Tagungsbericht
14/1997

Arbeitsgemeinschaft zu einem aktuellen Thema
Die Riemannsche Zetafunktion

06.04.-12.04.1997

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

T a g u n g s b e r i c h t 14/1997

Die Riemannsche Zetafunktion
06.04. bis 12.04.1997

Diese Arbeitsgemeinschaft wurde von J. Brüdern (Stuttgart), A. Goncharov und G. Harder (Bonn) organisiert.

Seit mehr als zweihundert Jahren steht bereits die Riemannsche Zetafunktion im Interesse der Mathematik. Es war nun das Ziel dieser Arbeitsgemeinschaft die im Laufe dieser Zeit gefundenen Ansätze zu würdigen, dabei wieder ins Gedächtnis zu rufen und neuere Entwicklungen aufzuzeigen. Im Mittelpunkt stand die Riemannsche Vermutung und das Verstehen der Natur der Riemannschen Zetafunktion an ganzzahligen Argumenten.
Dabei wurden neben wahrscheinlichkeitstheoretischen Schlußweisen und Techniken aus der analytischen Zahlentheorie auch Ansätze aus der K-Theorie und motivistischen Mathematik vorgestellt. Experten aus unterschiedlichen Gebieten der Mathematik hatten sich eingefunden. Die anregenden fachlichen Gespräche führten zu einer sehr fruchtvollen und inspirierenden Atmosphäre. Die gelungene Tagung zeigte auf wie vielfältige Weise Mathematiker in der Lage sind Probleme anzupacken und zu lösen.

Am Donnerstag abend wurde traditionell das Thema für die nächste Arbeitsgemeinschaft im kommenden Herbst gewählt. Die Mehrheit der Anwesenden haben sich für das aktuelle Thema:

MIRROR SYMMETRIEN

entschieden.

Vortragsauszüge

Wulf-Dieter Geyer Von Euler zu Riemann

Berichtet wurde über Eulers Benutzung der Zetafunktion, seine verschiedenen Attacken zur Bestimmung der Zetawerte an positiven und negativen ganzen Zahlen (insbesondere verschiedene Beweise zur Berechnung von $\zeta(2)$ bis hin zu Calabis Beweis) und sein Weg zur Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ und der damit bedingten Gleichung $\zeta(1-m) = -B_m/m$. Als Hilfmittel wurden die Bernoulli - Zahlen eingeführt, die Euler vor der Beschäftigung mit $\zeta(s)$ schon bei seiner Summenformel begegnet waren; ferner wurde der Satz von v. Staudt - Clausen über die Nenner der Bernoulli - Zahlen vorgestellt.

Ulf Kühn Zetafunktionen und Funktionalgleichungen

Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ und genügt einer Funktionalgleichung. Die Lage der nichttrivialen Nullstellen und der Wert des Residuum bei $s = 1$ ist bekannt. Dies folgt aus der Poissonschen Summenformel. Verallgemeinerungen auf Dirichletsche L-Reihen und Dedekindsche Zetafunktionen wurden vorgestellt.
Die Zetafunktion für Funktionenkörper besitzt ebenfalls eine meromorphe Fortsetzung und genügt einer Funktionalgleichung. Dies folgt aus dem Satz von Riemann-Roch für Kurven. Der Beweis der dazu gehörigen Riemannschen Vermutung wurde skizziert. Dieser folgt aus dem Satz von Riemann-Roch für Flächen.

Georg Weber Explizite Formeln

Als Grundlage bereitgestellt wurde die Weilsche explizite Formel (A. Weil 1952).
Sei K algebraischer Zahlkörper von Grad $n = r_1 + 2r_2$, Diskriminante d_K; ρ bezeichne eine Nullstelle der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_K(s)$ im kritischen Streifen. Für gewisse $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ und ihre Transformierten $\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{(s-\frac{1}{2})x}\, dx$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\sum_{\rho}{}^{*}\ \Phi(\rho) - \Phi(0) - \Phi(1) &= F(0)\log\frac{|d_K|}{4^{r_2}\pi^n} + \sum_{\nu|\infty} W_\nu(F) \\ &- \sum_{\mathfrak{p}\ \text{Primideal}}\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{m/2}} \left(F(\log N\mathfrak{p}^m) + F(-\log N\mathfrak{p}^m)\right).\end{aligned}$$

Das Weilsche Funktional $W_\nu(F)$ ist nach K.Barmer gegeben durch $W_\nu(F) := \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{2F(0)}{xe^{2x}} - \frac{2e^{-\frac{1}{2}x}}{1-e^{-2x}}(F(x)+F(-x))\, dx\right)$ für reelle $\nu|\infty$, ähnlich für komplexe

$\nu|\infty$. Für $K = \mathbb{Q}$ ergibt sich daraus VON MANGOLDTs explizite Formel:

$$\frac{1}{2}(\Psi(x+0) + \Psi(x-0)) = x - \sum_{\rho}{}^{*} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1 - \frac{1}{x^2})$$

durch Spezialisieren von F. Entsprechende explizite Formeln für DIRICHLETsche L–Reihen lassen sich analog herleiten.
Bewiesen wird die WEILsche explizite Formel durch Anwenden des Residuensatzes auf $\Phi(s)\frac{\xi_K'(s)}{\xi_K(s)}$ mit $\xi_K(s) := \left(\frac{|d_K|}{4^{r_2}\pi^n}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s)$ unter Ausnutzung von $\frac{\zeta_K'}{\zeta_K} = -\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}}$. Am Rande wurde auf Diskriminantenabschätzungen eingegangen.

Stephan Kühnlein **Der Kohomologische Zugang**

Berichtet wurde über Deningers Ansatz, Dedekind–Zetafunktionen zu verstehen. Hierzu wurde ein kurzer Abriß von l–adischer Kohomologie von glatten, projektiven Kurven C über $\mathbb{F}_q$, $(l \not| q)$, gegeben. Für diese Situation wurde nach Einführung des Begriffes der regularisierten Determinante die von Deninger definierte Kohomologietheorie $H^*(C/\mathbb{L}_q) =: \mathbb{D}\left(H^*_{ét}(\overline{C}, \mathbb{Q}_l) \otimes \mathbb{C}\right)$ besprochen, wobei $\mathbb{D}$ ein Funktor von $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$–Moduln nach $\mathbb{L}_q[\theta]$-Moduln ist. Es ist $\mathbb{L}_q := \mathbb{C}[\exp(\frac{2\pi i}{\log q}\xi), \exp(-\frac{2\pi i}{\log q}\xi)]$ und $\mathbb{D}$ ein exakter Tensorfunktor.
Ausgehend von dieser Tatsache wurden dann Minimalforderungen an einen (noch zu definierenden) arithmetische Situs formuliert, die es erlauben würden, komplettierte Dedekind–Zetafunktionen als alternierende Produkte regularisierter Determinanten auf der durch den Situs definierten Kohomologie zu erhalten.
Insbesondere würde die Existenz eines Hodge–Operators auf der ersten Kohomologie die RIEMANNsche Vermutung beweisen.
Deningers Ansatz impliziert beweisbare Tatsachen, insbesondere eine Form der WEILschen expliziten Formeln, und die Tatsache, daß $\frac{s}{2\pi}\frac{1-s}{2\pi}\widehat{\zeta}_K(s)$ als regularisierte Determinante geschrieben werden kann, wenn s nicht von der Gestalt $\rho - \lambda$, $\widehat{\zeta}_K(\rho) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ist.

Hartmut Maennel **Ideen von A. Connes zur Riemannschen Vermutung**

Die Note von Connes (C.R. Acad. Sci. Paris, t.323, Series I, p. 1231-1236, 1996) besteht aus zwei Teilen:

A) Im ersten Teil zeigt Connes, daß es nützlich definierte Hilberträume $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ mit einem Operator Θ gibt, so daß

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(\Theta|_{\mathcal{H}'}) &= \left\{ it \in i\mathbb{R} \;|\zeta(\frac{1}{2}+it)=0 \right\} \\ \mathrm{Spec}(\Theta|_{\mathcal{H}}) &= \left\{ it \in i\mathbb{R} \;|L(\chi, \frac{1}{2}+it)=0 \text{ für einen Dirichlet Charakter} \chi \right\} \end{aligned}$$

Für $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 1$ definiert Connes Hilberträume $\mathcal{H}_\delta$ mit einer Operation U der Idelklassengruppe $C := J/\mathbb{Q}^*$ auf $\mathcal{H}_\delta$, so daß sich für $\phi \in C_0^\infty(C)$, $\phi(1) = 0$ als Spur der Operation ergibt:

$$\mathrm{Tr}\; U(\phi) = \Phi(0) + \Phi(1) - \sum_{\substack{\rho \in \frac{1}{2}+i\mathbb{R},\, \chi \\ L(\chi,\rho)=0}} \Phi(\rho, \chi)$$

mit $\Phi(s,\chi) := \int_C \phi(g)\overline{\chi}(g\;|g|^{-1})\;|g|^s\; d^*g$, wobei über die Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit summiert wird, sofern diese $\frac{s-1}{2}$ nicht übersteigt.

B) Im zweiten (spekulativen) Teil interpretiert Connes den Hilbertraum $\mathcal{H}_\delta$ als „$L^2_\delta(\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*)$ "und vergleicht obige Formel mit Weil's expliziter Formel, die man in der Form schreiben kann:

$$W_\infty(\phi) + \sum_{p\ prim} W_p(\phi) = \Phi(0) + \Phi(1) - \sum_{\substack{\rho \in]0,1[+i\mathbb{R},\, \chi \\ L(\chi,\rho)=0}} \Phi(\rho, \chi).$$

Die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung läßt sich damit umformulieren zu $\mathrm{Tr}\; U(\phi) = W_\infty(\phi) + \sum_p W_p(\phi)$. Dies sollte nach Connes der geometrische Teil einer Spurformel für die Aktion von C auf dem Raum $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$ sein.

Alla Lavrik-Männlin **Nullstellen von $\zeta(s)$ I**

Es wurde über einen tiefliegenden Zusammenhang zwischen den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und den Primzahlen berichtet. Die Beziehung zwischen dem Restglied im Primzahlsatz und dem nullstellenfreien Gebiet von $\zeta(s)$ wurde explizit erläutert. Die nullstellenfreien Gebiete von Hadamard, de la Vallee-Poussin und Vinogradov wurden vorgestellt und deren grundlegenden Ideen und Methoden erklärt.

Pieter Moree **Nullstellen II**

Let $N(\sigma, T)$ be the number of zeros ρ of $\zeta(s)$ of the form $\rho = \beta + i\gamma$, $\beta > \sigma$,

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$0 \leq \gamma \leq T$. The RH would imply that $N(\sigma, T) = 0$ for $\sigma \geq \frac{1}{2}$. For many applications results of strength equal to those on assumption of RH can be obtained on the assumption that

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}, \qquad \sigma \geq \frac{1}{2}.$$

This assumption is known as the density hypothesis. In the talk a result of Bohr and Landau has been proven, to the extend that $N(\sigma, T) = O(T)$, $\sigma \geq \frac{1}{2}$ and fixed. The proof makes use of an estimate for the second moment. The rest of the talk was devoted to the result of Ingham, that $N(\sigma, T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}+\varepsilon}$.

Helmut Maier **Das probabilistische Modell und seine Grenzen**

Zunächst wurde Cramér's Modell vorgestellt, das Eigenschaften der Primzahlverteilung aus Eigenschaften der Verteilung von gewissen Zufallsfolgen ableitet. Sodann wurden Grenzen dieses Modells aufgezeigt. Insbesondere wurde über Ergebnisse über Unregelmäßigkeiten der Primzahlverteilung in kurzen Intervallen berichtet, welche zu Cramér's Modell im Widerspruch stehen.

Tobias Dern **Primzahlen in arithmetischen Progressionen I**

Zunächst wurden nullstellenfreie Gebiete für Dirichlet L-Reihen in der Form $L(s, \chi) \neq 0$ für Re(s)$> 1 - c\, log(q(|\mathrm{Ims}| + 2))^{-1}$ mit einer absoluten Konstanten c hergeleitet, wobei für reelle Charaktere noch eine exzeptionelle Nullstelle zugelassen werden mußte. Diese exzeptionelle Nullstelle wurde mit Hilfe der Siegelschen Schranke $L(1, \chi) > c(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ abgeschätzt. Aus der expliziten Formel für $\psi(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n)\, \Lambda(n)$ ergibt sich mit diesen Abschätzungen der

Satz von Siegel-Walfisz: Zu $A > 0$ existiert $c(A) > 0$, so daß für $(a, q) = 1$ und $q \leq log(x)^A$ gilt

$$\psi(x, q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O\left(x\, e^{-c(A)\sqrt{log(x)}}\right).$$

Als Korollar erhält man den Primzahlsatz für arithmetische Progressionen.

Joachim Dulinski **Primzahlen in arithmetischen Progressionen II**

Ziel des Vortrags war es, die Sätze von Barban-Davenport-Halberstamm und Bombieri-Vinogradov zu beweisen. Es handelt sich dabei um die beiden folgen

Aussagen:
SATZ (BARBAN-DAVENPORT-HALBERSTAMM):

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a \bmod q \\ (a,q)=1}} \left| \psi(\alpha, q, a) - \frac{x}{\varphi(q)} \right|^2 \ll \frac{x^2}{(log x)^A} + Q\, x\, log x$$

SATZ (BOMBIERI-VINOGRADOV):

$$\sum_{q \leq Q} \max_{\substack{a \bmod q \\ (a,q)=1}} \max_{y \leq x} \left| \psi(y, q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(log x)^A} + Q\, x^{\frac{1}{2}} \,(log Qx)^6.$$

Zum Beweis wurden das *Große Sieb* und dessen Anwendungen für die Abschätzungen von Charaktersummen vorgestellt, was mit Standardtechniken, d.h. Orthogonalitätsrelationen für Dirichlet-Charaktere und partielle Summation, sofort die erste Aussage liefert. Für den Beweis der zweiten Aussage, muß die Methodik noch verfeinert werden. Hierzu wurde der Trick von Vaughan vorgestellt.

Manfred Peter — **Quadratisches und biquadratisches Moment der Zetafunktion**

Motohashis explizite Formel für das gedämpfte vierte Moment der Zetafunktion auf der 1/2-Geraden stellt eine Verbindung zwischen Zetafunktionen und spektralen Daten des Laplace-Operators zur vollen modularen Gruppe auf der oberen Halbebene her. Dabei gehen die diskreten Eigenwerte, die Maass-Fourierkoeffizienten der zugehörigen Eigenfunktionen und deren Hecke-Eigenwerte ein. Die arithmetische Information ist kodiert im Wert an der Stelle 1/2 der automorphen Hecke-L-Reihen zu den Eigenfunktionen. Ein wesentliches Hilfsmittel zum Beweis ist die Spurformel von Kuznetsov. Anwendungen bestehen in Form einer guten Asymptotik für das ungedämpfte vierte Moment

$$\int_0^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^4 dt = T \sum_{j=0}^{4} a_j \log^j T + E_2(T), \quad E_2(T) \ll T^{2/3} \log^8 T$$

und dem Ω-Resultat $E_2(T) = \Omega(T^{1/2})$.

Gabriele Nebe — **p-adische Interpolation und Kummersche Kongruenzen**

Gemäß Washington's *Introduction to Cyclotomic Fields* werden p-adische L-Funktionen eingeführt, die im weiteren die Werte der L-Funktion an den negativen ganzen Zahlen interpolieren, und schließlich die Kummer' schen Kongruenzen hergeleitet.

Jörg Wildeshausen **Die Werte $\zeta(1-k)$ und die Struktur der Idealklassengruppe von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$**

Für eine ungerade Primzahl p wurde zunächst ein Überblick über die Arithmetik des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, $\zeta_p := e^{\frac{2\pi i}{p}}$ gegeben. Insbesondere:
SATZ VON HERBRAND: Sei C der p–adische Anteil der Klassengruppe, χ der zyklotomische Charakter und $C(\chi^i)$ der Eigenanteil zum Charakter χ^i. Dann gilt für $2 \leq k \leq p-3$ gerade:

$$p|B_k \Longleftarrow C(\chi^{1-k}) \neq 0.$$

Hauptziel des Vortrags war eine Übersicht der wesentlichen Beweisideen vom SATZ VON RIBET: Mit obigen Bezeichnungen gilt:

$$p|B_k \Longrightarrow C(\chi^{1-k}) \neq 0.$$

Thomas Geisser **Borel-Regulatoren**

Es gibt folgenden Zusammenhang zwischen dem führenden Taylorkoeffizienten der Zetafunktion an negativen ganzen Stellen eines Zahlkörpers K und einer Regulatorabbildung:
SATZ VON BOREL: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$K_{2m+1}(\mathcal{O}_K) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{d_m}, \quad d_m = \mathrm{ord}_{s=-m}\zeta_K(s) = \begin{cases} r_1 + r_2 & m \text{ gerade} \\ r_2 & m \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Beide Seiten haben eine rationale Struktur, und das Kovolumen beträgt $\sqrt{|D|}\pi^{-[K:\mathbb{Q}](m+1)}\zeta_K^*(-m)$. Dies ist ein Spezialfall von Beilinson's Vermutungen über Werte von L-Funktionen.

Herbert Gangl — Zeta-Werte und Polylogarithmen

Die Zeta - Werte $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^m}$ an ganzen Stellen $m(>1)$ wurden *deformiert* zu Polylogarithmen $\mathrm{Li}_m(z)=\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^m}$ und dann Bloch's Kriterium (von Zagier verallgemeinert) vorgestellt, um Linearkombinationen von $\sum_i \pm\mathrm{Li}_m(z_i)$, $z_i\in\mathbb{Q}$ anzugeben (und sogar vermutungsweise zu charakterisieren), die rational wieder um $\zeta(m)$ ergeben. Eine entsprechende Aussage für Zahlkörper ist für $m=2,3$ bewiesen (Suslin, Goncharov, Zagier). Für imaginärquadratische Zahlkörper liefert die hyperbolische Geometrie eine solche Aussage mit beschränktem Nenner, so daß man beweisen kann, daß

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-7})}\doteq\frac{4\pi^2}{21\sqrt{-7}}\left(2D(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}+D(\frac{-1+\sqrt{-7}}{4}\right).$$

Hier bezeichnet $D(z)=\mathrm{Im}(\mathrm{Li}_2(z)-\log|z|\ \mathrm{Li}_1(z))$ den Bloch - Wigner - Dilogarithmus.

Dan Fulea — Regulatoren und Polylogarithmen

1. Motivischer Formalismus ("Working Definition"). Die Struktur der Kategorie $\underline{Var}$ der glatten (quasi)projektiven Varietäten über $\mathbb{Q}$ kann mittels Kohomologietheorien untersucht werden. Diese haben als Zielkategorien Kategorien von Vektorräumen (mit zusätzlicher Struktur), die über verschiedenen Körpern definiert sind: $H^{\cdot}_{\mathrm{Betti}}(X,\mathbb{Q}(0))\in(\underline{\mathrm{Vekt}}/\mathbb{Q})$, $H^{\cdot}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{Q}(0))\in(\underline{\mathrm{Vekt}}/\mathbb{Q})$, $H^{\cdot}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l(0))\in(\mathbb{Q}_l[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})]\text{-}\underline{\mathrm{mod}}$. Es gibt Vergleichsisomorphisme nach Übergang zu $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_l$, … $H^{\cdot}_{\mathrm{Betti}}(X)\otimes\mathbb{C}\cong H^{\cdot}_{\mathrm{DR}}(X)\otimes\mathbb{C}$, $H^{\cdot}_{\mathrm{DR}}(X)\otimes\mathbb{Q}_l\cong H^{\cdot}_{\text{ét}}(X)$, … funktoriell in X. Ein Motiv wurde als eine Ansammlung von Objekten in den verschiedenen Zielkategorien definiert, die sich durch die Vergleichsisomorphisme entsprechen. Die Werte (in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Q}_l$) von L-Funktionen wurden mit der Determinante dieser Vergleichsisomorphisme, berechnet bzgl. $\mathbb{Q}$-basen , in Verbindung gebracht. Sei $\mathbb{Z}(-n):=H^{2n}_?(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$ für eine beliebige (Ko-)Homologie-Theorie $H_?$. Die Werte von L-Funktionen stehen dann in Verbindung mit Extension-Klassen aus $\mathrm{Ext}^1_?(\mathbb{Q}(0),\mathbb{Q}(k))$.

2. Konstruktion von Extension-Klassen. Zu $X:=\mathbb{P}^1$, $U:=\mathbb{P}^1\setminus\{0,\infty\}$, $V=V_x:=U\setminus\{1,x\}$ für $x\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, bilden wir $H^1(U,(\text{Inklusion } i:V\hookrightarrow U)_!\mathbb{Z}_V)=H^1(U,i_!\mathbb{Z})$. Die langexakte Kohomologiensequenz zu $0\to i_!\mathbb{Z}_V\to\mathbb{Z}_U\to\mathbb{Z}_U/\mathbb{Z}_V\to 0$ liefert auf $U\ \ldots H^0(\mathbb{Z})\to H^0(\mathbb{Z}/i_!\mathbb{Z})\to H^1(i_!\mathbb{Z})\to H^1(\mathbb{Z})\to 0$, und anschließend eine Extension $0\to\mathbb{Z}(0)\to H^1(U,i_!\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}(-1)\to 0$, da $H^1(\mathbb{Z})=H^1(U,\mathbb{Z})=H^2(\mathbb{P}^1,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}(-1)$ aus der exakten MAYER–VIETORIS–Sequenz. So ist $H^1(U,i_!\mathbb{Z})$ "motivischer" Natur. Die analoge Konstruktion im Fall $X:=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, $U:=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\setminus\{x_1 \text{ oder } x_2=0,\infty\}$, $V=V_x:=U\setminus\{x_1 \text{ oder } x_2=1,x\}$ wurde betrachtet. Dann liefert $N_x:=H^2(U,i_!\mathbb{Z}_{V_x})$ nicht direkt eine Klasse in $Ext^1(\mathbb{Z}(-2),\mathbb{Z}(0))$ sondern nur eine

Filtration $0 \subseteq \mathbb{Z}(0) \subseteq M_x \subseteq N_x$ mit sukzessiven Quotienten $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}(0)/0$, $\mathbb{Z}(-1) = M_x/\mathbb{Z}(0)$ und $\mathbb{Z}(-2) = N_x/M_x$. Es wird erwartet, daß universelle Konstruktionen in einer Tensorkategorie (Symm, Alt,...) in den Objekte N_{x_i} nur dann Klassen in $Ext^1(\mathbb{Z}(-2), \mathbb{Z}(0))$ liefern, wenn die formale Summe $\sum [x_i]$ im BLOCH–Komplex auf Null gebildet wird. Entsprechende Extensionen sollten dann trivial sein, wenn die formale Summe eine Relation im Sinne der ZAGIER–Vermutung bildet.

Annette Huber **Reine Hodge - Strukturen**

Wir führen die folgende Struktur ein:
Definition (Deligne) $A = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Eine reine Hodge - Struktur H vom Gewicht i ist ein Tripel $(H_A, (H_\mathbb{C}, F^\bullet), h : H_A \longrightarrow H_\mathbb{C})$, bestehend aus einem A-VR H_A, einem $\mathbb{C}$-VR $H_\mathbb{C}$, einer absteigenden Filtration $F^\bullet$ und einer A-linearen Abbildung h, so daß

1) $H_A \otimes \mathbb{C} \longrightarrow H_\mathbb{C}$ ein Isomorphismus

2) Für die $H^{pq} := F^p H_\mathbb{C} \cap \overline{F^q H_\mathbb{C}}$ gilt

$$\bigoplus_{p+q=i} H^{pq} \longrightarrow H_\mathbb{C} \text{ ist Isom.}$$

Eine reine A–Hodge - Struktur H über $\mathbb{R}$ ist eine Hodge - Struktur zusammen mit einer Involution $\iota : H \longrightarrow \overline{H}$. Es wurde erklärt, warum $H^i_B(X(\mathbb{C}), A)$ (X eine glatte projektive Varietät über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$) eine solche Struktur trägt. Schließlich wurden spezielle Beispiele behandelt.

Jörg Wildeshausen **Gemischte Hodge - Strukturen**

Um die Struktur von $H^i_B(X(\mathbb{C}), A)$ für beliebige X (nicht notwendig glatt, projektiv) begrifflich zu fassen, wurden zunächst gemischte A- Hodge - Strukturen und A- Hodge - Strukturen über $\mathbb{R}$ definiert. Als Beispiele dienten:
$H^1_B(E(\mathbb{C}) - \{0, x\},\ A)$ mit $E/\mathbb{C}$ elliptische Kurve, $x \neq 0$ und $H_1(\mathbb{G}_m(\mathbb{C}) \mathrm{rel}\{1, x\}, A)$, $x \neq 1$.
Man hat eine Aussage über die Gestalt von Ext^1 - Gruppen in den Kategorien MHS_A und MHS^+_A. Für $k \geq 1$ und

$$H := H^o_B(X(\mathbb{C}), A)(k), \quad X = \mathrm{Spec}\, K, \quad K \text{ Zahlkörper}$$

spezialisiert diese zu folgendem
SATZ:

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{MHS}^+_A}(A(0), H) = \left(\bigoplus_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathbb{C}/(2\pi i)^k A \right)^+ .$$

Es bezeichne dabei + den Fixraum unter der Involution, die durch komplexe Konjugation sowohl auf $\{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}\}$ als auch auf $\mathbb{C}/(2\pi i)^k A$ gegeben ist. Für $k \geq 2$ ist die rechte Seite dieser Gleichung der Zielbereich des Regulators aus $\mathrm{K}_{2k-1}(\mathcal{O}_K) \otimes \mathbb{Q}$.

Günter Harder **Konstruktion von Extensionsklassen**

Man hofft, daß eine abelsche Kategorie von gemischten Motiven existiert. Sind $\mathbb{Q}(-n) = H^{2n}(\mathbb{P}^n)$, dann sollten gelten

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{MM}}(\mathbb{Q}(-n-1), \mathbb{Q}(0)) = \begin{cases} \mathbb{Q} & n \quad \text{gerade} \\ 0 & n \quad \text{ungerade} \end{cases}$$

Wenn es diese Extensionsgruppen gibt, dann hat man einen Homomorphismus

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{MM}}(\mathbb{Q}(-n-1), \mathbb{Q}(0)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\text{gem. Hodge}}(\mathbb{Q}(-n-1), \mathbb{Q}(0)) \simeq \mathbb{R}$$

und man vermutet, daß das Bild für n gerade der eindimensionale Teilraum $\zeta'(-n)\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist.
Es wurden Konstruktionen angegeben, die gemischte Motive und die vermutete Hodge - Extensionsklasse liefern.

Berichterstatter: Bernhard Ernst Heim

E-mail Adressen:

Baxa, Christoph	baxa@pap.univie.ac.at
Böckle, Gebhard	boeckle@exp-math.uni-essen.de
Brüdern, Jörg	bruedern@mathematik.uni-stuttgart.de
Bühler, Friedhelm	friedi@mathA.rwth-aachen.de
Deitmar, Anton	deitmar@mathi.uni-heidelberg.de
Deninger, Christopher	deninger@math.uni-muenster.de
Dern, Tobias	den@matha.rwth.aachen.de
Dulinski, Joachim	duli@mathA.rwth-aachen.de
Franke, Jens	franke@rhein.iam.uni-bonn.de
Fulea, Dan	fulea@euklid.math.uni-mannheim.de
Gangl, Herbert	herbert@exp-math.uni-essen.de
Geisser, Thomas	geisser.exp-math.uni-essen.de
Geyer, Wulf-Dieter	geyer@mi.uni-erlangen.de
Harder, Günter	harder@diophant.iam.uni-bonn.de
Heim, Bernhard	heim@euklid.math.uni-mannheim.de
Heinrich, Utz	utz@ma2s1.mathematik.uni-karlsruhe.de
Höhne, Karl	hoehne@mi.uni-erlangen.de
Huber, Annette	huber@math.uni-muenster.de
Knebusch, Manfred	manfred.knebusch@mathematik.uni-regensburg.de
Kreußler, Bernd	kreusler@mathematik.uni-kl.de
Kühn, Ulf	kuehn@mathematik.hu-berlin.de
Kühnlein, Stefan	kuehnlei@maths.ox.ac.uk
Kurke, Herbert	kurke@mathematik.hu-berlin.de
Lavrik, Alla	lavrik@mathematik.uni-ulm.de
Lorenz, Falko	lorenz@math.uni-muenster.de
Maennel, Hartmut	Hartmut.Maennel@Ku-eichstaett.de
Maier, Helmut	hamaier@mathematik.uni-ulm.de
Miller, Andrea	miller@mpim-bonn.mpg.de
Moree, Pieter	moree@mpim-bonn.mpg.de
Nebe, Gabriele	gabi@willi.math.rwth-aachen.de
Nicolae, Florin	nicolae@mathematik.hu-berlin.de
Peter, Manfred	peter@arcade.mathematik.uni-freiburg.de
Rohlfs, Jürgen	juergen.rohlfs@ku-eichstaett.de
Schappacher, Norbert	schappa@math.u-strasbg.fr
Scheiderer, Klaus	claus.scheiderer@mathematik.uni-regensburg.de
Schmidt, Claus-G.	cs@ma2s5.mathematik.uni-karlsruhe.de
Schmidt, Ralf	rschmidt@math.uni-hamburg.de

Schulze-Pillot, Rainer	schulze@math.uni-sb.de
Schwermer, Joachim	joachim.schwermer@ku-eichstaett.de
Seiler, Wolfgang	seiler@math.uni-mannheim.de
Senkner, Wolfgang	wolfgang@nelly.mat.univie.ac.at
Steinert, Bernd	bernd@rhein.iam.uni-bonn.de
Tamme, Günter	guenter.tamme@mathematik.uni-regensburg.de
Weber, Georg	weber@mu.uni-erlangen.de
Wewers, Stefan	wewers@exp-math.uni-essen.de
Wildeshaus, Jörg	wildesh@math.uni-muenster.de

Tagungsteilnehmer

Dr. Christoph Baxa
Institut für Mathematik
Universität Wien
Strudlhofgasse 4

A-1090 Wien

Prof.Dr. Christopher Deninger
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Prof.Dr. Gebhard Böckle
Institut für Experimentelle Mathematik
Universität-Gesamthochschule Essen
Ellernstr. 29

45326 Essen

Tobias Dern
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen

52056 Aachen

Prof.Dr. Jörg Brüdern
Mathematisches Institut A
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57

70569 Stuttgart

Dr. Joachim Dulinski
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen

52056 Aachen

Friedhelm Bühler
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen

52056 Aachen

Prof.Dr. Jens Franke
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Wegelerstr. 10

53115 Bonn

Dr. Anton Deitmar
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288

69120 Heidelberg

Dan Fulea
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim

68131 Mannheim

Dr. Herbert Gangl
Institut für Experimentelle
Mathematik
Universität-Gesamthochschule Essen
Ellernstr. 29

45326 Essen

Karl Höhne
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

91054 Erlangen

Dr. Thomas Geisser
Institut für Experimentelle
Mathematik
Universität-Gesamthochschule Essen
Ellernstr. 29

45326 Essen

Dr. Annette Huber-Klawitter
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Prof.Dr. Wulf-Dieter Geyer
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

91054 Erlangen

Dr. Wolfgang Jenkner
Institut für Mathematik
Universität Wien
Strudlhofgasse 4

A-1090 Wien

Prof.Dr. Günter Harder
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 1

53115 Bonn

Prof.Dr. Manfred Knebusch
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

93040 Regensburg

Bernhard Heim
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

53225 Bonn

Bernd Kreussler
Fachbereich Mathematik
Universität Kaiserslautern
Erwin-Schrödinger-Straße

67663 Kaiserslautern

Ulf Kühn
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität

10099 Berlin

Dr. Hartmut Maennel
Mathematisch-Geographische Fakultät
Kath. Universität Eichstätt

85071 Eichstätt

Dr. Stefan Kühnlein
Fakultät für Mathematik
Englerstr. 2

76131 Karlsruhe

Prof.Dr. Helmut Maier
Abteilungen für Mathematik
Universität Ulm

89069 Ulm

Prof.Dr. Herbert Kurke
Institut für Reine Mathematik
Humboldt-Universität Berlin

10099 Berlin

Andrea Miller
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 1

53115 Bonn

Dr. Alla Lavrik-Männlin
Mathematik Department
ETH Zürich
ETH-Zentrum
Rämistr. 101

CH-8092 Zürich

Pieter Moree
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

53225 Bonn

Prof.Dr. Falko Lorenz
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Dr. Gabriele Nebe
Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 64

52062 Aachen

Prof.Dr. Florin Nicolae
Max-Planck-Arbeitsgruppe
"Algebraische Geometrie und
Zahlentheorie"
Jägerstr. 10-11

10117 Berlin

Dr. Claus Scheiderer
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

93040 Regensburg

Manfred Peter
Mathematisches Institut
Universität Freiburg
Eckerstr. 1

79104 Freiburg

Prof.Dr. Claus-Günther Schmidt
Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe

76128 Karlsruhe

Prof.Dr. Jürgen Rohlfs
Mathematisch-Geographische Fakultät
Kath. Universität Eichstätt

85071 Eichstätt

Ralf Schmidt
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstr. 55

20146 Hamburg

Dr. Jürgen W. Sander
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Postfach 6009

30060 Hannover

Dr. Rainer Schulze-Pillot
Fachbereich 9 - Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 151150

66041 Saarbrücken

Prof.Dr. Norbert Schappacher
12 Allee de la Robertsau

F-67000 Strasbourg

Prof.Dr. Joachim Schwermer
Mathematisch-Geographische Fakultät
Kath. Universität Eichstätt

85071 Eichstätt

Dr. Wolfgang K. Seiler
Lehrstuhl für Mathematik VI
Fak. für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim

68131 Mannheim

Georg Weber
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

91054 Erlangen

Dr. Bernd Steinert
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 6

53115 Bonn

Stefan Wewers
Institut für Experimentelle
Mathematik
Universität-Gesamthochschule Essen
Ellernstr. 29

45326 Essen

Jörn Steuding
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1

30167 Hannover

Dr. Jörg Wildeshaus
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

48149 Münster

Prof.Dr. Günter Tamme
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

93040 Regensburg

Heinrich Utz
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Karlsruhe

76128 Karlsruhe