C}$). Definition der Halbeinfachheit, Killingform, Kriterien für Auflösbarkeit und Halbeinfachheit (Cartan). Endlichdimensionale Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren sind vollständig reduzibel (Weyl). Cartanunteralgebren, Wurzelraumzerlegungen, positive Wurzeln, Klassifikation der irreduziblen Wurzelsysteme. Klassifikation der endlich dimensionalen irreduziblen Darstellungen einer halbeinfachen Lie-Algebra:

- Existenz eines höchsten Gewichtes, Gewichtsgitter, dominante Gewichte, Weylgruppe
- Konstruktion der Darstellungen via Verma-Moduln ($\rightarrow$ unendlich-dimensionale Darstellungen)

Dazu wird die universelle Einhüllende gebraucht und das Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorem. Zentrum der universellen Einhüllenden, zentraler Charakter der Standard-zyklischen Moduln. Harish-Chandra-Isomorphismus.

Übergang von Darstellungen in topologischen Vektorraum zu Harish-Chandra Moduln
Michael Schröder, Mannheim

Der Vortrag behandelt das Zusammenspiel des funktionalanalytischen Zugangs zur Klassifikation der Darstellungen reeller reduktiver Gruppen G und dem mehr algebraischen Zugang über die Theorie der $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln. Es wurde zuerst gezeigt, daß jede Hibertraum-Darstellung (π, H) einer kompakten topologischen Gruppe K sich zerlegt als orthogonale direkte Hilbertsumme aller isotypischen Komponenten $H(\tau)$ mit τ aus dem Dual $\hat{K}$ von K. Dieses Resultat wurde auf den Fall der rechtsregulären Darstellung von K auf $L^2(G)$ zurückgeführt. Insbesondere wurde gezeigt, daß die irreduziblen Darstellungen τ von K endlichdimensional sind und mit Multiplizität $\dim \tau$ in $L^2(K, \tau)$ auftreten. Danach wurde die Darstellung der einhüllenden Algebra U von $\mathfrak{g}$ als partielle Differentialoperatoren auf den glatten Vektoren H^∞ einer Hilbertraum-Darstellung (π, H) von G und dem unterliegenden $(\mathfrak{g}, K)$-Modul $H_K = \oplus_{\tau \in \hat{K}} H(\tau) \cap H^\infty$ von H diskutiert. Dabei ist K eine maximal kompakte Teilgruppe von G. Der Vortrag endete mit drei Resultaten von Harish-Chandra über unitäre Hibertraum-Darstellungen (π, H) von G: Zuerst ist jede irreduzible dieser Darstellungen (π, H) zulässig, d. h. es gilt $\dim H(\tau) < \infty$ für alle $\tau \in \hat{K}$. Weiter sind (π, H), (σ, V) genau dann (unitär) äquivalent, wenn H_K und V_K isomorph sind als $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln.

Die Langlands-Klassifikation
Martin Olbrich, Berlin

Der Vortrag erläutert die Langlands-Klassifikation irreduzibler $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln reeller reduktiver Gruppen, zunächst in Termen temperierter Moduln der Levi-Faktoren parabolischer Untergruppen. Dazu wird das asymptotische Verhalten der Matrixelemente diskutiert und dessen Zusammenhang mit den Knapp-Steinschen Vertauschungsoperatoren sowie der $\mathfrak{n}$-Homologie dargestellt. Ein Überblick über die Klassifikation der temperierten Darstellungen wird gegeben.

Harish-Chandra Moduln und Kategorie $\mathcal{O}$
Bernd Steinert, Bonn

Für komplexe Gruppen lassen sich die Harish-Chandra-Moduln (mit einer vorgegebenen Operation des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra) in Beziehung zu einer Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{O}$ setzen. Diese Kategorie $\mathcal{O}$ besteht aus bestimmten Moduln der Lie-Algebra und ist leichter zu verstehen als die Ausgangskategorie. Z. B. haben ihre Objekte alle endliche Länge, und auch die einfachen Objekte sind bekannt. Harish-Chandra-Moduln für komplexe Gruppen lassen sich als Bimoduln für die universelle einhüllende Algebra auffassen. Der Funktor nach $\mathcal{O}$ wird dann durch Tensorieren mit einem Verma-Modul gegeben. Dabei gehen die Darstellungen der Hauptserie in Duale von Verma-Moduln über. Diese Beziehung geht im Wesentlichen auf Bernstein und Gelfand zurück und findet ihre Anwendung in der Analyse von Kompositionsreihen von Hauptseriendarstellungen.

$\mathcal{D}$-modules on smooth varieties. Inverse and direct images. Coherence, characteristic variety, Bernstein's theorem on the dimension of the characteristic variety.
Dan Fulea, Mannheim

Der Titel ist selbsterklärend. Grundlegende Begriffe und Konstruktionen werden eingeführt:

- die Garbe der algebraischen Differentialoperatoren auf einer glatten Varietät, und deren lokales affines Bild, die Weyl Algebra; Deren Strukturen und Filtrierungen.
- die Kategorie der Moduln dieser Garbe. Für spezielle (kohärente) Moduln können die charakteristische Varietät $\mathrm{ch}M$, eine geometrische Invariante $\mathrm{d}(M) := \dim \mathrm{ch}M$ und eine cohomologische Invariante $\mathrm{j}(M)$ eingeführt werden.

Theorem 1. $\mathrm{d}(M) + \mathrm{j}(M) = \dim X$.

- direktes und inverses Bild in obiger Kategorie.
- "naive" Versionen des direkten in inversen Bildes (Kashiwara's Theorem).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Holonomic $\mathcal{D}$-modules

Dragan Miličić, Salt Lake City

In this talk we recalled the main results from the theory of holonomic $\mathcal{D}$-modules. In particular, we proved that holonomic modules are of finite length and that they are preserved under standard operations (direct and inverse images, duality). At the end, we classified all irreducible holonomic modules.

Riemann-Hilbert-Korrespondenz und perverse Garben

Hartmut Maennel, Eichstätt

Die Riemann-Hilbert-Korrespondenz stellt eine Beziehung her zwischen $\mathcal{D}_X$-Moduln und algebraisch konstruktiblen Garben auf X. Sie wird gegeben durch den De Rham Funktor $DR : D^b_{rh}(\mathcal{D}_X\text{-Mod}) \to D^b_{ac}(Sh(X))$, der eine Äquivalenz dieser Kategorien ist. (rh steht für holonome Kohomologiemoduln mit regulären Singularitäten.) Das Bild der Komplexe $M^\bullet \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_X\text{-Mod})$ mit $\mathcal{H}^i(M^\bullet) = 0$ für $i \neq 0$ ist eine Unterkategorie $\mathcal{P} \subset D^b_{ac}(Sh(X))$, die Kategorie der perversen Garben. Das Bild des $\mathcal{D}_X$-Moduls $\mathcal{L}(X_{reg}, \mathcal{O}_{X_{reg}})$ nennt man den Schnittkomplex $\underline{\mathcal{IC}}_X$ von X. Die Schnittkohomologie $IH^i(X, \mathbb{C}) := H^{n-1}(p_* \underline{\mathcal{IC}}_X)$ für $p : X \to$ Punkt stimmt für glatte X mit $H^i(X, \mathbb{C})$ überein, erfüllt aber im Gegensatz zu dieser auch für singuläre X die Poincaré-Dualität. Der Dekompositionssatz besagt, daß für einen eigentlichen Morphismus $f : X \to Y$ und eine irreduzible perverse Garbe $F^\bullet$ auf X von geometrischem Ursprung $f_* F^\bullet$ zerfällt in eine direkte Summe von irreduziblen Bestandteilen der Form $\underline{\mathcal{IC}}_Z(\mathcal{S})[\nu]$ mit $Z \hookrightarrow Y$ abgeschlossen, $\mathcal{S}$ ein lokales System auf Z_{reg} und $\nu \in \mathbb{Z}$.

Localization of modules

Steen Ryom-Hansen, Freiburg

We introduce for a variety $(X, \mathcal{O}_X)$ the rings of twisted differential operators. If $\mathcal{D}$ is so, we denote by $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ the category of $\mathcal{D}$-modules that are quasicoherent as $\mathcal{O}_X$-modules. Then X is called $\mathcal{D}$-affine when for all $\mathcal{F} \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ we have $H^i(\mathcal{F}) = 0$ for $i > 0$ and $\mathcal{F}$ is generated by global sections. It is shown that when X is $\mathcal{D}$-affine, $\Gamma(X, \ )$ defines an equivalence of $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ with the modules of $U = \Gamma(\mathcal{D})$, the inverse functor being localization: $M \to \mathcal{D} \otimes_U M$. We now consider the flag variety $X = G/B$ and let $\mathcal{D}_\lambda$ denote the twisted ring of differential operators associated with the weight λ. Then the theorem of Beilinson-Bernstein is proved — that for λ regular and dominant X is $\mathcal{D}_\lambda$-affine.

Harish-Chandra sheaves.
Guido Kings, Münster

Let $\mathfrak{g}$ be a semisimple Lie algebra $\varphi : K \to \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, K algebraic group such that $d\varphi$ injevtive. We introduce the category of K-equivariant $\mathcal{D}_\lambda$-modules $M_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_\lambda, K)$ and show that all these modules are holonomic. This leads to a classification of all modules in $\mathcal{M}_{\mathrm{coh}}(K_\lambda, D)$ in terms of standard objects attached to Q, τ, where Q is a K-orbit and τ is a K-equivariant irreducible connection on Q. We apply this to $K = N$, $N = \mathrm{Rad}B$, $B \subset G$ a Borel, which leads to the standard modules in category $\mathcal{O}$.

Beilinson-Bernstein versus Langlands Klassifikation
Ulrich Bunke, Berlin

Seien $\mathfrak{g}, K, G/B = X, \theta$ usw. wie in den vorhergehenden Vorträgen. Es wurde die Klassifikation der K-orbits in der Flaggenmannigfaltigkeit X beschrieben. Die Beschreibung der invarianten Zusammenhänge auf den K-orbits führt dann zur Beilinson-Bernstein-Klassifikation der irreduziblen Harish-Chandra Moduln von $(\mathfrak{g}, K)$ für regulären Charakter. Für singulären infinitesimalen Charakter wurden die Bedingungen, unter welchen die globalen Schnitte der irreduziblen Untermoduln der Standardmoduln verschwinden, angegeben. Um einen Zusammenhang mit der Langlands-Klassifikation herzustellen, wurden Bedingungen für Temperiertheit und quadratische Integralität diskutiert. Die möglichen Effekte wurden am Beispiel $SL(2, \mathbb{R})$ demonstriert.

Kazhdan-Lusztig-Vermutung
Ulrich Everling, Eichstätt

Zu einer halbeinfachen zusammenhängenden Gruppe G über $\mathbb{C}$ gehören einerseits die Fahnenmannigfaltigkeit X mit den durch die Bruhat-Zerlegung gegebenen Schubert-Varietäten; andererseits die Verma-Moduln der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und deren irreduzible Quotienten, insbesondere die mit trivialem zentralem Charakter; und drittens die Weyl-Gruppe mit ihrer Coxeter-Präsentation. Für die letztere definierten Kazhdan und Lusztig (1979) anhand der Hecke-Algebra gewisse Polynome und vermuteten, daß diese Polynome die Vielfachheit der Jordan-Hölder-Reihen der Verma-Moduln berechnen. Die Koeffizienten der Polynome sind zugleich Dimensionen von Halmen der Schnittkohomologiegarben der Schubert-Varietäten. Die Vermutung wurde 1981 sowohl von Brylinski und Kashiwara als auch von Beilinson und Bernstein bewiesen. Dabei spielt die Äquivalenz einer Kategorie von $\mathcal{D}_X$-Modulen und einer von $\mathfrak{g}$-Moduln (Lokalisierung) eine Hauptrolle. Der Vortrag enthält eine genaue Formulierung der Vermutungen und bescheidene Andeutungen zum Beweis.

Beweis der Jantzen-Vermutung

Anton Deitmar, Heidelberg

Die Jantzen-Vermutung besagt, daß die Jantzen-Filtrierung bei geschachtelten Verma-Moduln erblich ist bis auf eine Indexverschiebung. Der Beweis läuft so, daß gezeigt wird, daß die Jantzen-Filtrierung mit der Gewichtsfiltrierung übereinstimmt. Hierzu wird die Jantzen-Filtrierung in der gelifteten Lokalisierung mit der Monodromiefiltrierung des benachbarte-Zykel-Funktors identifiziert. Diese ist kompatibel zum Vergleichsmorphismus auf den étalen Situs, wo man die Gleichheit der Monodromiefiltrierung mit der Gewichtsfiltrierung sieht. Aus der Theorie der Gewichtsfiltrierung folgt dann, daß die Jantzen-Filtrierung mit der Sockel-Filtrierung übereinstimmt.

Der Selbstdualitätssatz von Soergel und sein Beweis

Joachim Kucera, Karlsruhe

Der Selbstdualitätssatz von Soergel besagt, daß eine Isomorphie

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_0}(P) \cong \mathrm{Ext}(L, L)$$

besteht, wobei L die direkte Summe der einfachen Objekte der Kategorie $\mathcal{O}_0$ und P die direkte Summe der projektiven Becken zu einfachen Objekten in $\mathcal{O}_0$ ist. Der Beweis dieses Satzes wurde umrissen; insbesondere wurde der Zusammenhang dieses Satzes mit der Kazhdan-Lusztig-Vermutung dargestellt.

Koszul-Dualität in $\mathcal{O}$

Bernhard Köck, Karlsruhe

Koszul-Ringe sind positiv graduierte Ringe, die graduiert halbeinfach sind. Äquivalent dazu ist, daß deren Koszul-Komplex exakt ist. Es wurde gezeigt, daß jeder Block der Kategorie $\mathcal{O}$ als Kategorie von Moduln über einen Koszulring aufgefaßt werden kann. Mit Hilfe der damit verfügbaren Koszul-Dualität in der Kategorie $\mathcal{O}$ wurden mehrere darstellungstheoretische Interpretationen der Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome hergeleitet.

Vogan's character duality

Wolfgang Soergel, Freiburg

I try to explain Vogan's character duality generalizing the inversion formulas for Kazhdan-Lusztig-polynomials to representations of real groups, more precisely the form given to this duality in the recent book by Adams-Barbasch-Vogan. I speculate how the Koszul duality phenomena for category $\mathcal{O}$, i. e. complex groups, should generalize to the real groups case.

Vogans Dualtitätsvermutung: p-adisch

Christian Kaiser, Bonn

Vogans Dualitätsvermutung in p-adischem Fall: Vogan definiert einen infinitesimalen Charakter für L-Packete und betrachtet den Raum aller Langlandsparameter zu einem festen infinitesimalen Charakter. Die Geometrie dieses Raumes soll á la Kazhdan-Lusztig folgende Problem lösen:

1. Wie können die Darstellungen eines L-Packets parametrisiert werden
2. Wie zerlegen sich Standarddarstellungen in irreduzible
3. Welche Darstellungen bilden ein Arthur-Packet.

Als Beispiel wurden $G = T$ Torus und die unitären Hauptserien in quasisplit-Gruppen betrachtet.

Berichterstatter:
Wolfgang Soergel, Freiburg

Tagungsteilnehmer

Dörthe Baeumer
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

53225 Bonn

Eduard Depner
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

68159 Mannheim

Prof.Dr. Rolf Berndt
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstr. 55

20146 Hamburg

Dr. Ulrich Everling
Mathematisch-Geographische Fakultät
Universität Eichstätt

85071 Eichstätt

Prof.Dr. Siegfried Böcherer
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim

68131 Mannheim

Dirk Feldhusen
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 6

53115 Bonn

Prof.Dr. Ulrich Bunke
Institut für Reine Mathematik
Humboldt-Universität Berlin

10099 Berlin

Dan Fulea
Oppauer Str. 37

68305 Mannheim

Dr. Anton Deitmar
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288

69120 Heidelberg

Prof.Dr. Frank Herrlich
Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe
Englerstr. 2

76131 Karlsruhe

Christian Kaiser
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 4

53115 Bonn

Dr. Stefan Kühnlein
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Gebäude 25.22
Universitätsstraße 1

40225 Düsseldorf

Guido Kings
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Dr. Hartmut Maennel
Mathematisch-Geographische Fakultät
Universität Eichstätt

85071 Eichstätt

Markus Kleinfeld
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Prof.Dr. Dragan Milicic
Dept. of Mathematics
University of Utah

Salt Lake City , UT 84112
USA

Dr. Bernhard Köck
Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe

76128 Karlsruhe

Claus Mokler
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstr. 55

20146 Hamburg

Joachim Kucera
Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe

76128 Karlsruhe

Dr. Boudewijn Moonen
Institut für Photogrammetrie
Universität Bonn
Nussallee 15

53115 Bonn

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Juan Morales-Pizarro
Krefelderstr. 37

50670 Köln

Ralf Schmidt
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstr. 55

20146 Hamburg

Prof.Dr. Karl-Hermann Neeb
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

91054 Erlangen

Michael Schröder
Fakultät für Mathematik und
Informatik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

68159 Mannheim

Martin Olbrich
Institut für Reine Mathematik
Humboldt-Universität Berlin
Ziegelstraße 13a

10117 Berlin

Dr. Rainer Schulze-Pillot
Mathematisches Institut
Universität zu Köln
Weyertal 86-90

50931 Köln

Lorenzo Ramero
FB Mathematik und Informatik - FB 6
- Dekanat -
GHS Essen

45117 Essen

Dr. Wolfgang K. Seiler
Lehrstuhl für Mathematik VI
Fak. für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim

68131 Mannheim

Dr. Steen Ryom-Hansen
Mathematisches Institut
Universität Freiburg
Albertstr. 23b

79104 Freiburg

Prof.Dr. Wolfgang Soergel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg
Albertstr. 23b

79104 Freiburg

Bernd Steinert
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 6

53115 Bonn

Jörg Wildeshaus
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Uwe Weselmann
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Wegelerstr. 10

53115 Bonn

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

E-Mail Addresses

Bäumer, Doerthe	doerthe@mpim-bonn.mpg.de
Berndt, Rolf	berndt@math.uni-hamburg.de
Böcherer, Siegfried	boech@siegel.math.uni-mannheim.de
Bunke, Ulrich	ubunke@mathematik.hu-berlin.de
Deninger, Christoph	deninger@GOEDEL.UNI-MUENSTER.DE
Deitmar, Anton	anton@mathi.uni-heidelberg.de
Depner, Eduard	depner@euklid.math.uni-mannheim.de
Everling, Ulrich	ulrich.everling@ku-eichstaett.de
Fulea, Dan	fulea@gauss.math.uni-mannheim.de
Kaiser, Christian	ck@rhein.iam.uni-bonn.de
Kings, Guido	kings@GOEDEL.UNI-MUENSTER.DE
Köck, Bernhard	bk@ma2s2.mathematik.uni-karlsruhe.de
Kühnlein, Stefan	stefan@math.uni-duesseldorf.de
Milicic, Dragan	milicic@math.utah.edu
Mokler, Claus	bruechert@math.uni-hamburg.de
Moonen, Boudewihn	bodo@ipb.uni-bonn.de
Neeb, Karl-Hermann	neeb@mi.uni-erlangen.de
Olbrich, Martin	olbrich@mathematik.hu-berlin.de
Ramero. Lorenzo	mat950@aixrs1.hrz.uni-essen.de
Rohlfs, Jürgen	rohlfs@ku-eichstaett.d400.de
Ryom-Hansen, Steen	ryom@sun1.mathematik.uni-freiburg.de
Schröder, Michael	schroeder@math.uni-mannheim.de
Schulze-Pillot, Rainer	schupi@mi.uni-koeln.de
Seiler, Wolfgang	seiler@math.uni-mannheim.de
Soergel, Wolfgang	soergel@sun1.mathematik.uni-freiburg.de
Steinert, Bernd	UNM42F@IBM.rhrz.uni-bonn.de