Tagungsbericht 13/1996

AG: Nichtkommutative Geometrie

31.03. - 6.04.1996

Die Tagung fand unter der Leitung von J.Cuntz (Heidelberg), J.-B. Bost (Suresnes, Frankreich) und J. Lott (Bonn) statt. Im Mittelpunkt des Interesses stand das Kennenlernen grundlegender Methoden und Fragestellungen des Gebiets der nichtkommutativen Geometrie.

Die nichtkommutative Geometrie ist eine neue mathematische Disziplin und ein Brennpunkt aktueller mathematischer Forschung. Sie basiert auf einer Erweiterung der klassischen globalen Methoden der Differentialgeometrie (Differentialformen, Vektorraumbündel, charakteristische Klassen, K-Theorie usw.) auf nicht kommutierende Variablen (wie sie etwa in der Quantenmechanik aber auch in vielen Anwendungen innerhalb der Mathematik vorkommen). "Nichtkommutierende Variablen" werden dabei als Elemente von gewissen nichtkommutativen Algebren (typischerweise C*-Algebren oder geeignete Unteralgebren von C*-Algebren) verstanden. Diese Algebren werden dann in Analogie zu Algebren von stetigen Funktionen auf topologischen Räumen oder von differenzierbaren Funktionen auf Mannigfaltigkeiten behandelt. Natürlich können aber auch, im Sinn einer "nichtkommutativen algebraischen Geometrie", allgemeinere nichtkommutative Ringe oder Algebren betrachtet werden. Die Grundidee der nichtkommutativen Geometrie ist, wie in der algebraischen Geometrie, die Ersetzung eines Raumes durch eine Algebra, bei der aber zugelassen wird, daß sie nichtkommutativ sein kann. Für solche Algebren kann topologische (und algebraische) K-Theorie und eine Homologie/Kohomologie-Theorie vom de Rham Typ (zyklische Kohomologie) entwickelt werden. In der nichtkommutativen Geometrie im Sinn von Connes wird weiter die " Geometrie ", d.h. die differentialgeometrische und die metrische Struktur, eines solchen nichtkommutativen Raumes durch einen " Fredholmmodul" über der gegebenen Algebra bestimmt. Der Fredholmmodul, der die Geometrie einer Riemannschen (Spin-) Mannigfaltigkeit M bestimmt, entspricht hierbei dem Diracoperator, der einen Fredholmmodul über der Algebra der glatten Funktionen auf M definiert. Die in der nichtkommutativen Geometrie entwickelten Methoden stellen eine wesentliche Bereicherung des Arsenals der Mathematik zur Behandlung einer großen Anzahl von Fragestellungen sowohl in der Mathematik (Blätterungen, topologische dynamische Systeme, Indexsätze und ihre Konsequenzen, Novikov-vermutung, Knotentheorie, harmonische Analyse usw.) als auch in der mathematischen Physik (Quantenfeldtheorie, Quanten-Hall-Effekt, Standardmodell, usw.) dar.

Vortragsauszüge:

Stefan Kühnlein

1. K-Theorie

Der K^o- Funktor in der topologischen K-Theorie wird eingeführt, das Serre-Swan-Theorem dient dann dazu, K_o für C*-Algebren zu definieren. K_n wird motiviert und die Bottperiodizität für C*-Algebren bewiesen. Die Pimsner-Voiculescu-Sequenz wird eingeführt. Dann werden K_o und K_1 für eine Reihe von C*-Algebren berechnet.

Michael Spieß

2. Dirac-Operatoren

Zunächst wurden Spin-Strukturen auf Vektorbündeln über Mannigfaltigkeiten eingeführt und gezeigt, daß sie genau dann auf dem Vektorbündel E existieren, wenn die 2. Stiefel-Whitney-Klasse von E verschwindet. Dann wurde für Vektorbündel mit $C\ell(X)$- Modul-Struktur und gegebenen Zusammenhang der Dirac-Operator D auf den C^∞-Schnitten des Bündels definiert. D ist ein elliptischer selbstadjungierter Differentialoperator 1. Ordnung. Schließlich wurde für verallgemeinerte Laplace-Operatoren Δ auf kompakten Mannigfaltigkeiten die Weyl'sche Asymptotische Formel vorgestellt.

Jens Franke

3. Fredholmmoduln und K-Zykel

Motiviert durch ein Problem und eine Konstruktion aus der Theorie der elliptischen Pseudodifferentialoperatoren wurden Prä-Fredholmmoduln und Fredholmmoduln eingeführt. Es wurde gezeigt, daß beide Klassen von Moduln zur selben K-Homologie führen. Außerdem wurden noch K-Zyklen (d. h., unbeschränkte Fredholmmoduln) eingeführt und der auf Baaj und Julg zurückgehende Zusammenhang zwischen diesen und den gewöhnlichen Fredholmmoduln vorgestellt. Für K-Zyklen und Fredholmmoduln wurde der Begriff der p-Summierbarkeit eingeführt.

Alexander Schmidt

4. Fredholmmoduln und K-Homologie

In Verallgemeinerung von topologischer K-Homologie von CW-Komplexen wird die K-Homologie nicht notwendig kommutativer C*-Algebren eingeführt und zwar als Fredholmmoduln modulo Homotopie. Die Homotopie wird über eine stetige Familie von Hilberträumen, sogenannten Hilbertmoduln, eingeführt. Eine Indexpaarung wird definiert. In Verallgemeinerung werden stetige Familien von Fredholmmoduln betrachtet, was zur Definition der bivarianten K-Theorie von Kasparov führt.

Vincent Lafforgue

5. Bivariant K-Theory

We defined KK-Theory for $\mathbb{Z}/2$ graded C*-algebras, then we discussed the following classical example: Let $F \in KK(C(A), C(B))$ (with $A \longrightarrow B$ some fibration of C^∞-compact manifolds) be some continuous family (parametrized by B) of elliptic pseudodifferential operators of order 0 on some vector bundle, and $G \in KK(C(B), \mathbb{C})$ be an order 0 elliptic pseudodifferential operator on B. In order to get some element in $KK(C(A), \mathbb{C})$, you must consider $\tilde{G}$ some " connection " of G, and set $H = M^{1/2}(F \otimes 1) + N^{1/2}\tilde{G}$, where M and N are some truncations at the level of symbols. If F and G are associated to order 1 differential operators D and D', you may take H to be associated to the order 1 elliptic differential operator on A : $(D \otimes 1 + D')$, but this corresponds to another kind of truncation which involves a choice of horizontal subspaces, and therefore doesn't suit to the general case (but it works for instance for the external product). Then we stated Kasparov's product theorem, and gave two features of the proof. This theorem asserts that there exists a product $KK(A,B) \times KK(B,C) \longrightarrow KK(A,C)$ which is associative and generalizes classical operations, as the pairing between K-theory and K-homology.

Christian Kaiser

6. Poincaré-Dualität und Anwendung

Es wurde der Beweis der folgenden Dualität skizziert: M kompakte glatte Manigfaltigkeit, dann existiert ein Isomorphismus: $K_*(M) \xrightarrow{\cong} K^*(T^*M)$. Die Beweisstrategie ist folgendermaßen : Man konstruiert das Inverse des

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

obigen Isomorphismus allgemeiner: $K^*(T^*M \times N) \xrightarrow{\Psi^*} KK(C(M), C(N))$, für N lokalkompakt, indem man Elemente der K-Theorie durch Clifford-symbole repräsentiert und diesen eine Familie von Pseudodifferentialoperatoren zuordnet. Die Abbildung Ψ^* führt zur Definition des Gysinmorphismus $f! \in KK(C(M), C(N))$ für K-orientierte $f : M \longrightarrow N$, bzw. allgemeiner für Korrespondenzen $[\ M \xleftarrow{f_1} Z \xrightarrow{f_2} N], f_1$ proper, f_2 K-orientiert. Entscheidend ist, daß dies funktoriell ist, bezüglich Verknüpfung einerseits, und Kasparov-Produkt andrerseits. Als rein formale Konsequenz erhält man :
a)Die obige Dualität.
b)Den Thom-Isomorphismus für K-orientierte Mannigfaltigkeiten.
c)Den Atiyah-Singer-Indexsatz.

Erasmus Landvogt

7. Einführung in die zyklische (Ko)Homologie

In der nichtkommutativen Geometrie übernehmen die Hochschild Homologie und die zyklische Homologie die Rolle der Differentialmoduln und der de Rham-Kohomologie. In diesem Vortrag wurde für einen kommutativen Ring k und eine nicht notwendig unitale k-Algebra A die Hochschild Homologie $HH_*(A)$ als Homologie des Komplexes

$$\tilde{A} \xleftarrow{b} \tilde{A} \otimes A \xleftarrow{b} \dots \xleftarrow{b} \tilde{A} \otimes A^{\otimes(n-1)} \xleftarrow{b} \tilde{A} \otimes A^{\otimes n} \xleftarrow{b} \dots$$

und Hochschild Kohomologie als Kohomologie von

$$Hom(k, \tilde{A}^*) \xrightarrow{b^*} Hom(A, \tilde{A}^*) \xrightarrow{b^*} Hom(A^{\otimes 2}, \tilde{A}) \xrightarrow{b^*} \dots$$

Außerdem werden drei Definitionen der zyklischen Homologie HC_* gegeben:
a) Als Homologie des Totalkomplexes des zyklischen Doppelkomplexes $CC_{**}(A)$,
b) als Homologie des Connes-Komplexes $C_\lambda(A)$ und
c) als Homologie des Totalkomplexes des B-b-Komplexes $\mathcal{B}(A)$.

Auf dualer Weise erfolgen die Definitionen im kohomologischen Fall. Ist $\mathbb{Q} \subset k$ so liefern a) und b) die gleiche (Ko)Homologie. Ist A unital, so liefern a) und c) die gleiche (Ko)Homologie. Schließlich wird die SBI-Sequenz, die einen Zusammenhang zwischen Hochschild- und zyklischer Homologie herstellt, vorgestellt:

$$\dots \xrightarrow{\mathrm{B}} HH_n(A) \xrightarrow{\mathrm{I}} HC_n(A) \xrightarrow{\mathrm{S}} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{\mathrm{B}} HH_{n-1}(A) \xrightarrow{\mathrm{I}} \dots$$

Thomas Schick

8. Zyklische (Ko)Homologie und de Rham Theorie

Für Fréchet-Algebren wird HH^*_{top} und HC^*_{top} eingeführt.

Satz: Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

$$HH^n_{top}(C^\infty(M)) \cong (\Omega^n(M))' = \mathcal{D}_n(M) = \text{De Rham currents}$$
$$HC^n_{top}(C^\infty(M)) \cong Ker\ d'_n \oplus H^{dR}_{(n-2)}(M) \oplus H^{dR}_{(n-4)}(M) \oplus \dots$$

wo $Ker\ d'_n \subset \mathcal{D}_n(M)$
Danach betrachten wir eine kommutative Algebra A mit Eins. Wir führen Differentialformen Ω^*_A und de Rham-Kohomologie $\mathrm{H}^*_{dR}(\mathrm{A})$ ein.

Satz: Sei A formal glatte kommutative k-Algebra mit 1, $\mathbb{Q} \subset$k. Dann gilt:

$HH_n(A) \cong \Omega^n_A$ (Isomorphismus von k-Vektorräumen)

$HC_n(A) \cong \Omega^n/d\Omega^{n-1} \oplus H^{(n-2)}_{dR}(A) \oplus H^{(n-4)}_{dR}(A) \oplus \dots$

Bernhard Köck

9. Indexformel

Es wurde eine Formel für die in Vortrag 4 eingeführte Indexpaarung:

$$K^*(A) \times K_*(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

zwischen der K-Homologie und der gewöhnlichen algebraischen K-Theorie $K_*(A)$ einer Algebra über $\mathbb{C}$ entwickelt und bewiesen. Hierzu wurde der Chern-Charakter $ch^*(H,F)$ eines endlich summierbaren Fredholmmoduls (H,F) als Element der zyklischen Kohomologie $HC^*(A)$ und der Chern-Charakter $ch_*(e)$ einer idempotenten Matrix $e \in \mathcal{M}_r(A)$ als Element der zyklischen Homologie $HC_*(A)$ konstruiert. Dabei ist $ch^*(H,F)$ als ein Ersatz für die gewöhnliche Integration von Differentialformen anzusehen, und $ch_*(e)$ ist eine Liftung des klassischen Chern-Charakters von der de Rham-Kohomologie in die zyklische Homologie. Die Indexformel besagt nun, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
K^*(A) \times K_*(A) \arrow[r, "\text{Indexpaarung}"] \arrow[d, "ch^* \times ch_*"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\text{kan}"] \\
HC^*(A) \times HC_*(A) \arrow[r, "\text{Kronecker-Paarung}"] & k
\end{tikzcd}$$

Bernhard Keller

10. Ausschneidung in der zyklischen (Ko)Homologie

Ziel des Vortrags ist der folgende Ausschneidungssatz von Cuntz-Quillen in der periodischen zyklischen Kohomologie HP^*:
Ist $0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ eine Erweiterung von (nicht notwendigerweise unitalen) Algebren über einen Körper der Charakteristik 0, so gibt es eine natürliche exakte 6-Term Folge

$$\begin{array}{ccccc} HP^*(J) & \longleftarrow & HP^*(A) & \longleftarrow & HP^*(B) \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ HP^{*+1}(B) & \longrightarrow & HP^{*+1}(A) & \longrightarrow & HP^{*+1}(J) \end{array}$$

Im Beweis folgen wir der historischen Entwicklung: wir beginnen mit Wodzickis Ausschneidungssatz in der zyklischen Homologie, den wir nach der Methode von Guccione-Guccione beweisen. Als nächstes zeigen wir den Satz in der periodischen Theorie unter der zusätzlichen Annahme, daß J approximativ H-unital ist (nach Cuntz-Quillen). Unter der Benutzung der Tatsache, daß jedes Ideal einer Tensoralgebra approximativ H-unital ist, leiten wir daraus den allgemeinen Fall her (nach Cuntz-Quillen).

Uwe Jannsen

11. Bivariante periodische zyklische Kohomologie

Der aus der Algebra $\Omega^* A$ der nichtkommutativen Differentiale erhaltene de Rham -(Super)-Komplex

$$X(A) \quad : \quad A \underset{\bar{b}}{\overset{\natural d}{\rightleftarrows}} \Omega^1 A_\natural$$

berechnet die periodische zyklische Homologie für sogenannte quasifreie Algebren, die durch eine Lifteigenschaft charakterisiert werden. Für beliebiges A ist

$$HP_*(A) = H_*(\varprojlim_n X(TA/(JA)^n)) \cong H_*(\varprojlim_n X(P/S^n)) \ ,$$

wobei $0 \longrightarrow JA \longrightarrow TA \longrightarrow A \longrightarrow 0$ die kanonische Darstellung durch die (nicht unitale) Tensoralgebra TA ist, bzw. $0 \longrightarrow S \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ eine beliebige Darstellung von A durch eine quasifreie Algebra P . Die bivariante Theorie wird definiert durch

$$HP^*(A,B) = H_*(Hom_{Pro-V}(X(TA/(JA)^\infty), X(TB/(JB)^\infty))$$

wobei $X(TA/(JA)^\infty)$ der Pro-(Super)Komplex $X(TA/(JA)^n))_{n\in \mathbb{N}}$ ist und Homomorphismen von Pro-Vektorräumen genommen werden. Es ist

$HP^*(k,B) = HP_*(B)$ und $HP^*(A,k) = HP^*(A)$ für den Grundkörper k, und durch konsequente Betrachtung von Pro-Objekten (auch Pro-Algebren, usw.) zeigt man die guten Eigenschaften der Theorie: Ausschneidung in beiden Variablen, Homotopieinvarianz und Moritainvarianz. Ein Algebrenhomomorphismus $\phi : A \longrightarrow B$ induziert eine Chernklasse $ch(\phi) \in HP^o(A,B)$, und die Transformationen $\phi_* : HP^*(-,A) \longrightarrow HP^*(-,B)$ und $\phi^* : HP^*(A,-) \longrightarrow HP^*(B,-)$ hängen nur von $ch(\phi)$ ab. Der Satz von Goodwillie läßt sich dazu verschärfen, daß für ein Ideal $K \subset A$ und $r \in \mathbb{N}$, $ch(\pi) \in HP^o(A/K^r, A/K)$ ein Inverses besitzt für $\pi : A/K^r \longrightarrow A/K$ die kanonische Projektion .

Carl-Friedrich Bödigheimer

12. Bivarianter Chern-Charakter

Für zwei separable C*-Algebren A, B wurde der bivariante Chern-Charakter

$$Ch : KK_*(A,B) \longrightarrow HP^*(A,B)$$

von einer algebraischen Version der KK-Theorie in die bivariante periodische zyklische Kohomologie definiert. Dazu wurde die KK-Theorie (nach Cuntz) beschrieben als: $KK_o(A,B) = [qA, \mathcal{M}_\infty(B)]$, die (differenzierbaren) Homotopieklassen von Homomorphismen $qA \longrightarrow \mathcal{M}_\infty(B)$, den unendlichen Matrizen über B. Dabei ist $QA = A * A$ das freie Produkt, beschrieben als Vervollständigung der universellen Algebra erzeugt von linearen Symbolen x und qx ($x \in A$), mit der Relation

$$q(x \cdot y) = x \cdot qy + qx \cdot y - qx \cdot qy$$

und qA ist das von den Symbolen qx erzeugte Ideal in QA. Man zeigt nun, daß qA stabil äquivalent zu $q^2A = q(qA)$ ist und kann deshalb einfach das Kasparov-Produkt

$$\# : KK_o(A,B) \times KK_o(B,C) \longrightarrow KK_o(A,C)$$

durch Komposition definieren; es ist bilinear und assoziativ. Da nun $HP^o(A,B) = H_o(Hom(X(TA/(JA)^\infty), X(TB/(JB)^\infty))$ ist, liefert ein Homomorphismus $\phi : qA \longrightarrow \mathcal{M}_\infty(B)$ zunächst ein Element $ch(\phi)$ in $HP^o(qA, \mathcal{M}_\infty(B))$. Dieses Element wird noch mit gewissen invertierbaren Elementen in $HP^o(A, qA)$ und $HP^o(\mathcal{M}_\infty(B), B)$ von links, bzw. rechts multipliziert, wodurch man das Element $Ch(\phi) \in HP^o(A,B)$ erhält. Offenbar ist Ch multiplikativ. Für $KK_1(A,B) \longrightarrow HP^1(A,B)$ geht man analog vor.

Elmar Schrohe

13. Dixmier-Spur und nichtkommutatives Residuum

Vorgestellt wurde zunächst die Konstruktion von Spuren auf dem Ideal $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ aller kompakten Operatoren, deren singuläre Werte die Relation

$$\sup_N \left(\frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n\right) < \infty$$

erfüllen. Man erhält die Familie $\{Tr_\omega\}$ von Spuren auf $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$, parametrisiert durch eine Familie von Funktionalen auf $C_b(1,\infty)$, angedeutet durch den Index ω . Der zweite Punkt war das nichtkommutative Residuum, das 1984 von Wodzicki (und unabhängig von Guillermin) entdeckt wurde. Es ist die einzige Spur (bis auf skalare Vielfache) auf der Algebra aller klassischen Pseudodifferentialoperatoren auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M. Nun ist leicht zu sehen, daß Pseudodifferentialoperatoren der Ordnung n auf einem Vektorbündel E über M, Elemente in $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ (für den Hilbertraum L^2(M;E)) liefern, auf diesem Raum sind also beide Spuren definiert. Wie Connes 1988 zeigte, stimmen diese überein. Der Beweis dieses Satzes wurde angedeutet.

Anton Deitmar

14. Das " Wörterbuch " von Connes

Will die nichtkommutative Geometrie eine Erweiterung der klassischen kommutativen Geometrie sein, muß sie zunächst alle Begriffe der klassischen Geometrie abbilden. Man muß also topologische Räume, Mannigfaltigkeiten, Riemannsche Metriken, Volumenformen, Hausdorffmaße, usw. mit nichtkommutativen Mitteln darstellen können. Diese Übertragung klassischer in nichtkommutative Begriffe findet im Wörterbuch statt. Topologische Räume etwa, zumindest die lokalkompakten, werden durch C-*Algebren dargestellt. Komplexe Variablen durch Operatoren auf Hilberträumen, Einsetzen derselben in holomorphe Funktionen wird übersetzt in den holomorphen Funktionalkalkül. Glatte Mannigfaltigkeiten entsprechen dichten Unteralgebren, die abgeschlossen unter glattem Funktionalkalkül sind. Die wichtigsten Begriffe der Differentiation und Integration gehen über in Kommutatoren mit Phasenoperatoren und Spurfunktionale. Differenzierbarkeit einer Funktion entspricht der Frage, in welchem Operatorideal der Kommutator mit F liegt. In speziellen Fällen wie den stetigen Funktionen auf der Kreislinie findet man klassische Integrale wie das Wegintegral der komplexen Analysis oder Hausdorffmaße auf Jordankurven durch Spezialisierung wieder.

John Lott

15. The Standard Model in Noncommutative Geometry

I talked about joint work with Alain Connes which formulates the standard model of particle physics in the language of noncommutative geometry. I first wrote the Lagrangian of the standard model, as a classical field theory on Minkowski space. Then I described the finite-point space F such that the Yang-Mills action on $\mathbb{R}^4 \times F$ reproduces the Lagrangian of the standard model. Finally, I discussed how to define and compute the Yang-Mills action in noncommutative geometry, using a complex of differential forms which is adapted to the Fredholm module.

Jürgen Eichhorn

16. Die Novikovvermutung und ihre geometrische Motivation

Es wurden die Grundlagen der Surgery-Theorie vorgestellt: Poincarékomplexe, Spivacbündel, normale Abbildungen und Bordismen, Wallgruppen, algebraische Poincarékomplexe und Mishenkos symmetrische Signatur. Sodann die Novikovvermutung, d.h. die Homotopieinvarianz von

$$\langle L(M) f^* a, |M| \rangle,$$

$f : M \longrightarrow B_\pi, a \in H^*(B_\pi; \mathbb{Q})$.

Schließlich wurde der 1. Mishenkosche Beweis für die Richtigkeit im Fall B_π geschlossene Mannigfaltigkeit mit $K \leq 0$ skizziert.

Boris Vaillant

17. Beweis der Novikovvermutung nach Connes-Moskovici

Der Signaturoperator $\tilde{D}$ auf $L^2(\Lambda T^* \tilde{M})$ ist invertierbar modulo der Algebra der (um die diagonale konzentrierten) Glättungsoperatoren $C_c^\infty(\tilde{M} \times_\Gamma \tilde{M}, \Lambda T^* \tilde{M} \# (\Lambda T^* \tilde{M})^*) =: J$. Die Paarung seines K-theoretischen Index $ind_\Gamma \tilde{D} \in K_o(J) \longrightarrow K_o(\mathbb{C}\Gamma \otimes \mathcal{R})$ mit einem Gruppenkozykel c via der Abbildung $\bar{c} : H^n(\Gamma) \longrightarrow H^n_\lambda(\mathbb{C}\Gamma) \xrightarrow{\#T_r} H^n_\lambda(\mathbb{C}\Gamma \otimes \mathcal{R})$ kann identifiziert werden mit $\langle L(M) \cup \nu^* c, |M| \rangle$, wo $\nu : M \longrightarrow B\Gamma$ die klassifizierende Abbildung der universellen Überlagerung $\tilde{M}$ ist . Da $ind_\Gamma \tilde{D}$ unter der Abbildung $\gamma : \mathbb{C}\Gamma \otimes \mathcal{R} \longrightarrow C_r^*\Gamma \otimes \mathcal{K}$ auf die homotopieinvariante Miscenko-Signatur in $K_o(C_r^*\Gamma)$ abgebildet wird, bedarf es einer Methode, die Paarung

$\langle ch(ind_\Gamma \tilde{D}), \tau(c)\#tr\rangle$ über $\mathbb{C}\Gamma \otimes \mathcal{R}$ auf eine Algebra in $C_r^*\Gamma \otimes \mathcal{K}$ mit derselben K-Theorie wie $C_r^*\Gamma$ auszudehnen.

Gregor Weingart

18. Die Novikovvermutung für hyperbolische Gruppen

Hyperbolische Gruppen tragen eine Wortmetrik (zu einer endlichen Menge von Generatoren), die einem einfachen Axiom genügt. Dieses hat einige schöne Konsequenzen, so daß diese Gruppen ähnlich zu diskreten Untergruppen von Isometriegruppen 1-zusammenhängender Mannigfaltigkeiten mit $K \leq \varepsilon < 0$ sind, u.a. ist die $C_r^*\Gamma$-Norm des Faltungsoperators $\psi \mapsto x * \psi$, $x \in \mathbb{C}\Gamma$, abschätzbar mit Hilfe der Haagerup-Ungleichung.

Daneben gibt es ein Resultat von Gromov, daß jede Klasse in $H^k(\Gamma, \mathbb{C}) := H^k(B\Gamma, \mathbb{C})$, $k \geq 2$, einen beschränkten Repräsentanten c hat, $\mid c(g_o, \ldots, g_k) \mid \leq C < \infty$, $\forall g_i$. Deshalb kann man den zu c gehörenden zyklischen Kozykel τ_c auf eine Zwischenalgebra $\mathcal{B}$, $\mathbb{C}\Gamma \otimes \mathcal{R} \subset \mathcal{B} \subset C_r^*\Gamma \otimes \mathcal{K}$ ($\mathcal{R}$ Glättungs-, $\mathcal{K}$ kompakte Operatoren) fortsetzen.

Wir haben folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
L_o\mathbb{C}\Gamma \arrow[r] & K_o(C_r^*\Gamma) \cong K_o\mathcal{B} & K_o(\mathbb{C}\Gamma \otimes \mathcal{R}) \arrow[l] \\
\sigma[M,\phi] \arrow[r] & [ind_{C_r^*\Gamma} D] \cong [k] \arrow[dr, "\text{Fortsetzung von } \tau_c\#tr"'] & [ind_\Gamma D] \arrow[l] \arrow[d, "\tau_c\#tr"] \\
 & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

höhere Signatur

Daraus folgt: Da $\sigma[M,\phi]$ eine orientierte Homotopieinvariante ist, sind es auch die höheren Signaturen.

Berichterstatter : Christian Valqui

Tagungsteilnehmer

Hanno Baehr
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288

69120 Heidelberg

Eduard Depner
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

68159 Mannheim

Prof.Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 1

53115 Bonn

Prof.Dr. Askar S. Dzhumadildaev
Institute for Theoretical & Appl. Math.
Pushkin Str. 125

Almaty 48021
KAZAKHSTAN

Prof.Dr. Jean-Benoit Bost
I.H.E.S.
35, Route de Chartres

F-91440 Bures-sur-Yvette

Prof.Dr. Jürgen Eichhorn
Fachrichtungen Mathem./Informatik
Universität Greifswald
Jahnstr. 15 A

17489 Greifswald

Prof.Dr. Joachim Cuntz
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288

69120 Heidelberg

Prof.Dr. Jens Franke
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Wegelerstr. 10

53115 Bonn

Dr. Anton Deitmar
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288

69120 Heidelberg

Dan Fulea
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

68159 Mannheim

Ralf Holtkamp
Institut f. Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA
Universitätsstr. 150

44801 Bochum

Dr. Bernhard Keller
U. F. R. de Mathematiques
Case 7012
Universite de Paris VII
2, Place Jussieu

F-75251 Paris Cedex 05

Prof.Dr. Dale Husemoller
Max-Planck-Institut für
Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

53225 Bonn

Dr. Bernhard Köck
Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe

76128 Karlsruhe

Prof.Dr. Uwe Jannsen
Mathematisches Institut
Universität zu Köln
Weyertal 86-90

50931 Köln

Dr. Stefan Kühnlein
Mathematical Institute
24-29 St. Giles

GB-Oxford , OX1 3LB

Lars Kadison
Department of Mathematical Sciences
The Norwegian Institute of
Technology

N-7034 Trondheim

Dr. Vincent Lafforgue
10, rue Louis Gaudry

F-92160 Antony

Christian Kaiser
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 6

53115 Bonn

Erasmus Landvogt
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Prof.Dr. John Lott
Department of Mathematics
The University of Michigan
3220 Angell Hall

Ann Arbor , MI 48109-1003
USA

Matthias Schirle
Fachbereich Mathematik
Universität Marburg

35032 Marburg

Prof.Dr. Wolfgang Lück
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Dr. Alexander Schmidt
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288

69120 Heidelberg

Bernhard Neubüser
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288

69120 Heidelberg

Prof.Dr. Peter Schneider
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Michael Puschnigg
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288

69120 Heidelberg

Dr. Elmar Schrohe
Max-Planck Arbeitsgruppe
Part. Differentialgleichungen
und komplexe Analysis
Postfach 601553

14415 Potsdam

Thomas Schick
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Dr. Michael Spieß
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288

69120 Heidelberg

Boris Vaillant
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstr. 10

53115 Bonn

Christian Valqui
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288

69120 Heidelberg

Gregor Weingart
Math. Institut der Universität
Bonn
Beringstr. 1

53115 Bonn

Sigrid Wortmann
Mathematisches Institut
Universität zu Köln
Weyertal 86-90

50931 Köln