ANLAGE
535

Vortragsbuch #2

4.4.1949 -

5.6.1952

Mathematisches
Forschungsinstitut

Oberwolfach, den
Lorenzenhof

An die vortragenden Gäste und Mitarbeiter des Instituts.

Um den Kontrollbestimmungen für Forschungsinstitute der Besatzungsmächte nachkommen zu können, bitten wir alle Vortragenden, außer dem Titel des Vortrags eine kurze Inhaltsangabe in das Vortragsbuch einzutragen.

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Baden)

Süss.

Inhaltsverzeichnis für Vortragsbuch II.

4. IV. 49. Primfunktionen und Multiplikatoren automorpher Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen.

Jedes Cousin-Problem 2. Art auf direkten Produkten offener Riemannscher Flächen ist durch multiplikativ automorphe Funktionen lösbar. Die charakteristischen Schnittzahlen sind durch die Multiplikatoren bestimmt. Speziell existiert auf jeder offenen Riemannschen Fläche eine Primfunktion, die sich wie die von Weierstrass auf alg. Riemannschen Flächen eingeführten Primfunktionen verhält. – Jede m. a. Funktion ist als Produkt irreduzibler m. a. Funktionen darstellbar, die im wesentlichen eindeutig bestimmt sind.

Stein

4. IV. 49 Über die Bestimmung der 3. Homotopiegruppe eines einfach zusammenhängenden Raumes.

Die 3. Homotopiegruppe Π^3 eines einfach zusammenhängenden Raumes M, der keine 2-dimensionale Torsion besitzt, wird durch seinen Kohomologiering bestimmt. Π^3 besitzt eine Untergruppe $\mathfrak{G}$, die Faktorgruppe $\Pi^3/\mathfrak{G}$ ist isomorph der 3. Homologiegruppe. $\mathfrak{G}$ ist isomorph $\overset{*}{\mathfrak{F}}/\overset{*}{\mathfrak{K}}$, wo $\overset{*}{\mathfrak{F}}$ und $\overset{*}{\mathfrak{K}}$ Untergruppen der Gruppe der Homomorphismen der 2. Kohomologiegruppe $\overset{*}{\mathfrak{B}}{}^2$ in die 2. Homologiegruppe ~~ist~~ $\mathfrak{B}^2$ sind: $\overset{*}{\mathfrak{F}}$ ist die Untergruppe der symmetrischen Homomorphismen, $\overset{*}{\mathfrak{K}}$ die Untergruppe der Homomorphismen, welche durch Bildung des $\cap$-Produktes mit Elementen aus der 4-dim. Homologiegruppe erzeugt werden.

Beweismethode: Über M wird ein in Produkte von Kreisen gefaserter Raum $\tilde{M}$ konstruiert, dessen 2. Homologiegruppe verschwindet; nach Hurewicz ist dann $\pi^3(\tilde{M})$ isomorph der 3. Homologiegruppe von $\tilde{M}$; $\pi^3(\tilde{M})$ ist isomorph $\pi^3(M)$. Die Bestimmung von $\pi^3(M)$ folgt dann aus der Bestimmung der 3. Homologiegruppe von $\tilde{M}$ im Rahmen der Homologietheorie der gefaserten Räume.

Betrachtung der Gruppen mod p liefert eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Zerlegung von π^3 in eine direkte Summe.

G. Hirsch

5. IV - 49 **Points singuliers d'une forme de Pfaff analytique complètement intégrable.**

Soit ω une forme de Pfaff analytique complètement intégrable définie dans l'espace complexe $\mathbb{C}^n$; ~~donc~~ où ω admet un développement:

$\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_p + \cdots$, où les coefficients de ω_p sont des polynômes homogènes de degré p et en particulier $\omega_1 = a_{ij}\, x^i dx^j$ (x^i coordonnées canoniques dans $\mathbb{C}^n$). et (a_{ij}) de rang n,

Supposons de plus $n \geq 3$; dans ces conditions:

a) a_{ij} est symétrique. (Et par suite on peut supposer que (a_{ij}) est la matrice unité)

b) il existe une fonction analytique f définie au voisinage de l'origine O, dont le développement en série entière commence par
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \cdots$$
et telle que f soit intégrale première de l'équation $\omega = 0$.

b) peut se démontrer en se ramenant par une transformation convenable au cas d'une forme w^* définie dans $G_{n-1} \times G$ admettant $S_{n-1} \times \{0\}$ comme intégrale.

Geschlossene komplex-analytische Mannigfaltigkeiten.

5. IV. 1949.

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M^n, $n = 2m$, heisst „komplex-analytisch", wenn sie mit lokalen komplexen Koordinatensystemen $\{z_1 \dots z_m\}$, $\{Z_1 \dots Z_m\}$, … derart überdeckt ist, dass der Übergang von einem System zu einem benachbarten durch analytische Transformationen erfolgt. Es werden geschlossene derartige M^n betrachtet und in ziemlich unsystematischer Weise verschiedene, sie betreffende Fragen besprochen:

1. Verschiedene Methoden zur Konstruktion von Beispielen derartiger M^n.
2. Analytische Abbildungen $M_1^n \to M_2^n$.
3. Es kann vorkommen, dass es in einer Homologieklasse einer M^n genau einen analytischen Zyklus gibt.
4. Es kann vorkommen, dass es zu einer analytischen $M^2 \subset M^4$ keine in M^4 meromorphe Funktion $f (\not\equiv 0)$ gibt, die auf M^2 verschwindet.

5. Die Anzahl der Unbestimmtheits-

punkte einer auf M^4 meromorphen Funktion f wird in einer expliziten Formel durch das Verhalten von f auf den Zyklen einer 2-dimensionalen Homologiebasis ausgedrückt.

H. Hopf.

5.IV.49. Komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik.

Auf der (geschlossenen) komplex-analytischen Mannigfaltigkeit M der (komplexen) Dimension m sei eine „Kählersche" Metrik gegeben, d.h. eine positiv definite Hermitesche Metrik mit der folgenden speziellen Eigenschaft: man bilde mit dem Fundamentaltensor g_{jk} die äussere Differentialform $\Omega = \sum_{j,k=1}^{m} g_{jk}\, dz_j\, d\bar{z}_k$ ($z_1, \dots, z_m$ lokale komplexe Koordinaten), und es sei $d\Omega = 0$ (Kähler, Abh. Sem. Hamburg 1933).

Ist M' eine analytisch in M eingebettete komplexe Mannigfaltigkeit, so ist die aufgeprägte Metrik ebenfalls Kählersch.

Beisp.: Komplexer projektiver Raum P_m, also alle ein-eindeutig in P_m eingebetteten algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Aus der Existenz einer Kähler-Metrik auf M folgt, dass M spezielle Homologieeigenschaften hat, z.B. 1) Die Bettischen Zahlen B_r in den geraden Dimensionen sind >0, in den ungeraden gerade. 2) Im Cohomologiering von M ist das Produkt der Klasse von Ω mit einer Cohomologieklasse $\neq 0$ der Dimension $\leq m-2$ stets $\neq 0$; also $B_r \geq B_{r-2}$ für $r \leq m$. 3) Ist M' analytisch in M eingebettet, so ist M' als Zyklus aufgefasst in M nicht nullhomolog. 4) In jeder Dimension lassen sich die Homologieklassen in verschiedene Typen spalten, ~~ebenso~~ so wie dies von Lefschetz in algebraischen Mannigfaltigkeiten gemacht wurde. u.a.

Die Beweise stützen sich auf den Begriff der harmonischen Form (Hodge), und auf eine Reihe von Formeln, die im Wesentlichen auf Hodge zurückgehen. Aus ihnen lässt sich auch der folgende Satz herleiten: Ist $\alpha = \Sigma A_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \dots dz_{i_r}$ ein analytisches, überall reguläres Differential (d.h. die $A_{i_1 \dots i_r}$ sind analytische Funktionen der lokalen Koordinaten z_j), und ist $d\alpha = 0$, so ist α harmonisch. Daraus folgt leicht: Ist β ein beliebiges analytisches Differential, so ist von selbst stets $d\beta = 0$ (also β harmonisch). B. Eckmann.

Reelle Algebraische Mannigfaltigkeiten. 6.IV.49

Betrachtet werden algebraische Mannigfaltigkeiten M im projektiven Koordinatenraum K^n über einem reell-abgeschlossenen Körper. Für solche gilt der Zerlegungssatz (Zerlegung in endlich viele irreduzible Bestandteile). Weiter existiert zu jeder Mannigfaltigkeit eine maximale Erweiterung M_x zu einer abstrakten Mannigfaltigkeit. Irreduzibilität und Dimensionsbegriff lassen sich mit Hilfe von M_x algebraisch definieren. Mit Hilfe birationaler Abbildungen wird sodann M auf eine besonders einfache algebraische Form gebracht. Zusammenhang mit Tarski's „decision method for elementary algebra" (Rand project, 1948). W. Habicht.

Über den topologischen Inhalt des Fundamentalsatzes der Algebra. 6.4.49

1) Die durch den Punkt ∞ abgeschlossene euklidische Ebene E ist ein kompakter Raum

2) E ist zusammenhängend.

3) Die durch ein nicht konstantes Polynom vermittelte Abbildung $w = f(z)$ ist stetig in E.

4) Sie ist gebietstreu, d.h. bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

Daher ist $f(E)$ in der Bildebene abgeschlossen und offen, also nur $f(E)=E$, womit der F.-Satz bewiesen ist.

Wie in der Diskussion bemerkt worden, ist die Gebietsstetigkeit freilich verhältnismäßig schwierig festzustellen, schwieriger als die Legendre-sche Aussage, daß es zu jedem $|f(z)|>0$ ein $|f(z+h)|<|f(z)|$ gibt; sodaß der Beweis trotz seiner formalen Kürze ein Umweg gegenüber dem auf der Legendreschen Bemerkung fußenden Cauchy-schen Beweis ist.

Man kann den Beweis dadurch vereinfachen, daß man die Abbildung der z-Ebene durch $|f(z)|$ auf die Halbgerade $x \geqq 0$ ~~entworfene Abbildung~~ studiert. Sie ist stetig und ~~ge~~ gebietstetig, was nicht mit der Legendre-schen Bemerkung gleichbedeutend ist. Damit ist das Bild abgeschlossen und offen in der Halbgeraden $x \geqq 0$ und mit ihr identisch.

L. Vietoris.

6.IV.49 Über geblätterte Mannigfaltigkeiten.

Definition einer geblätterten Mannigfaltigkeit V_n mit Hilfe von zwei Topologien τ und τ'. Im differenzierbaren Fall wird eine Blätterung definiert durch ein vollständig integrierbares Feld von p-dimensionalen Contactelementen.
Beispiele von geblätterten Mannigfaltigkeiten: Blätterung einer Kugel S_3 wo ein kompaktes Blatt existiert.
Bemerkungen über die ungelösten Probleme der Existenz einer Blätterung auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit, sowie der Existenz eines kompakten Blattes für eine gegebene Blätterung.
Eigenschaften eines kompakten Blattes V_p: Falls $V_p \sim 0$, so ist die Euler-Poincarésche Charak-

teristik von V_p gleich null. Verallgemeinerungen dieses Satzes.

Falls ein Blatt auf einen Punkt zusammenziehbar ist, so ist es parallelisierbar.

Problem: Gegeben sei eine Untermannigfaltigkeit V_p von V_n. Gibt es dann eine differenzierbare Blätterung in einer Umgebung von V_p wovon V_p ein Blatt ist? Die notwendig und hinreichende Bedingung hierzu ist, dass der Faserraum der zu V_p orthogonalen Vektoren eine diskrete Strukturgruppe besitzt. Falls V_p einfachzusammenhängend ist, muss dieser Faserraum das topologische Produkt von V_p mit der Faser sein.

Beispiele von Untermannigfaltigkeiten, die nicht Blatt einer differenzierbaren Blätterungen sein können: projektive Gerade in ~~x~~ der komplexen projektiven Ebene, u. s. w.

Stabilitätssatz für kompakte Blätter mit endlicher Fundamentalgruppe. Die Strukturgruppe des Faserraumes der ~~senkrechten~~ orthogonalen Vektoren ist dann eine ~~eine~~ endliche euklidische Drehungsgruppe. Gewöhnliche und singuläre Blätter.

Charles Ehresmann

7.VI. ~~Soit S une~~ Sur certains champs de cônes attachés à une hypersurface -

Soit S une hypersurface de E_n, M l'un quelconque de ses points. Attachons arbitrairement mais invariablement à l'hyperplan tangent en M un point déterminé, de façon à obtenir une correspondance continue (M, P). Les directions que doit suivre M sur S pour que les déplacements correspondants de P leur soient orthogonaux forment un cône quadratique (φ_M) et le champ indiqué est constitué par l'ensemble des cônes (φ_M). Chaque cône (φ_M) fait partie d'un faisceau dont l'un des cônes bases est le cône asymptotique en M, l'autre étant invariant par déformation de S (en cas de déformabilité). Si S est dans E_3, (φ_M) se réduit à deux droites enveloppant un réseau. L'étude des particularités que peut présenter ce réseau conduit à de nombreux rapprochements entre théories d'apparence assez éloignées. Déformation des quadriques, congruences harmoniques à une surface, réseaux de Guichard et réseaux conjugués persistants de Voss, déformation des surfaces spirales, correspondances par aires équivalentes entre les deux nappes d'une enveloppe de sphères, solutions persistantes de l'équation de Cayley des systèmes de Lamé, asymptotiques virtuelles, etc.... Toutes ces questions peuvent être placées dans un même cadre, particulièrement harmonieux, par la considération du réseau précédemment défini.

Vincensini

7. VI. Es sei $\mathfrak{V}$ ein Verein, d.h. eine teilweise geordnete Menge, deren Elemente mit großen lat. Buchstaben bezeichnet seien; die ordnende Relation werde mit $\subseteq$ bezeichnet. In $\mathfrak{V}$ sei eine Topologie eingeführt, indem jedem Element A ein Element $\bar{A}$ als „abgeschlossene Hülle" ist, wobei folgende 3 Axiome erfüllt sind: 1) $A \subseteq \bar{A}$; 2) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$; 3) aus $A \subseteq B$ folgt $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Es lässt sich nun das ganze Begriffs- und Satzsystem der globalen Topologie der Räume auf diese top. Vereine übertragen. Näheres siehe „Archiv der Mathematik", Bd 1, Heft 2

G. Nöbeling

Über das Zentrumproblem (der Funktionentheorie)

7. IV. Der Nullpunkt heißt ein Zentrum der analytischen Funktion $f(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots \qquad |\alpha_1| = 1$, wenn sich $f(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes als transformierte Drehung, d.h. in der Form

$$f(z) = \varphi(\alpha_1 \varphi_{-1}(z))$$

mit

$$z = \varphi(w) = c_1 w + c_2 w^2 + \dots, \quad c_1 \neq 0$$

darstellen läßt, wobei $\varphi_{-1}(z)$ die Umkehrfunktion von $\varphi(w)$ bedeutet. Unter dem „Zentrumproblem" versteht man die Frage nach notwendigen oder hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine vorgegebene analytische Funktion $f(z)$ ein Zentrum besitzt. Das Zentrumproblem ordnet sich in zwei große Ideenkreise organisch ein. Der eine ist die Theorie der Iteration der rationalen und der ganzen Funktionen, welche insbesondere von

Julia und Fatou entwickelt worden ist; die lange ungelöste, erst 1942 durch Siegel entschiedene Hauptfrage dieser Theorie nach der Existenz nichtkonstanter Invarianzfunktionen der Folge der Iterierten hängt auf das engste mit dem Zentrumproblem zusammen. Der andere ist die Uniformisierungstheorie; hier fand das Problem bei einem Versuch, die Abbildbarkeit der körperlichen Ecke auf die Kreisfläche zu beweisen, bereits das Interesse von H. A. Schwarz.

Siegel bewies 1942, daß $f(z) = \alpha_1 z + \cdots$ stets ein Zentrum besitzt, wenn der Multiplikator α_1 der Bedingung

$$\left| \log |\alpha_1^n - 1| \right| = O(\log n)$$

genügt, d.h. wenn die Potenzen α_1^n die 1 „nicht zu gut" approximieren.

In Ergänzung des Siegelschen Satzes wird ein Satz bewiesen, welcher – grob formuliert – besagt, daß eine nichtlineare ganze Funktion $g(z)$ jedenfalls dann kein Zentrum im Nullpunkt besitzt, wenn $g'(0) = \alpha_1$ $(|\alpha_1| = 1)$ ~~einer~~ gewissen, nur vom Wachstum von $g(z)$ abhängenden Mengen der Mächtigkeit des Kontinuums angehört. Der Beweis wird durch die Anwendung des Hadamardschen Dreikreisesatzes besonders einfach und durchsichtig.

H. Cremer

7. IV. 1949.

Über Vierscheitelsätze bei Kurvenpaaren.

Durch die Formeln

$$x_l = x + q \quad y_l = y - p \quad \Big\} E_l \qquad x_r = x - q \quad y_r = y + p \quad \Big\} E_r$$

wird eine Abbildung der Flächenelemente $E(x, y, z, p, q)$ des isotropen Raumes auf die Punktepaare (E_l, E_r) einer Bildebene $z = 0$ gegeben, die im isotropen Raum ein Gegenstück der GAUSSschen Abbildung der Flächenelemente auf die Kugel darstellt. (Vgl. den Vortrag vom 25.10.1945). Durch diese parataktische Abbildung wird einem Paar parallelbezogener Kurven (C_l, C_r) ein Schmiegstreifen, einem Paar isometrischer Kurven ein isotroper Krümmungsstreifen im Raume zugeordnet. Aus dem Satz von Mohrmann, daß jede auf einer Eifläche gelegene geschlossene Linie ohne Doppelpunkte und Singularitäten mindestens vier stationär berührende Schmiegebenen hat, folgt dann, daß zwei parallelbezogene flächengleiche Eilinien C_l, C_r mindestens vier entsprechende Punktepaare E_l, E_r tragen, in denen die Krümmungen gleich

sind. Daraus kann man leicht den Blaschke-Süss schen Vierscheitelsatz der relativen Differentialgeometrie gewinnen, nach dem auf zwei parallel-bezogenen Eilinien mindest vier Stellenpaare existieren, für welche das Krümmungsverhältnis $\bar{\varkappa} = \varkappa_e : \varkappa_r$ stationär ist. Durch das Studium über Schwenkungsverfahren entsteht daraus der Segre-Blaschkesche Satz, dass auch auf zwei isometrischen, umfangsgleichen Eilinien c_e, c_r mindest vier entsprechende Stellenpaare E_e, E_r existieren, in denen die Krümmungen gleich sind ($\varkappa_e = \varkappa_r$). Im isotropen Raume bedeuten diese Sätze einfache Vierscheitelsätze für Schmiegstreifen bzw. Krümmungsstreifen, die bei eilinigen Mittenkurve (die stets erreichbar ist) auch nach dem indirekten Herglotzschen Verfahren bewiesen werden können.
(Vgl. Math. Zeitschrift, 51, 1949, S. 525–573). K. Strubecker.

8.4.49 <u>Axiomatisches zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.</u>

~~Die Merkmale~~ Ist V ein Boole-scher Verband von Sorten $A, B, \ldots$ im Sinne des Vortrages v. 7.4.49 des Herrn Nöbeling, dann ~~sollte~~ ist sehr häufig die Aufgabe gestellt, die Somen in irgend einem Sinn zu messen, z. B. ~~sollen~~ in der abstrakten Mengenlehre, ~~die~~ in der die Mengen als Somen behandelt werden, diese Somen durch Angabe einer Zahl, der Zahl ihrer Elemente ~~ge~~ bewertet werden, ~~in~~ der Masstheorie mit einem Mass (Jordan, Lebesgue u. s. w.). Auch die Merkmale in der Wahrscheinlichkeitslehre sollen mit Zahlen bewertet werden, nämlich den Wahrscheinlichkeiten. ~~In allen die~~ Als klassisches Beispiel zeigt die Fregesche Definition der Anzahl ~~folgen~~ die Zweckmässigkeit, ~~so~~ folgendermassen vorzugehen. ~~Man definiert zunächst eine Vergleichung der Somen in geeigneter Weise~~ Ist eine ~~solche~~ Messung der Somen eines Verbandes gegeben, dann definiert sie eine von der ursprünglichen Vergleichung der Somen im allgemeinen verschiedene teilweise Ordnung, die zum Unterschied von jener ~~die~~ mit $\subseteq$ bezeichneten mit $\leq$ bezeichnet sei. Es wird nämlich $A \leq B$ genannt, wenn die Masszahl von A nicht grösser als die von B ist. Ist $A \leq B$ und $B \leq A$, dann heisst $A = B$ sodass immer $A < B$ oder $A = B$ oder $B < A$ gilt. $A = B$ bedeutet aber nicht die Identität. Alle X, für ~~die~~ ~~mit A in der~~ $X = A$ gilt möge die Schichte von A heissen. ~~Die~~ eine teilweise Ordnung eines Verbandes V in der $<, =, >$ diese Eigenschaften haben heisst eine Schichtung ~~der~~ von V. Mit einer Messung der Somen von V ist also immer eine Schichtung ~~ge~~ ~~ge~~ von V gegeben. Um von der Schichtung zur Messung zu kommen braucht es aber noch eines Masstabes an dem die Somen mit der $\leq$ Beziehung gemessen werden; ~~B~~ z. B. liefern in der abstrakten Mengenlehre die Mengen der Zahlwörter $\{1, 2, \ldots n\}$ ~~so~~ ~~als~~ die Somen eines Masstabes, welche per definitionem mit den Zahlen n bewertet werden. Jede andere Menge wird dann ~~durch~~ vermöge ein-eindeutiger Zuordnung ihrer Elemente mit der Zahlwortmenge $\{1, 2, \dots n\}$ verglichen und ~~zu~~ dadurch gemessen.

Ähnlich kann man in der Wahrscheinlichkeitstheorie vorgehen.

Nun folgt ein Bericht über die Arbeit „Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit" Monatsh. f. Math. 52," des Vortragenden, in der dieses Programm durchgeführt wird. Auf etwas ältere Arbeiten von B.O. Koopman, Annals of Math. 41, 42, durch die diese Untersuchung angeregt ist, ~~wird hingewiesen~~ und auf den wichtigsten Unterschied ~~hingewiesen~~ zwischen den beiden Standpunkten wird hingewiesen. L. Vietoris

12.4.49 (Zugleich unautorisierter Bericht über einen ~~Vortrag~~ Diskussion von Hrn. Sperner am 8.4.) Steinitz (J.f.d.r.u.a. Math. 137) bewies, daß es zu einem beliebigen (kommutativen) Körper K immer einen algebraischen, algebraisch abgeschlossenen Oberkörper gibt. Hierfür gab Hr. Sperner einen gegenüber den Darstellungen von Steinitz und van der Waerden (Moderne Algebra) vereinfachten Beweis, der von Hrn. Zimmermann (Freiburg) herrührt und von denselben Grundgedanken ausgeht. Dem wurde die folgende Beweisidee gegenübergestellt. Die Menge Ω aller algebraischen Oberkörper von K ist durch die Beziehung $\leq$ („ist ~~enthalten in~~ Teilkörper von") teilweise geordnet, und zwar induktiv (vgl. Bourbaki, Eléments de Mathématique I 1 (th. des ens.) S. 36-37) und enthält daher nach dem „Satz von Zorn" ein maximales Element. Dieses ist der gesuchte Oberkörper. Hr. Sperner wandte mit Recht ein, daß die Menge Ω widerspruchsvoll ist. Diesem Einwand entgeht man so: Hat K die Mächtigkeit $\mathfrak{k}$, so hat ein algebraischer Oberkörper offenbar höchstens die Mächtigkeit $\mathfrak{k} + 2\mathfrak{k}^2 + 3\mathfrak{k}^3 + \dots$.

Sei M irgend eine Menge größerer Mächtigkeit; sie enthalte K. Die Menge Σ sei folgendermaßen erklärt: ihre Elemente sind Teilmengen von M, versehen mit Körperstrukturen K enthaltende, die die Struktur von K fortsetzen. Σ ist teilweise geordnet durch die folgende Beziehung: $S \leqq T$, wenn die Menge S in der Menge T enthalten ist und die Körperstruktur von T die von S fortsetzt. Diese Ordnung ist induktiv, also gibt es ein maximales Element S^* in Σ. Wäre S^* nicht algebraisch abgeschlossen, so gäbe es eine echte algebraische Erweiterung, und zufolge der Mächtigkeit von M läßt sich diese als Körperstruktur einer S^* enthaltenden Teilmenge von M so darstellen, daß die Struktur von S^* damit fortgesetzt wird. Damit wäre S^* nicht maximal.

als algebraische Oberkörper

Auch der Satz von der Isomorphie aller algebraisch abgeschlossenen, algebraischen Oberkörper von K wird am natürlichsten mit dem Zornschen Satze bewiesen.

H. Kneser.

Ueber die Irrationalität der kubischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit — 13-4-49

Fano hat die Irrationalität dieser Mannigfaltigkeit bewiesen. Sein Beweis ist eine Untersuchung der Flächen mit allen Genera 1, die über eine Mannigfaltigkeit, mit kanonischen Kurven wie ebene Abschnitten haben, sind. Ich habe einen anderen Beweis gegeben; das Gedanke des Beweises ist die Bemerkung daß die Castelnuovo' Bedingung für die Rationalität einer Fläche mit der Elliptizität des antikanonisches Systems gleich sei. Für eine Mannigfaltigkeit, wenn man alle genera nicht schreibt, schreibt man, nur daß die Flächen antikanonischen alle genera I haben; aber die Flächen mit allen Genera I gehören zu einer unendliche Familie Flächen; die Flächen dieser Familie [illegible]

-sprechen den Werte eines Nummers π, minimal genus einer über die Fläche liegende Kurven. Der Raum R^3 entspricht dem Genus $\pi = 3$, denn seine antikanonische Flächen sind vierter Ordnung Flächen. Ob eine 3-Dimensionale Mannigfaltigkeit rational sei, ist eine Familie antikanonischen Flächen der Mannigf.- deren Flächen mit fest bestimmten F_4 äquivalent sind? Der Versuch der Rationalität, führt der Untersuchung der ~~Ant~~ antikanonischen Flächen mit F_4 äquivalent. In den möglichen Fällen, muß man die Dimensionen der Systeme dieser F_4 und dieser antikan. Fl. über V_3 rechnen; wenn die zwei Nummer ungleich sind, ist die Mannigfaltigkeit irrational.

Im Beispiel der V_3^3, die Gleichungen in ganzen Nummer, die Dimensionsrechnung gibt, haben keine Lösung, und dieses beweist die Irrationalität der V_3^3.

[illegible]

12.IV.49 Zwei Permutationen heissen diskordant, wenn kein Element in beiden Permutationen am gleichen Platze steht. Es seien $k (< n)$ paarweise diskordante Permutationen (eine Verbotsmatrix) gegeben und die Anzahl $P_M^{(k)}(n)$ der zu allen Permutationen der Matrix M diskordanten Permutationen gesucht. Es werden 3 Formeln ($n!\,e^{-k}$, $(n-k)!^{\frac{n}{n-k}}$ und eine $\sum_0^n \cdots$) gegeben, die bei festem k und wachsendem n unabhängig von M asymptotisch gelten. Die zweite und dritte Formel können für gewisse k, n, M exakte Werte liefern.

H. Gialitze jr.

12.4.49. Die 3 zum Aufbau einer ebenen Geometrie gebrauchten Axiome von Hilbert (vgl. Anhang IV) lassen sich durch ein schwächeres Axiomensystem ersetzen; man braucht statt des letzten Hilbertschen Axioms nur zu fordern, daß irgendzwei Punkte der Ebene durch die topolog. Selbstabbildungen der zugrundegelegten Gruppe wie beliebig weit auseinander und wie beliebig nahe zueinander gebracht werden können. Methode: Vervollständigung der zugrundegelegten Gruppe mit Hilfe eines Diagonalverfahrens.

K. Leichtweiß

9-8-49 Exposé du but, de la méthode et du plan des "Eléments de Mathématique" de N. Bourbaki. Le plan actuel est le suivant (pour la 1re partie).

I. Ensembles abstraits

II. Algèbre

III. Topologie générale

IV. Fonctions d'une variable réelle

V. Différentielles et variétés différentiables

VI. Espaces vectoriels topologiques

VII. Mesures et distributions

VIII. Topologie algébrique

IX. Fonctions analytiques

X. Groupes de Lie et géométrie différentielle

J. Dieudonné

9.8.49 Algebraische Behandlung des Helmholtzschen Raumproblems.

$\mathfrak{V}$ sei ein n-dim. Vektorraum über dem Schiefkörper $\mathfrak{K}$ (Charakt. $\neq 2$) und $\mathfrak{G}$ eine Gruppe linearer Abbildungen von $\mathfrak{V}$. Ist $\mathfrak{K}$ algebraisch geordnet, so bedeute H_m ($m \leq n$) die folgende Eigenschaft von $\mathfrak{G}$: „Sind $A_1, .., A_m$ und $B_1, .., B_m$ je m linear unabhängige Elemente $\in \mathfrak{V}$, so gibt es genau ein $\sigma \in \mathfrak{G}$ mit $\sigma A_i = \sum_{k=0}^{i} a_{ik} B_k$, $a_{ik} \in \mathfrak{K}$, $a_{ii} > 0$." Eine Bilinearform $f(X,Y)$

heisst „positiv definit", wenn $f(X,X)$ für $X \neq 0$ aus $\mathfrak{V}$ ein Quadrat $\neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ ist. Die Gruppe der lin. Abb., welche eine positiv definite symmetrische Bilinearform invariant lassen, heisst „volle orthogonale Gruppe"; ~~ihre einzige~~ eine Untergruppe vom Index 2 „eigentliche orthogonale Gruppe". (In den folgenden Fällen gibt es zu einer vollen orthogonalen Gruppe nur eine eigentliche.)

Eigene Ergebnisse: Ist $n = 3$ und $\mathfrak{K}$ ein angeordneter Körper, in dem jedes positive Element ein Quadrat ist, so bedeutet H_2, dass $\mathfrak{G}$ eine eigentliche orthogonale Gruppe ist. Der entsprechende Satz für $n = 2$ (H_1 statt H_2) ist falsch. Wohl aber bedeutet unter den gleichen Voraussetzungen über $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft H_2 dann, dass $\mathfrak{G}$ ~~eine~~ volle orthogonale Gruppe ist.

Ergebnisse von R. Baer: Ist $n \geqq 3$, so sind gleichbedeutend die beiden Aussagen:

I. $\mathfrak{K}$ gestattet eine alg. Ordnung, bez. der $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft H_n besitzt;

II. In $\mathfrak{K}$ ist jedes Element $1+x^2$ ein Quadrat
1 und $\mathfrak{G}$ ist ~~eine~~ volle orthogonale Gruppe;

sowie ebenfalls:

I': $\mathfrak{K}$ gestattet eine alg. Ordnung, bez. der $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft H_{n-1} besitzt.

II': In $\mathfrak{K}$ ist jedes Element $1+x^2$ ein Quadrat und $\mathfrak{G}$ ist eine eigentliche orthogonale Gruppe.

G. Pickert.

10.8.49 Théorie de Galois pour les anneaux simples.

Soit K un corps commutatif, L un sous-corps tel que $[K:L]$ soit fini. Soit $\mathfrak{A}$ l'anneau des endomorphismes du groupe abélien additif K; K peut être identifié au sous-anneau de $\mathfrak{A}$ formé des applications $x \to \lambda x$. Dans $\mathfrak{A}$, le sous anneau $\mathcal{E}$ commutant de L est l'anneau des endomorphismes de K, considéré comme espace vectoriel sur L. $\mathcal{E}$ est un anneau simple contenant

K et tel que $[\mathfrak{E} : K] = [K : L]$, et L est le commutant de $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{A}$. Cette théorie, due à Jacobson, généralise la théorie de Galois : K est galoisien sur L lorsque $\mathfrak{E}$ est engendré par les L-automorphismes du corps K (autrement dit formé des combinaisons linéaires de tels automorphismes à coefficients dans K)

Généralisation aux anneaux simples : Soit E un espace vectoriel à gauche de dimension finie n sur un corps (commutatif ou non) K, $\mathfrak{A}$ l'anneau des endomorphismes du groupe abélien E ; K peut encore être identifié au sous anneau de $\mathfrak{A}$ formé des homothéties $x \to \lambda x$; le sous-anneau A de $\mathfrak{A}$ commutant de K dans $\mathfrak{A}$ est l'anneau des endomorphismes de l'espace vectoriel E, anneau simple. Pour tout anneau simple $B \subset A$, le commutant C de B dans $\mathfrak{A}$ est un anneau simple tel que $K \subset C$, et B est le commutant de C dans $\mathfrak{A}$; en outre le degré de A sur B est égal à celui de C sur K. Le cas correspondant à la théorie de Galois proprement dite est celui où C est formé de combinaisons linéaires à coefficients dans K, de semi-automorphismes de E, c.à.d. d'applications biunivoques de E sur lui-même telles que $u(x+y) = u(x)+u(y)$, $u(\lambda x) = \lambda^\sigma u(x)$, $\lambda \to \lambda^\sigma$ automorphisme de K. On obtient alors des théorèmes qui généralisent les théorèmes de la théorie classique et ceux de Cartan-Jacobson, qui correspondent au cas particulier où $n = 1$, $E = K$, $A = K^0$ (opposé de K). Voir Commentarii Math. Helv. t. 21 (1948) p. 154-184

J. Dieudonné

10.8.49 H. **Zerlegung eines Knotens in Primknoten.**
Wiederholung des Vortrags vom 27.9.48. — H. Schubert.

11.8.49 Lineare Transformationen des halbfiniten Raumes

φ ist der Raum der Vektoren mit abzählbar vielen Koordinaten, von denen nur endlich viele $\neq 0$ sind, ω der Raum der Vektoren mit beliebigen abzählbaren Koordinaten. $\varphi + \omega$ der Raum der (x, y), $x \in \varphi$, $y \in \omega$ ist der halbfinite Raum. Die linearen Abbildungen, die im Sinne einer einfachen Topologie stetig sind, von φ in sich wurden seinerzeit von O. Toeplitz und mir untersucht und es ergab sich eine Verallgemeinerung der Gleichungstheorie von φ, die einige wenige neue Normalformen für Äquivalenz ergaben. Es wurde eine neue einfachere, mehr die Eigenschaften des linearen Raumes benützende Ableitung angegeben, die mit ganz elementaren Umformungen die Normalform erzielt. — G. Köthe

12-8.49 Espaces (F) et (LF). Distributions.

Un espace (F) est un espace vectoriel localement convexe, métrisable et complet. Un espace (LF) E est défini comme suit : E est réunion d'une suite croissante (E_n) de sous-espaces vectoriels, dont chacun est muni d'une topologie $\mathcal{T}_n$ pour laquelle il est un espace (F) ; $\mathcal{T}_{n+1}$ induit sur E_n la topologie $\mathcal{T}_n$.
On prend sur E la topologie $\mathcal{T}$ définie par les ensembles convexes symétriques $\mathcal{V}$ dont l'intersection avec chaque E_n est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_n$.
On démontre que $\mathcal{T}$ induit la topologie $\mathcal{T}_n$ sur E_n ; tout espace (LF) est complet et non métrisable. Tout ensemble borné dans E est contenu dans un E_n ; toute application linéaire de E dans un espace localement convexe F, qui est continue dans chaque E_n, est continue dans E.
Sur le dual E' d'un espace (F) ou (LF), on

considère la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E. Avec cette topologie, E' est complet. On définit de même le bidual E'' de E et on montre que E peut être canoniquement plongé dans E'' ; pour que $E = E''$, il faut et il suffit que tout ensemble borné dans E et faiblement fermé soit faiblement compact. Il en est ainsi lorsque tout ensemble borné dans E et fortement fermé est fortement compact : on dit alors que E est un espace $(\mathcal{M})$ ou $(\mathcal{LM})$.

Pour définir les <u>distributions</u> de Schwartz, on considère l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions définies dans R, indéfiniment dérivables et à support compact. Soit $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des $x \in \mathcal{D}$ de support contenu dans l'intervalle $I_n : -n \leq t \leq n$. On prend sur $\mathcal{D}_n$ la topologie définie par les semi-normes $p_{k,n}(x) = \sup_{t \in I_n} |x^{(k)}(t)|$, $\mathcal{D}_n$ est alors un espace $(\mathcal{M})$, et on définit $\mathcal{D}$ comme espace $(\mathcal{LM})$ à partir des $\mathcal{D}_n$. Les distributions sur R sont les éléments du <u>dual</u> $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$. Dans $\mathcal{D}$ la dérivation $\varphi \to \varphi'$ est continue, ce qui permet de définir dans $\mathcal{D}'$ sa <u>transposée</u> $T \to -T'$ comme une opération continue, d'où toute une série de remarquables propriétés (cf. Schwartz, Annales de Grenoble, 1945 et 1947-48)

Herr Prégalois

J. Dieudonné

11-8-49 1. Si G est un groupe abélien localement compact, $\hat{G}$ son dual(*), F la réunion des sous groupes compacts de G, K la composante connexe de 0 de G, $K \cap F$ est un sous-groupe compact connexe et $K = R^n \times K \cap F$; G/F est un groupe abélien discret dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre ∞ ; $K \cap F$ et G/F sont relativement bien connus (au pt. de vue de leur structure). $F/K \cap F$ est un groupe <u>totalement discontinu</u> dont le dual

est $F'/K'\cap F'$ (F' réunion des s.-gr. compacts de $\hat{G}$, K' composante connexe de 0 ds $\hat{G}$), car $K^* = F'$, $F^* = K'$. Le dual de $F/K\cap F$ est donc aussi totalement discontinu.
2. Soit $(G_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de groupes ab. loc. comp., et, pour tout $\iota\in I$, H_ι un sous-groupe ouvert compact de G_ι; soit G le sous-groupe de $\prod_{\iota\in I} G_\iota$ (sans topologie) formé des $(x_\iota)_{\iota\in I}$ telles que $x_\iota\in H_\iota$ excepté pour un nombre fini d'ι; $H=\prod_{\iota\in I} H_\iota \subset G$; un système fondamental de voisinages de 0 dans la topologie produit de celles des H_ι sur H est un syst. fond. de vois. de 0 dans une topologie compatible avec la structure de groupe de G; G est appelé la somme directe locale des G_ι (rel. aux H_ι). 3. Si p est un entier premier et si G est tot. discontinu, soit G_p l'ensemble des $x\in G$ tels que $n\to nx$ (Z étant muni de la topologie p-adique) soit continue; G_p est un sous groupe fermé de G qu'on appelle la composante p-primaire de G. Si G est totalement discontinu ainsi que son dual et si H est un sous-groupe ouvert compact de G, G est somme directe locale des G_p ($p=2,3,5,\dots$) (rel. aux $H\cap G_p$); on notera que deux groupes peuvent avoir mêmes composantes primaires sans être isomorphes. On étudiera dans une prochaine conférence les composantes primaires d'un groupe.

Jean Braconnier.

(*) Voir A. Weil, L'intégration ...., ASSI, Paris (1940), et ma Thèse, Journal de Liouville (1948).

13-2-49 **Homologie d'un revêtement par la méthode des chaînes harmoniques**

Par analogie avec la théorie des formes différentielles harmoniques sur un espace de Riemann compact et orientable (Hodge, Bidal et de Rham), B. Eckmann a introduit la notion de chaîne harmonique sur un complexe simplicial fini (Com. 1944):

Identifiant de façon canonique chaînes et cochaînes, il définit l'opérateur cobord (noté d^*) sur les chaînes et il appelle chaîne harmonique une chaîne c, telle que $\{dc=0$ et $d^*c=0\}$.

Si l'on prend pour coefficients le corps R des nombres réels, un raisonnement très simple d'orthogonalité dans l'espace vectoriel de dim. finie des chaînes montre que l'on a : Toute classe d'homologie contient une chaîne harmonique et une seule, exactement comme dans le théorème de Hodge.

Dans un article du Bulletin of the Am. M. Soc, Fev 1949, Eckmann applique cette technique au problème de l'homologie d'un revêtement :
Soit K un complexe simplicial fini, $\tilde{K}$ un revêtement fini, G le groupe du revêtement (groupe fini d'automorphismes de $\tilde{K}$). Soit $H_n(\tilde{K})$ le n-ième espace vectoriel d'homologie sur R de $\tilde{K}$. G opère sur $H_n(\tilde{K})$ de façon évidente et l'on a :
$H_n(K)$ est isomorphe au sous-espace vectoriel de $H_n(\tilde{K})$ formé des points fixes de G. En particulier $b_n \leq \tilde{b}_n$ ($b_n, \tilde{b}_n$, nombres de Betti).

La démonstration est très simple, il suffit de remarquer que la projection de $\tilde{K}$ sur K transforme une chaîne harmonique en une chaîne harmonique, puisque c'est localement un isomorphisme.

J Leray

Der von Hrn. Schubert behandelten Zerlegung von Knoten wird die folgende Zerlegung von Mannigfaltigkeiten gegenübergestellt: Aus zwei n-Mannigfaltigkeiten wird je ein n-Element weggelassen und die entstehenden Rand-n-Sphären identifiziert. Bei einer Festlegung der Orientierungen ist das Ergebnis bis auf Homöomorphie bestimmt. Diese Zusammensetzung ist kommutativ und assoziativ; die Sphäre ist das neutrale Element. Prim-M^n ist eine solche, die sich nur dann als Zusammensetzung ergibt, wenn eine Komponente Sphäre ist. Für $n=3$ gelingt der Beweis, daß sich jede Mannigf. aus Primmannigf. zusammensetzt, und zwar im wesentlichen auf nur eine Weise. Die Beweise sind den beim Knotenproblem geführten vielfach analog; nur beim Beweis, daß die Primzerlegung möglich ist, fehlt eine Invariante, deren Verschwinden das neutrale Element kennzeichnet; deshalb

11. 8. 49

muß hier auf die endliche Zellendarstellung der Mannigfaltigkeit zurückgegriffen werden. H. Kneser

13.8.49. Kohomologie in Algebren (G. Hochschild, Ann. of Math. 46 u. 47 u. Duke Journal 14 1947).
A sei eine Algebra endlichen Ranges über dem Körper K, P ein zweiseitiger A-Modul, C_n die Gruppe der bez. K n-fach linearen Abbildungen von A in P. Ein Operator δ mit $\delta\delta f = 0$ bildet C_n homomorph in C_{n+1} ab. $H_n(A,P) = \delta^{(0)}/\delta(C_{n-1})$ heißt die n-dimensionale Kohomologiegruppe. Zu jedem Modul P existiert ein Modul $A:P$, so daß $H_{n+1}(A,P) \cong H_n(A, A:P)$ ist. $H_1(A,P) = \{0\}$ für alle P ist äquivalent zu „A ist separabel". $H_2(A,P) = \{0\}$ für alle P bedeutet: Ist $A \cong B/N$, so gibt es in B ein Repräsentantensystem mod N, das eine Unteralgebra ist. Dies enthält als Spezialfall den bekannten Satz über Algebren mit separablem Radikalrestklassenring. M. Kneser

15. VIII. 49 Über die Erweiterung eines Inhaltes zu einem Maß (vgl. Haupt und Pauc, Sitz.-Ber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1948)
Ist j ein absolut additiver Inhalt über einem Borelschen Verband k (wobei k in einem Borelschen σ-Verband V eingebettet ist), die kleinste Erweiterung $\bar{j}$ von j/k zu einem Maß j/B' erhält man, wenn B' der kleinste Borelsche σ-Verband $B = B(k)$ über k (in V) ist, während dem Lebesgueschen Maß die kleinste vollständige Erweiterung j/L entspricht. Die Existenz von j/B kann konstruktiv bewiesen werden, indem man zuerst j/k_δ (bzw. j/k_σ) bildet (k_δ bzw. k_σ kleinster σ- bzw. δ-Verband über k) und dieses Verfahren durch abwechselnde δ- und σ-Bildung fortsetzt, bis B erreicht ist. Wenn j/L (oder j/B) speziell „positiv" ist (d. h. aus $j(a) = 0$ folgt $a = 0$), gilt $k_{\delta\sigma} = k_{\sigma\delta} = B = L$ und die Konstruktion bricht nach 2 Schritten ab. Der allgemeine Fall wird auf den eines positiven j/L zurückgeführt durch Restklassenbildung nach dem mit Hilfe von k_σ zu gewinnenden σ-Ideal aller j-Nullteile in L. Haupt

15.8.49. Quelques propriétés des variétés-bords. x

Soit V^n une variété ~~bo~~ orientable, bord d'une variété orientable M^{n+1}! L'application $V \to M$ définit une application $f: H_p(V) \to H_p(M)$ pour l'homologie; et l'homomorphisme dual $f^* H^p(M) \to H^p(V)$ pour les groupes de cohomologie. Soient K_p^R le noyau de f dans H_p! $\mathfrak{O}$ l'algèbre-image de f^* dans la cohomologie de V. On établit le théorème de dualité suivant : K_p et $\mathfrak{O}^{n-p}$ sont isomorphes (le domaine des coeff. étant un corps). Divers corollaires en sont tirés, en particulier: Pour qu'une variété V^n soit un bord, il faut d'abord que sa caract. $\chi \equiv 0 \bmod 2$; ceci exige, si l'on veut une variété non bord que $n \equiv 0 \bmod 4$, soit $n = 4K$. On démontre alors (sur le corps des réels): pour que V^{4K} soit un bord, il faut que la forme quadratique définie par le $\cup$-produit sur H^{2K} admette autant de carrés positifs que de carrés négatifs. On définit ensuite les variétés cobordantes, montre que la différence $\varpi = p - q$ du nombre des carrés +, moins le nombre des carrés négatifs est un invariant pour cette classe. Avec cette équivalence, l'ensemble des variétés orientables forme un anneau; ~~et~~ on montre ainsi l'existence d'une ∞^1 de classes non nulles pour les dimensions $n = 4K$. –

R. Thom.

16.8.49. Den 3-Geweben mit geschlossenen U-Figuren können [illegible]bereiche zugeordnet werden, in denen folgende Axiome gelten: die Existenz eines Einheitselementes, der beiderseitigen Inversen, die einander gleich sind und eine Regel, die das assoziative Gesetz ersetzt:

$[(ab)a]c = a[b(ac)]$. Solche Bereiche werden Quasigruppen genannt. Für allgemeine Quasigruppen (nicht-kommutative) kann eine Theorie aufgestellt werden, die ganz der Gruppentheorie entspricht; es kommen nur noch Begriffe der Assoziierten, des

Assoziatoren $[(ax)y]^{-1}[(ay)y]$, die den Transformierten und Kommutatoren in der G.-Th. entsprechen. Für Quasigruppen gelten alle Ordnungs- u. Isomorphiesätze der Gruppentheorie.
Kommutative Quasigruppen von endlicher Ordnung sind direkte Produkte der p-Quasigruppen. Wenn $p \neq 3$ ist, ist die Quasigruppe eine Gruppe. Es gibt also nur p-Quasigruppen von Dreipotenzordnung. Jeder Gruppe ~~wird~~ der Ordnung 3^α, in der folgende Relation gelten: $x^3 \equiv e \mod Z$, $(xy)^3 = x^3 y^3$ kann eine kom. Quasigruppe zugeordnet werden, indem man eine neue Multiplikation einführt: $x \circ y = x^{-1} y x^2 = y^{-1} x y^2$. Jeder kom. Quasigruppe kann andererseits eine Permutationsgruppe zugeordnet werden. Man erhält auf diese Weise eine Kette von Quasigruppen

$Q \subset Q_1 \subset \dots$, so dass Q_{i-1} eine Untergruppe von Q_i ist. Alle Quasigruppen solcher Kette sind direkte Produkte von der Ersten Quasigruppe mit Abelschen Gruppen. Hala Pflugfelder.

16/8/49

Fonctions numériques généralisées à des algèbres de Boole : Dans l'ensemble des applications décroissantes $F(\lambda)$ de la droite numérique R dans une σ-algèbre de Boole E, considérons la relation d'équivalence suivante : "$F(\lambda)$ est équivalente à $H(\lambda)$" signifie "$F(\lambda)$ et $H(\lambda)$ ont les mêmes limites à droite et à gauche, $F(\lambda+0)$ et $F(\lambda-0)$"; on appelle *fonction* toute classe d'équivalence ainsi définie. Dans le cas où l'algèbre de Boole E est formée de tous les ensembles d'un ensemble E, il y a correspondance biunivoque entre ces classes d'équivalence et les fonctions numériques définies de la façon habituelle [Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (1927)]. On peut définir une relation d'ordre entre les fonctions de façon naturelle, obtenant un lattice ~~distributif~~ Φ, qui est complet en même temps que $\mathcal{E}$. Des opérations algébriques peuvent être définies, les fonctions dites finies formant alors un lattice vectoriel [Olmsted, Lebesgue theory on a boolean algebra, Trans. Am. Math. Soc. (1942)]. Une opération de fermeture étant définie sur $\mathcal{E}$, "$F(\lambda)$ equivalente à $H(\lambda)$" entraine "$\overline{F(\lambda)}$ equivalente à $\overline{H(\lambda)}$"; on appelle lim. sup. de f la classe d'equivalente $\bar{f}$ de Φ formée des $\overline{F(\lambda)}$ où $F(\lambda) \in f$; en remplaçant la fermeture par l'intérieur, on définit la lim. inf. de f, $\underline{f}$; les opérations $f \to \bar{f}$ et $f \to \underline{f}$ sont, respectivement, une opération de fermeture et une operation d'intérieur sur Φ; les fonctions semi-continues supérieurement (resp., inférieurement) sont les éléments fermés (resp., ouverts) correspondants. Ceci permet d'établir les propriétés ~~de~~ ces fonctions par une méthode analogue à celle des espaces topologiques pour établir les propriétés correspondantes des ensembles fermés et ouverts. Les fonctions continues sont les éléments à la fois fermés et ouverts du lattice topologique Φ. Pour étudier les fonctions discontinues, on introduit la fonction oscillation d'une fonction f, $\omega_f = \bar{f} - \underline{f}$, où f est la réduite de f. La correspondance $f \to f$ est un isomorphisme entre le lattice Φ et le sous-lattice de Φ formé des fonctions ≥ -1 et $\leq +1$, et invariante par rapport aux opérations lim. sup. et lim. inf. Il s'ensuit que pour que f soit continue il faut et il suffit que $\omega_f = 0$. L'élément de continuité de f (plus grand élément de $\mathcal{E}$ sur lequel f est continue) est le complementaire de la valeur que prend ~~pour~~ la limite à gauche $\lambda = 0$ des applications appartenant à ω_f. Dans les algèbres de Boole topologiques ~~dont~~ tout élément ouvert $G \neq 0$ contient un élément ouvert $H \neq 0$ dont la fermeture est compact et aussi contenue dans G, nous démontrons que tout residuel est partout dense (Théorème de Baire). Dans ce cas on retrouve des propriétés classiques des fonctions ponctuellement discontinues, notamment que $\omega_f = 0$ est cond. nécessaire et suffisante pour que f soit ponctuellement discontinue (Baire) et que toute fonction ~~ponctuellement~~ semi-continue est ponctuellement discontinue.

A. Pereira Gomes

17/8/49 Structure des groupes p-primaires (abéliens loc. comp.) (suite d'un exposé précédent); si G est un tel groupe, son dual en est un; tout groupe p-primaire est donc tot. discontinu ainsi que son dual. La hauteur de $x \in G$ est le plus grand entier p^k tel que $x = p^k y$ soit soluble ds G. Si G est un p-groupe discret dont tous les él. sont de hauteur ∞, G est somme directe de ss-groupes (isom.) à Q_p/Z_p. Si G est un groupe compact (p-primaire) dont tous les él. $\neq 0$ sont d'ordre ∞, G est produit de groupes isom. à Z_p. Si G est un p-groupe compact, G est produit de groupes cycliques d'ordres p^k avec des k bornés. Si G est loc. compact p-primaire et ss. él. $\neq 0$ d'ordre fini, G est isomorphe à un sous groupe ouvert d'un groupe p-primaire $\tilde{G}$ qui est un espace vect (non topol.) sur Q_p et tel que $\tilde{G} = Q_p G$. Si G est un p-groupe loc. comp., G est isomorphe à un sous-groupe ouvert d'un $\tilde{G}$, produit d'une famille de ~~sous~~ groupes $(G_\iota)_{\iota \in I}$ isom. à Q_p/Z_p (avec la topologie suivante: si H_ι est un sous-groupe fini d'ordre borné de G_ι, ΠH_ι est ouvert dans $\tilde{G}$). D'autres résultats et contre-exemples sont indiqués, ainsi que quelques généralisations (Étude des A-modules loc. compacts sur un anneau compact A).

Jean Braconnier.

(?.4?) Existenz und Mannigfaltigkeit abelscher Algebren mit vorgeg. Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers. (H. Hasse, Arbeit gleichen Titels in Mathem. Nachrichten 1948 (Heft 1, 4, 5))

Gegeben sei ein kommut. separabler Körper Ω, der über Ω_0 galoisch mit der Gruppe g ist, der die n-ten Einheitswurzeln enthält und dessen Charakteristik nicht in n aufgeht; weiter eine endl. abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ mit maximaler Elementordnung n (Ordnung N); eine abelsche Algebra K über Ω sei definiert als eine kommut. separable, halbeinfache Algebra mit den Eigenschaften:

1) $\mathfrak{A}$ Automorphismengruppe von K/Ω 2.) $K/\Omega \underset{\mathfrak{A}}{\cong} \mathfrak{A}_\Omega$, d.h. K/Ω als Modul ist operatorisomorph dem Gruppenring $\mathfrak{A}_\Omega$ über Ω bzgl. $\mathfrak{A}$.
Das Problem ist das in der Überschrift formulierte. Dabei ist die vorgegebene Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von K/Ω eine Gruppenerweiterung $\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}, \Gamma, \mathfrak{L})$ von $\mathfrak{A}$, charakterisiert durch die dortigen Invarianten Γ: Homomorphe Darst. von g durch Autom. von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}$: eine assoziative Faktorensystemklasse. Weiterhin lässt sich auch jede abelsche Algebra K/Ω unter den obigen Voraussetzungen über Ω invariant durch eine abelsche Faktorensystemklasse c von Systemen $c^{(\Omega)}_{\chi,\psi}$ (χ,ψ Charaktere von $\mathfrak{A}$) charakterisieren, die einer Faktorbasis w_χ von K/Ω vermöge $w_\chi w_\psi = w_{\chi\psi}\, c_{\chi,\psi}$ entspringen. Umgekehrt kann man zeigen, dass zu jeder abelschen Faktorensystemklasse c in Ω eine abelsche Algebra existiert.

In einer Analysis des Problems erhält man, von einer abelschen Algebra K/Ω mit $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{A}$ ausgehend, folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Galoissein von K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ in dem Faktorensystem $c_{\chi\psi}$:

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad \frac{c^{s}_{\chi^{s^{-1}},\psi^{s^{-1}}}}{c_{\chi,\psi}} = \frac{b_{\chi,s}\, b_{\psi,s}}{b_{\chi\psi,s}} \\ &(\mathrm{II}) \quad \frac{b^{t}_{\chi^{t^{-1}},s}\, b_{\chi,t}}{b_{\chi,st}} = \chi(C_{s,t}) \end{aligned}\right\} \text{mit } \begin{cases} s,t \in g \\ \sigma,\tau \in \Gamma_\chi \\ C_{s,t} \in \mathfrak{L} \end{cases},$$

wobei $b^{(\Omega)}_{\chi,s}$ ein gewisses Verkettungssystem bedeutet, das der Anwendung von U_s auf K gemäss der Definition $w_\chi^{U_s} = w_{\chi^s}\, b_{\chi,s}$ entspringt. Das Existenzproblem läuft nun auf die Lösbarkeit in einem assoziativen Faktorensystem $c_{\chi\psi}$ der Gleichungssysteme (I) und (II) bei vorgegebenen Gruppeninvarianten Γ und $\mathfrak{L}$ hinaus. Man kann zeigen, dass (II) genau dann in einem Verkettungssystem $b_{\chi,s}$ lösbar ist, wenn eine gewisse Charakteralgebra direkte Summe von vollst. Matrixalgebren wird. Unter Vor. der Lösbarkeit von (II) in $b_{\chi,s}$ ist (I) stets in $c^{(\Omega)}_{\chi,\psi}$ lösbar, doch $c_{\chi\psi}$ konnte noch nicht als ein assoziat. Faktorensystem nachgewiesen werden. Dass dies der Fall ist, ist eine Vermutung von Herrn Hasse. Wolfram Jehne

18.8.49 **Trajectoires fermées de certains systèmes différentiels perturbés.**

On sait (d'après Poincaré, Kryloff Bogolioubof) ramener l'étude des solutions périodiques de l'équation différentielle

$$(1) \quad x'' + x = \mu f(x, x')$$

(où μ est un petit paramètre), à l'étude des zéros d'une fonction numérique $f(\rho)$ obtenue par simple intégration.

La réussite de cette méthode est due à la circonstance suivante: les trajectoires de l'équation $x'' + x = 0$ forment une fibration du plan (x, x') pointé en O. D'où l'idée de l'appliquer à l'étude des trajectoires d'un champ de vecteurs E_μ défini dans une variété V_n et dépendant du paramètre μ, le champ E_0 admettant comme trajectoires les fibres d'une fibration de V_n en cercles.

De tels champs E_μ se rencontrent dans les problèmes de dynamiques suivants:

1) Oscillateurs harmoniques couplés dans les cas de résonnance.
2) Problème restreint des trois corps.
3) Etude des géodésiques sur une sphère S_4.

On peut ramener l'étude des trajectoires de E_μ (pour μ petit) à l'étude des singularités d'un champ de vecteurs $\tilde{E}$ défini sur la variété V_{n-1} des trajectoires de E_0. Si E_μ admet un invariant intégral (du type de la dynamique) il en est de même pour $\tilde{E}$.

Enfin on peut associer à E_μ un deuxième champ de vecteurs Δ_y défini sur V_{n+1}, orthogonal à E_0 tel que l'étude des trajectoires fermées de E_μ se ramène à l'étude des singularités de Δ_y.

19.8.49

[illegible]

18.8.49. Einfache Kennzeichnungen von Mittelpunkts-Eibereichen und des Kreises.

Jeder Sehne $s(P)$ durch einen Punkt P eines ebenen Eibereichs f sei z. B. der Flächeninhalt $f(s(P))$ des kleineren von $s(P)$ abgeschnittenen Stückes von f zugeordnet. Es sei

$F(P) = \text{Min}\, f(s(P))$ bei festem P und variabler Sehne $s(P)$ durch P. Hat f keine Randstrecken und höchstens abzählbar viele Punkte der Art, daß mehr als eine Sehne s_0 durch sie hindurchgeht, für die $f(s_0(P)) = F(P)$ minimal ist, so hat f einen Mittelpunkt M und alle von M verschiedenen Punkte P haben nur eine einzige „Minimalsehne". Wählt man für $f(s(P))$ den Flächeninhalt des kleineren der beiden über $s(P)$ in f einbeschriebenen Stoßschnitte, so erhält man mit denselben gedanklichen Schritten die von Radon 1917 gefundenen Eibereiche mit Mittelpunkt und „konjugierten Durchmessern". Ist weiter $f(s(P))$ die Länge von $s(P)$, so gibt es bei nur einem Punkte mit mehr als einer Minimalsehne auf glatten Eiern eine Charakterisierung des Kreises, während bei zwei oder endlich vielen Ausnahmepunkten sich die hypothetischen Doppelspeichenkurven ergeben, deren Existenz als Eilinien bis heute nicht gesichert zu sein scheint.

Süss.

19.8.49 <u>Einfacher Beweis des Brunn-Minkowskischen Satzes, des E. Schmidtschen Spiegeltheorems und der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung und beliebiger Dimension.</u>

Es sei

R_n ein Riemannscher Raum konstanter Krümmung $K \gtreqless 0$,

$\mathfrak{K}$ eine Lebesgue-meßbare Punktmenge in R_n,

$V(\mathfrak{K})$ das Maß von $\mathfrak{K}$,

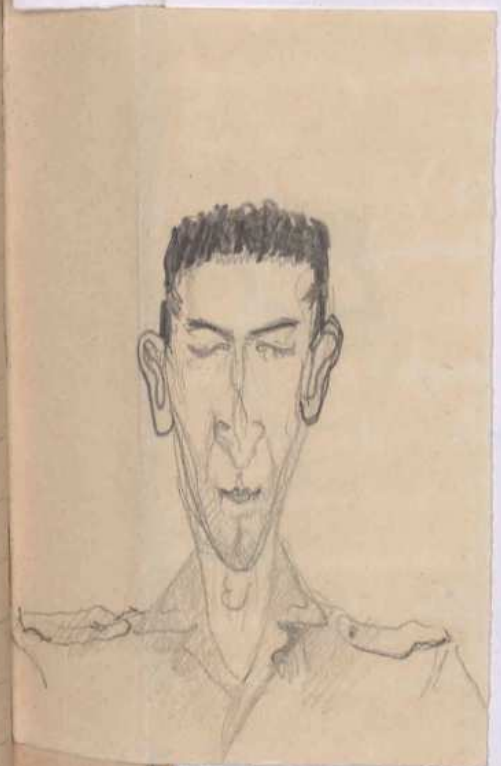
$\mathfrak{T}$ eine Vollkugel mit $V(\mathfrak{T}) = V(\mathfrak{K})$,

$\mathfrak{T}_P$ die Vollkugel mit dem Mittelpunkt P und einem Radius $h > 0$,

$\mathfrak{K}_h = \bigcup_{P \in \mathfrak{K}} \mathfrak{T}_P$ der h-Parallelkörper von $\mathfrak{K}$,
$\mathfrak{K}^h = \bigcap_{P \in \mathfrak{K}} \mathfrak{T}_P$ der h-Spiegelkörper von $\mathfrak{K}$,
$O(\mathfrak{K}) = \liminf_{h \to 0} \frac{V(\mathfrak{K}_h) - V(\mathfrak{K})}{h}$ die Minkowskische Oberfläche v. $\mathfrak{K}$.
Dann gelten die Sätze:
(1) $V(\mathfrak{T}_h) \leqq V(\mathfrak{K}_h)$ (Brunn-Minkowskischer Satz),
(2) $V(\mathfrak{K}^h) \leqq V(\mathfrak{T}^h)$ (E. Schmidtsches Spiegeltheorem).
Aus (1) folgt unmittelbar
(3) $O(\mathfrak{T}) \leqq O(\mathfrak{K})$ (isoperimetrische Ungleichung).
Innerhalb einer gewissen Klasse von Körpern $\mathfrak{K}$ tritt in (1) bis (3) das Gleichheitszeichen nur für $\mathfrak{K} = \mathfrak{T}$ ein.

Ihre Formulierung und ihren ersten Beweis für die nichteuklidischen Räume verdankt man E. Schmidt [Math. Z. 49 (1943-44), 1-109; Math. Nachr., Berlin 1 (1948), 81-157; 2 (1949), 171-244] (Verfahren der Rotationssymmetrisierung).

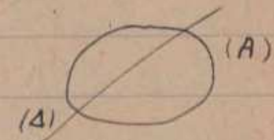
Angeregt durch einen Beweis von H. Hadwiger [Elemente Math., Basel 3 (1948), 25-48] für konvexe Körper im dreidimensionalen euklidischen Raum hat A. Dinghas [Math. Nachr., Berlin 2 (1949), 107-113, 148-162] einen einfachen neuen Beweis von (1) und (3) mit beweistechnischen Verbesserungen des Vortragenden gegeben (Verfahren der Steinerschen Symmetrisierung). Mit denselben Methoden hat der Vortr. auch (2) bewiesen. Außer einigen allgemeinen Sätzen der Maßtheorie werden dabei fast nur rein punktmengentheoretische Schlüsse verwendet. Die Gestaltung des gleichzeitig für hyperbolische, euklidische, sphärische und elliptische Räume beliebiger Dimension gültigen einfachen Verfahrens wird durch die Verwendung von Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ ermöglicht, in denen das nichteuklidische Maß einer Punktmenge durch dieselbe Formel gegeben wird wie im euklidischen Raum. Bemerkenswert ist noch, daß die Feststellung des Extremalkörpers von (3) im wesentlichen aus einem einzigen Schluß besteht. H. Orsinger



20/8/49

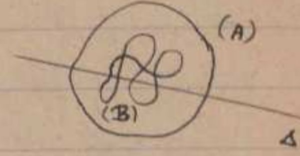
20/8/49 Geometrische Wahrscheinlichkeit. Critère pour le choix d'une densité de probabilité : invariance pour un déplacement quelconque - point → $dx\,dy$.

Droite → $d\theta\, dh$ $(x \cos\theta + y \sin\theta = h)$.



Mesure des secantes à un contour convexe

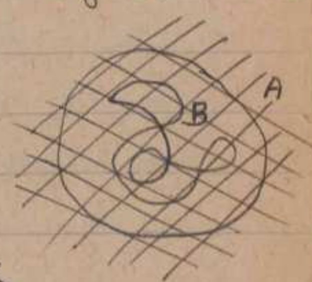
$$M = \iint_{(\Delta)\text{ coupant }(A)} d\theta\, dh = \text{Longueur de } (A)$$



Calcul du nombre moyen d'intersections d'une secante (Δ) à (A) convexe avec (B) quelconque (rectifiable)

$$m = \frac{2 \text{ Longueur } (B)}{\text{Longueur } (A)} \longrightarrow \boxed{\text{Longueur } (B) = \frac{m}{2} \text{ Longueur } (A)}$$

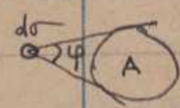
D'où une méthode de rectification statistique d'une courbe en utilisant un nombre suffisant de sécantes Δ à un contour convexe A de longueur connue entourant B :



$$\text{Longueur de } (B) \simeq \frac{1}{2} \text{ longueur de } (A) \times \frac{\text{nombre d'intersections } (\Delta, B)}{\text{nombre de sécantes } (\Delta)}$$

— Formule de Crofton

$$\iint_{\text{Ausserhalb } A \text{ (convexe)}} (\varphi - \sin\varphi)\, d\sigma = \frac{1}{2} L^2 - \pi S$$



B. Charles.

Kongruente transzendente Körpererweiterungen. 20. 8. 49.

[illegible] $(\bar{K}, \tau)$ [illegible] $K, \mathcal{K}$ [illegible] k :
[illegible] $\bar{K}$ [illegible] $\mathcal{K}$ [illegible] τ [illegible] k
[illegible] K [illegible] $\bar{K}$ [illegible] $\bar{K} = K^{\tau} \mathcal{K}$.
$(\bar{K}, \tau)$ und $(\bar{K}', \tau')$ [illegible] ~~[illegible]~~
[illegible] $\tau^{-1}\tau'$ [illegible] K^{τ} auf $K^{\tau'}$
[illegible] $\bar{K}$ auf $\bar{K}'$ [illegible]
[illegible].
[illegible] : $\bar{K} = K\mathcal{K}$; K/k [illegible]
$\bar{K}/\mathcal{K}$ [illegible] 1 ; $K/k(\xi)$ [illegible]
[illegible] $\mathfrak{p}$ [illegible] $\bar{K}/\mathcal{K}$ ~~[illegible]~~ [illegible]
[illegible] , [illegible] $K \nsubseteq \bar{K}_{\mathfrak{p}}$ oder $K \subseteq \bar{K}_{\mathfrak{p}}$
($\bar{K}_{\mathfrak{p}}$ [illegible]).
[illegible] :

1.) Wenn der Restklassenkörper der $\mathfrak{p}$-adischen Hüllen von k in $\mathfrak{K}$ bzw. K ein Körper ist, so entsprechen die nichtkonstanten $\mathfrak{p}$ eineindeutig den Klassen äquivalenter Komposita $(\mathfrak{K}^*, \tau)$, für welche $\mathfrak{K}^*/\mathfrak{K}$ algebraisch ist.

2.) Ist k algebraisch abgeschlossen <u>in $\mathfrak{K}$</u>, so liefert zwischen den konstanten $\mathfrak{p}$ und den Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K/k eine eineindeutige Zuordnung mit $K_{\mathfrak{p}} \cong \mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$.

Bei <u>Deuring</u> (J.f.M. 177_{167}) sind diese Sätze unter der Voraussetzung bewiesen, daß es eine Basis der ganzen Größen von K über $k[\xi]$ gibt, welche auch Basis der ganzen Größen von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}[\xi]$ ist. Diese scheint mir unter den oben formulierten Voraussetzungen nicht erfüllt zu sein.

23-8-48

[illegible]

20-8-48 Convergence absolue des séries trigonométriques:

Etude de l'ensemble de convergence absolue d'une série $\Sigma \rho_n \sin(nx + \varphi_n)$ – On peut se contenter en faisant au besoin une translation de l'étude de $\Sigma \rho_n \sin nx$. Théorèmes de Salem (Duke Math. Journ. 1941) donnant une condition nécessaire ~~de convergence absolue~~ pour qu'un ensemble parfait P donné soit un N-ensemble (c. a. d. tel qu'il existe une série convergeant absolument sur P, mais non partout) – N_0 Ensembles: S a des coefficients ρ_n ne tendant pas vers 0 – Il existe des ensembles N qui ne sont pas N_0 : ex: $\Sigma \frac{\sin n!\pi x}{n}$.

L'ensemble de convergence de $\Sigma \rho_n \sin^2 nx$ est un N-ensemble, mais pas forcément un N_0 ensemble si $\lim \rho_n > 0$. Exemple. Classification: ensembles N_0^p.

L'ensemble de convergence absolue est un groupe additif; on peut en déduire divers théorèmes clas siques : Symétries (Fatou), base (Steinhaus) _ mesure nulle (Denjoy-Lusin)

A un N-ensemble, si on ajoute un dénombrable, on obtient un dénombrable (idem N_0)

Si $\Sigma \rho_n \sin nx$ converge sur E, il existe une série $\Sigma \rho'_n \sin nx$ convergeant sur l'ensemble $\sum_{\text{fini}} a_i x_i$ $x_i \in E$ a_i rationnel, sans converger partout

Jauthibault

23-8-49 Théorèmes de structure pour les algèbres normées commutatives. Applications (d'après les travaux de Gelfand - Raikov, Mat. Sbornik, 1941).

Algèbre normée : algèbre sur le corps C (nbres complexes), munie d'une norme telle que $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ et $\|xy\| \leq \|x\| . \|y\|$.

Théorème 1 : Toute algèbre normée commutative, à élt unité, et vérifiant la condition $\|x^2\| = \|x\|^2$ pour tout x, est isomorphe à une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues sur un compact (munie de $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$)

Le compact est obtenu comme ensemble des caractères de l'algèbre (homomorphismes sur le corps des complexes), muni de la topologie faible. On utilise le fait que ~~tous~~ les caractères et les idéaux maximaux de l'algèbre se correspondent biunivoquement.

*-algèbre normée : algèbre normée munie d'un antiautomorphisme *.

Théorème 2 : Toute *-algèbre normée, commutative, à élt unité, complète (critère de Cauchy), symétrique et telle que $\|x^2\| = \|x\|^2$ pour tout x, est isomorphe à l' *-algèbre des fonctions continues sur un compact.

(*Algèbre symétrique : Tout idéal maximal est stable par l'opération * ⟺ Tout élément "hermitien" ($x^* = x$) a un spectre réel _)

~~Le deu~~ Ce théorème se déduit du précédent uniquement en faisant usage du théorème d'approximation de Stone - Weierstrass.

Applications :

1) Soit X un espace topologique complètement régulier, $\mathscr{C}(X)$ l'algèbre des fonctions continues sur X et bornées. Soit Ω le compact relatif à cette algèbre. On vérifie sans peine que X est plongé dans Ω qui n'est autre que son compactifié de Čech

2) Soit X un compact muni d'une mesure de Radon, $L^\infty(X)$ l'espace des fonctions mesurables et bornées sur X. Le compact relatif à $L^\infty(X)$ a été étudié par Kakutani.

3) Soit $\mathfrak{H}$ un Hilbert, $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre com. d'opérateurs bornés de $\mathfrak{H}$, contenant 1 (par exemple, l'algèbre engendrée par un hermitien). $\mathcal{A}$ vérifie les conditions du théorème 2 (la propriété de symétrie n'est pas tout à fait évidente) et on en déduit sans peine la <u>décomposition spectrale de $\mathcal{A}$</u>.

J. Leray

22-8-48 Modern Numerical Analysis – the mathematics relevant for high speed <u>a</u>utomatic <u>d</u>igital <u>c</u>alculating <u>m</u>achines. Basic principles of a.d.c.m.: they carry out a sequence of orders on numbers. The orders are represented in code by numbers (which can be changed during the course of the computation). The numbers are e.g. 40 binary digits. As regards the length of a computation: e.g. a day's out put of an a.d.c.m. might be a computation involving 10^7 multiplications (together with a reasonable number of other operations +, – (which take much less time than multiplication)). This means e.g. that inversion of matrices of 150 rows and columns is possible.

Errors in computation may be 1). Truncation or 2) Round-off. Study of truncation errors is familiar in analysis and in classical numerical analysis. Round-off errors <u>must</u> be studied in modern numerical analysis. Certain examples were discussed showing the effect of these errors: e.g. it may happen that for this reason a finite matrix may appear to have a continuous spectrum.

Processes must be studied both from the point of view of their length and their stability.

John Todd.

25.8.48 **Groupes de transformations**

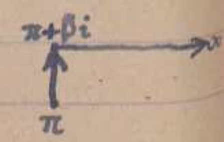
Si E est un espace loc. compact et si $\mathcal{H}(E)$ est le groupe de ses homéom., on peut munir $\mathcal{H}(E)$ de 2 topologies : $\mathcal{C}_0$ = top. de conv. unif. sur tout compact (dans $\mathcal{C}_0$, $V(C,U) = E(u ; \underset{\forall x \in C}{u(x) \in U})$ (C compact, U entourage) décrit un système fondamental de voisinages de l'identité ; $u \to u^{-1}$ n'est pas continue pour $\mathcal{C}_0$; $\mathcal{C}_1$ est défini par un système fond. de vois. de l'id : $W(C,U) = V(C,U) \cap \overset{-1}{V}(C,U)$; $\mathcal{C}_1$ est compatible avec la struct. de groupe de $\mathcal{H}(E)$ et c'est la + fine de ces topologies telles que $(u,x) \to u(x)$ soit continue. Etude des sous-groupes équicontinus de $\mathcal{H}(E)$ (Arens, Dieudonné). Si E est un groupe, soit $\mathcal{G}(E)$ ($\subset \mathcal{H}(E)$) le groupe (topologique (avec $\mathcal{C}_1$)) des automorphismes de E ; étude de $\mathcal{G}(E)$ (normalisateurs, centralisateurs, noyaux) Si E est abélien et si $\hat{E}$ est son dual, $\mathcal{G}(E)$ et $\mathcal{G}(\hat{E})$ sont isomorphes ; applications. Si dx est la mesure de Haar sur E, $\int f(u^{-1}(x))\,dx =$
$\rho(u)\int f(x)\,dx$ et ρ est une repres. continue de $\mathcal{G}(E)$ dans R_+^* ; si E est abélien, $\rho(u) = \rho(\hat{u})$; si E est un corps et si $h_a = x \to ax$ $(a \neq 0)$, $\rho(h_a) = |a|$ est une valeur absolue sur K, d'où la théorie de Jacobson sur les corps loc.-compacts.

Jean Braconnier

22.8. Die Koeffizienten c_n in der Potenzreihe

$$g(s) = 1/\Gamma(1-s) = \sum_0^\infty c_n s^n/n!$$

werden asymptotisch ausgewertet. Aus dem Hankelschen Integral $2\pi i\, g(s) = \int_{-\beta i+\infty}^{\beta i+\infty} e^{sz+e^z} dz$ (mit $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$) folgt $\pi c_n = \mathrm{Im} \int^H e^{f(z)} dz = \mathrm{Im}\, \mathcal{H}$, worin $f(z) = n \log z + e^z$ gesetzt ist und H den nebenstehenden Weg bezeichnet. Zur asymptotischen Auswertung legt man H über den Paß, d.h. die — wie man leicht sieht — einzige Wurzel der Gleichung $f'(z) = 0$ im Streifen $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$. Ist diese $p = \alpha + i\beta$, so ist damit β festgelegt. Naheliegende Abschätzungen führen zu dem Ergebnis



(1) $\quad c_n = \sqrt{2\log n/\pi n}\; e^{\mathrm{Re}\, f(p)} \left(\sin \mathrm{Im}\, f(p) + o(1)\right).$

Mit dem Ansatz $p = (1+q)\log(-n)$ bekommt man die Gleichung $q = u + v \log(1+q)$, worin $u = -\log\log(-n)/\log(-n)$, $v = 1/\log(-n)$ gesetzt ist, und die Lagrangesche Umkehrreihe gibt

$$q = u + \sum_{k=1}^\infty \frac{v^k}{k!} \frac{d^{k-1} \log(1+u)^k}{du^{k-1}},$$

woraus eine nach Potenzen von $\log\log n/\log n$ und $1/\log n$ fortschreitende Reihe für p gebildet wird, deren erste Glieder $p = \log n - \log\log n + \frac{\log\log n}{\log n} + \pi i\left(1 - \frac{1}{\log n}\right) + \cdots$ lauten. Um aber z.B. aus (1) das Vorzeichen von c_n zu erkennen, müßte man $\mathrm{Im}\, f(p)$ bis auf $o(1)$ kennen. Hierzu ist eine mit n wachsende Zahl von Gliedern der Reihe für p erforderlich. Daher kann die Aussage (1) nicht ohne Verlust an Inhalt durch einen endlichen Ausdruck in elementaren Funktionen ersetzt werden. H. Kneser. 22.8.

23.8. Kurvenpaare in der projektiven Differentialgeometrie.

Zwei punktweise durch gleiche Parameter aufeinander bezogene Kurven $\eta(t)$, $\bar\eta(t)$ werden Kurvenpaar genannt. Bezeichnet $u(t)$ den Schnittpunkt der Tangente von $\eta(t)$ mit der Schmiegebene von $\bar\eta(t)$ (entspr. $\bar u$), so stellen $\eta, u, \bar u, \bar\eta$ ein invariant mit

dem Paar verbundenes Tetraeder dar, das als Begleittetraeder verwendet wird; Transformations- und Ableitungsgleichungen liefern das Grundgerüst. Man erhält damit, dass ein Kurvenpaar außer Bestimmung der Parameterverteilung von 6 willkürlichen, gegenüber Parametertransformation kontinuierlichen Funktionen abhängt.
Es werden in Bezug auf das Paar symmetrische Schmiegfiguren eingeführt (C_3, Quadriken, Kegel, Kegelschnitte, Komplexe). Ihre spezielle Lage, ihr ausgezeichnetes Verhalten kennzeichnet spezielle Kurvenpaare, als deren umfassendste Gruppe die sogenannten Transformierten zweiter Stufe zu nennen sind; diese ihrerseits zerfallen in die Kreuzungspaare (d.h. Paare, für die die 3-Punkte-C_3 mit der 3-Ebenen-C_3 zusammenfällt.) und in die Komplexpaare (d.h. Paare, deren Tangenten einem linearen Komplex angehören). Nur die doppelt durchlaufene C_3 ist sowohl Kreuzung wie auch Komplexpaar.

Martin Barner

22.8. Begründung der Elementargeometrie des Raums durch Transformationsgruppen.

Dean Montgomery und Leo Zippin haben nach dem Muster Hilberts (vgl. „Grundlagen d. Geometrie", Anhang IV) die Elementargeometrie des Raums mit Hilfe einer Transformationsgruppe G begründet, die sie durch folgende Axiome charakterisieren (Trans. Vol. 48. No. 1.)

1.) G = Gruppe

2.) Es existiert ein Punkt P, sodass die Untergruppe G_P von G, die diesen Punkt festläßt, eigentlich in G enthalten ist. Weiter gebe es eine Punktfolge P_n, die gegen P konvergiert, sodass die „wahren Kugeln" $G_P(P_n)$ alle zweidimensional sind.

3.) Ein dem 3. Hilbertschen Axiom analoges Axiom für Punktepaare.

Es wird im Folgenden gezeigt, daß sich dieses Axiomensystem auf folgendes reduzieren läßt:

1.) G = Gruppe

2.) Es existiert ein Punkt O, sodass G_0 eigentlich in G enthalten ist. Weiter enthalte $G_0(P)$ mindestens 2 verschiedene Punkte für jedes $P \neq 0$.

3.) Es existiert ein Bereich $\mathfrak{B}$, der einen Punkt P in seinem Innern enthält, mit folgenden Eigenschaften:

a) $G_0(P)$ = unendliche Punktmenge

b) Sei $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von Umgebungen von P mit den Eigenschaften $U_{n+1} \subseteq U_n$; $U_1 \cap U_2 \cap \ldots = P$, so gebe es jeweils für jedes U_i unter allen Transformationen aus G_0, die P nicht festlassen, aber diesen Punkt auch nicht aus U_i herausführen, jeweils eine, sodass deren genügend hohe Potenz P aus $\mathfrak{B}$ herausführt.

4.) a) Zu je 2 Punkten A u. B des Raumes existiert eine endl. Zahl $\rho(A,B)$, sodass die obere Grenze aller euklid. Entfernungen $\overline{g(A), g(B)}$ für bel. $g \in G$ gerade $= \rho(A,B)$ ist.

b). Wenn die Pkte. A_i konvergieren gegen A, so folgt, dass die $\rho(A,A_i)$ gegen 0 konvergieren.

Der Beweis gründet sich allein auf einen Satz über kompakte, zusammenhängende Transformationsgruppen des Raumes (von D. Montgomery, Am. Journ. vol. 61)

Anschließend folgt ein Referat über den eigentlichen Aufbau der Geometrie aus der zuerst genannten Arbeit von Montgomery. Kurt Leichtweiß

24-8-4

27/8

23.8.49 Probleme auf dem Gebiete der hyperkomplexen Systeme mit reellen Koeffizienten und endlicher Basis werden behandelt. Im assoziativen Fall werden insbesondere Fragen, die in Verbindung mit Funktionentheorie in allgemeinen hyperkomplexen Größen Systemen stehen, behandelt (siehe z. B. O. T., Compositio mathematica 3, Oxford Quarterly Journal ?, O. T. and J. Todd, Journal London Math. Society 17).

Olga Taussky Todd

24-8-49 <u>Propriétés topologiques dues à l'existence d'un Invariant intégral.</u>

On considère dans une variété V_n un système différentiel (Σ_0). admettant un invariant intégral (du type de la dynamique)

$$\omega = \pi - H\,dt$$ où t est le paramètre temps, et où π est une forme de Pfaff sur V_n et H une fonction numérique sur V_n. On suppose de plus que n est pair, et que π est de rang $\frac{n}{2}$ (c. à. d. $\pi^{n/2} \neq 0$).

Dans ces conditions:

a) Les ~~vari~~ trajectoires de (Σ_0) n'admettent pas une variété de section compacte.

b) Si toutes les trajectoires de (Σ_0) sont fermées, et si leur période $T(x)$ est une fonction continue, alors T est fonction de H; c. à. d. $T = T(H)$.

c) Avec les hypothèses de b) les trajectoires de Σ_0 forment une fibration de la variété $H = C^{te}$. Cette fibration n'admet pas de section (cf a)). De plus la variété de base de cette fibration admet une forme fermée de degré deux et de rang maximum; ~~de p.~~ par suite ses nombres de Betti des dimensions paires ne sont pas ~~non~~ nuls.

Reeb

27/8/49 <u>Differentialgeometrie zweidimensionaler Flächen im Euklidischen E_4.</u> Bringt man die Tangentialebenen einer F_2 im E_4 mit dem Fernraum P_3 des E_4 zum Schnitt, so entsteht dort eine Geradenkongruenz C_2. Man kann die C_2 vorschreiben, dann hängt die Bestimmung der zugehörigen F_2 von der Lösung einer linearen partiellen Difgl. 2. Ordg ab. Bestimmung ihrer Charakteristiken. Ist der E_4 Euklidisch, so P_3 elliptisch. Die (gerichteten) Geraden G des ellipt.

Raumes lassen sich eineindeutig auf die Punkte zweier Kugeln abbilden $G \leftrightarrow \{l, r\}$, derart dass den Bewegungen angewandt auf G die Drehungen der beiden Bildkugeln L, R entsprechen (Clifford, Hjelmslev, Fubini, Study). So hat die Fläche F_2 im E_4 zwei sphärische Bilder auf den beiden Kugeln L, R. Geschlossene orientierbare F_2 geben demnach zu 2 ganzzahligen topologischen Invarianten Anlass, nämlich den Überdeckungszahlen λ, ρ von L, R.

W. BLASCHKE

soll in Annali di Matematica erscheinen

26. 8. 49 Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe.

Verallgemeinerung der Methode der Lagrangeschen Resolventen zur Erzeugung zyklischer und abelscher Körper auf beliebige galoissche Körper. Statt der reinen Gleichungen tritt das Multiplikationssystem einer aus Matrizen bestehenden Faktorbasis. Beschreibende Invariante ist eine Klasse assoziierter, kommutativer, assoziativer Matrizenfaktorensysteme mit Regularitätsbedingung.

[Erscheint in Crelles Journal, Voranzeige im Archiv d. Mathem.]

Helmut Hasse

29. 8. 49. Adjungierte Extremalflächen.

J. E. Mickle (Duke Journ. 1941) hat zu Paaren adjungierter Extremalflächen transformierte solche Paare angegeben. Die Beziehungen von Relativ-Krümmungslinien und Asymptotenlinien wurde festgestellt und ein Beispiel durchgeführt.

G. Grüss.

8.9.49. Der Satz von Zorn folgt durch eine einfache Anwendung des Auswahlaxioms aus dem folgenden Lemma (s. N. Bourbaki, El. de math. I_1 (th. d. ens.) S. 36–37): Ist in einer induktiv (teilweise) geordneten Menge E eine Funktion $x \leqq fx \in E$ gegeben, so gibt es ein $z = fz$. Dies Lemma kann man nach dem Muster sowohl des ersten wie des zweiten Zermeloschen Beweises für den Wohlordnungssatz beweisen. Ein Beweis der zweiten Art wird vorgetragen.

H. Kneser.

12. 9. 49 Über Briefe Felix Kleins an Ferdinand Lindemann (1872–188?)
(Erhalten aus Lindemanns Nachlass von seiner Tochter
Frau Balser in Bensheim-(Auerbach)
Göttingen, Erlangen, München, Leipzig, Göttingen:
Clebsch-Lindemann; Math. Annalen, Kleins Englandreise 1873
Lindemann in Paris u. England. Würzburg, Freiburg
Transzendenz von π. Berufung nach Königsberg. [illegible]
Kleins Berufung nach Baltimore. Seine Italienreise
Urteile über viele deutsche u. ausländische Mathematiker
Kleins Bericht über eigene Arbeiten.
Zur Einleitung des Vortrags mit Rücksicht auf Goethejahr:
Goethes eigenhändige Bemerkung auf Aktenstück im
Weimarschen Archiv:
"Es ist eine wahre Wohltat für die Jugend die Mathematik so weit als möglich zu verbreiten und zu erleichtern"

W. Lorey

12.9.49 Adjungierte Extremalflächen. Auswertung der Diskussion vom 29.8.
Seien $\mathfrak{E}, \bar{\mathfrak{E}}$ adjungierte Extremalflächen von $\delta \iint F(p)\,du\,dv = 0$, $u, \bar{u}$ die zugehörigen Figuratrixen, die polarreziprok zur Einheitskugel sind. Übt man auf $\bar{u}$ eine Punkttransformation $\bar{u} \to \hat{u}$ aus, so ist $u \to \hat{u}$ eine Berührungstransformation. $\hat{u}$ bestimmt ein neues Variationsproblem, dessen Extremalflächen man findet, indem man $d\bar{\mathfrak{E}} \to d\hat{\mathfrak{E}}$ kogredient zu $d\bar{u} \to d\hat{u}$ transformiert. Die von Mickle

ausgezeichneten adjungierten Extremalflächen sind Spezialfälle hiervon.

Gericke.

20.9.49. Carathéodory's Königsweg ins Herz der Variationsrechnung. H. Boerner.

20.9.49. Der Satz von Zorn behauptet, dass in einer induktiv teilgeordneten Menge maximale Elemente existieren.
J. Dieudonné leitet den Satz von Zorn mit Hilfe des Auswahlaxioms aus folgendem Lemma ab:
E sei eine teilgeordnete Menge, $a \in E$, f eine Abbildung von E in sich mit $x \leq f(x)$, $\mathfrak{f}$ das System aller Teilmengen $X \subset E$, die folgenden 3 Bedingungen genügen: 1. $a \in X$, 2. Aus $x \in X$ folgt: $f(x) \in X$, 3. Hat das nicht leere $Y \subset X$ in E eine obere Grenze b, so (usw.) ist $b \in X$. }.
Unter diesen Voraussetzungen wird behauptet: 1. $\mathfrak{f}$ ist nicht leer. 2. Der Durchschnitt A aller $X \in \mathfrak{f}$ gehört zu $\mathfrak{f}$. 3. Sind $x \in A$, $y \in A$ beliebig, so ist $y \leq x$ oder $y \geq f(x)$.
Der Beweis des Lemmas von Dieudonné entspricht dem 2. Zermeloschen Beweis des Wohlordnungssatzes.

Wolfhart Zimmermann

27.9.49. Betrachtungen über die verzweigte Stufen-Theorie und verwandte Ansätze. Russell- u. Whiteheads verzweigte Stufen-Theorie war belastet durch die Koppelung mit dem Problem der Reduktion der Zahlentheorie auf die Logik. Die Behelfs-Massnahme der

Einführung des Reduzierbarkeits-Axioms kam im wesentlichen auf den Übergang zur einfachen Stufen-Theorie hinaus.

Das Programm von Weyl in seiner Schrift "Das Kontinuum" ist deshalb nicht eingehender diskutiert worden, weil ja Hermann Weyl selbst sich bald nach Erscheinen der Schrift dem Brouwerschen Intuitionismus zuwandte.

Beiläufige Bemerkung: Eine der Brouwerschen Methode ähnliche Art der Behandlung der Analysis jedoch in der Art eines strikten deduktiven Formalismus ist im Rahmen der rekursiven Zahlentheorie möglich, indem die reellen Funktionen durch Folgen rationalwertiger Funktionen rationalen Argumentes repräsentiert werden; dieser Gesichtspunkt wird insbes. in Arbeiten von R.L. Goodstein verfolgt. —

Für eine volle formale Ausgestaltung des Weyl'schen Systems bedarf es einiger weniger Hinzufügungen. Insbes. würde eine Symbolik der Mengenbildung, etwa in der üblichen Form $\hat{x}\,\mathfrak{A}(x)$, $\hat{x}\hat{y}\,\mathfrak{L}(x,y,\mathfrak{M})$, .. usw., nebst einem Axiomenschema $\epsilon(a, \hat{x}\,\mathfrak{A}(x)) \sim \mathfrak{A}(a)$, $\epsilon(a, b, \hat{x}\hat{y}\,\mathfrak{L}(x,y,\mathfrak{M})) \sim \mathfrak{L}(a,b,\mathfrak{M})$ (usw.) einzuführen sein. Zu beachten ist, dass die Gleichheit zwischen Mengen zwar in der üblichen Weise (im Sinne der Extensionalität) erklärt wird, aber nicht bei der Bildung von Mengen verwendet werden darf (jedenfalls nicht uneingeschränkt). —

Ein modifizierter Formalismus der verzweigten Stufentheorie wurde 1938 von F. B. Fitch aufgestellt; hier braucht man kein Reduzierbarkeitsaxiom, es werden dafür aber gewisse andre Verstärkungen eingeführt, insbes. eine Operation der endlichfachen Iteration einer Beziehung.

Neuerdings ist ein System ähnlicher Art, jedoch wesentlich eingeschränkter, von R. M. Martin entwickelt worden. Hier treten, wie in Weyl's System, als gebundene Variablen nur Individuenvariablen auf. Die Individuen werden jedoch von vornherein mit der Beziehung $a \in b$ eingeführt, sodass sie naturgemäss als Mengen zu interpretieren sind. Auf diese Weise wird sozusagen (gegenüber der Anordnung in den Principia Math.) eine Stufe gespart.

Das Martin'sche System — (dieses wird des Näheren beschrieben) — hat manche Vorzüge; jedoch ist nicht angenehm, dass die Ausdrücke von Sätzen in denen Zahlenvariablen auftreten, hier stets als Umschreibungen andrer Sätze gedeutet werden müssen, die keine Zahlenvariablen enthalten.

Insofern erscheint es als vorteilhafter, zu dem blossen Formalismus der verzweigten Stufentheorie von vornherein die zahlentheoretischen Axiome hinzuzunehmen (in der Grundgattung) entsprechend wie es z. B. Gödel bei dem System der Princ. Math. ausgeführt hat. Hierbei ist dann insbes. zu erwägen, in welcher Form man sachgemäss die Regel des ι-Symbols (Kennzeichnungen) einzuführen hat, insbes. im Hinblick auf die Etablierung der rekursiven Definition. (Wegen der notwendigen Vermeidung des Imprädikativen kann hierfür das Verfahren von Dedekind sowie das von Lorenzen nicht verwendet werden, jedoch kann man nach der Methode von Kalmár verfahren.)

Paul Bernays

27./28. 9. Der Gentzensche Hauptsatz über die Möglichkeit, logische Herleitungen umweglos zu führen, läßt sich von der Sequenzenlogik auch auf die sonst üblichen Systeme der Logik ausdehnen. Es wurde ein Formalismus mit den logischen Grundzeichen ∨ (oder), ‾ (nicht), (x) (alle x) entwickelt, in dem der Gentzensche Hauptsatz gilt. Wird dieser Formalismus zu einem zahlentheoretischen Kodifikat erweitert, so geht durch Hinzunahme der formalisierten vollständigen Induktion die Gültigkeit des Hauptsatzes verloren. Der Hauptsatz kann aber gerettet werden, wenn statt der vollständigen Induktion die stärkere „unendliche Induktion" aufgenommen wird. Die Herleitungen sind hier als unendliche, finit beschreibbare ~~Fiukt~~ Figuren anzusehen. Eine Kontrolle über die Kompliziertheit dieser unendlichen Herleitungen erhält man durch Zuordnung von Ordnungszahlen der I. und II. Zahlklasse. Der Widerspruchsfreiheitsbeweis wird durch eine inhaltlich angewandte

$20^{00}-24^{00}$
$11^{00}-13^{00}$

Do. 29
11^{00} –
15^{00} –
20^{00} –

transfinite Induktion über ein Anfangsstück der II. Zahlklasse geführt. Man kommt zu folgendem Ergebnis: Wird zur formalisierten reinen Zahlentheorie die formalisierte transfinite Induktion bis α hinzugenommen, so ist die Widerspruchsfreiheit durch eine inhaltliche transfinite Induktion bis zur nächsten auf α folgenden ε-Zahl beweisbar. Die entsprechende formalisierte transfinite Induktion ist im Kodifikat nicht mehr herleitbar, wohl aber bis zu jeder kleineren Ordnungszahl.

Ein entsprechender Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Analysis gelingt nur bei Zugrundelegung einer verzweigten Theorie, in der reelle Zahlen verschiedener Typen zu unterscheiden sind. Ein solcher Beweis wurde angegeben. Hier spielen die kritischen ε-Zahlen dieselbe entscheidende Rolle wie die gewöhnlichen ε-Zahlen im Kodifikat der Zahlentheorie. Die Widerspruchsfreiheit der verzweigten Analysis einschließlich der vollständigen Induktion ist nachweisbar mittels transfiniter Induktion bis zur ersten kritischen ε-Zahl. Die ~~ser~~ Ordnungszahlen unterhalb der ersten kritischen ε-Zahl lassen sich durch finit beschreibbare Zahlzeichen einführen.

Kurt Schütte

Do. 29.9.49.
$11^{00}-13^{00}$
$15^{00}-16^{00}$
$20^{00}-22^{00}$

Konstruktive Grundlegung der proj. Geometrie.

Das Ziel der Untersuchung ist die Gewinnung einer tragfähigen Grundlage der proj. Geom. Die methodische Grundhaltung ist konstruktiv. Es treten 2 Arten von konstruktiven Maßnahmen auf, das Einführen von Elementen und das Verknüpfen von Elementen. Die Elemente sind die Grundformen der Punkt, Gerade u. Ebene, das Verknüpfen führt auf die Relation Inzidenz.

Das eigentlich Neue des Aufbaus liegt in der Aufstellung von zwei „Leitforderungen“. Die erste Leitforderung ist die nach „Beständigkeit“. Sie verlangt, so zu konstruieren, daß eine die konstruierten Gebilde betreffende, wahre Aussage im weiteren Konstruktionsverlauf nicht falsch werden kann, und eine falsche nicht wahr.

Die zweite Leitforderung ist die nach „Entscheidbarkeit". Sie verlangt, daß sich für jede Aussage über konstruierte Gebilde feststellen läßt, ob über ihre Wahrheit oder Falschheit bereits eine Entscheidung, sei es unmittelbar oder mittelbar, vorliegt, und, falls dies zutrifft, wie die Entscheidung ausgefallen ist.

Die Leitforderungen schränken die von den Konstruktionsanweisungen über die Verknüpfung noch übriggelassene Freiheit ein; sie sondern dabei aus den zunächst konstruierbar erscheinenden Gebilden gerade die der projektiven Geom. aus. Die einschränkenden Verfügungen erscheinen in der Gestalt bekannter Sätze der proj. Geometrie. Das Ergebnis der Untersuchung besteht in einem wohlbestimmten System von endlich vielen „Fundamentalsätzen", die zusammen als Grundlage der Geom. ausreichen. Äußerlich ähnelt das Fundamentalsystem einem Axiomensystem; seine Zusammensetzung ergibt sich aber streng systematisch und jeder seiner Sätze erfüllt im System eine bestimmte angebbare Aufgabe. Es eröffnet sich auch ein Weg, die einzigartige Sonderstellung der proj. Geom. vor anderen axiomatisch erzeugbaren Systemen zu begründen.

Um dem anerkannten „Mangel" an mathematischen Symbolen abzuhelfen, würden die Zeichen ρ ϙ ⊕ ϙ̲, ɒ σ ⊙ ȣ neu eingeführt.

von Kaven, Detmold.

28.9.49. Für den Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit Identität gilt:
17^{30}–19^{00} Ist ein Ausdruck H für unendlich viele endliche Anzahlen erfüllbar, so ist H im Abzählbaren erfüllbar. Es genügt, den Satz für Skolemsche Normalformen $H = \forall\mathfrak{a}\,\exists\mathfrak{b}\, H_0(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ zu beweisen ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ für $a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n$). Es wird ein abzählbar unendlicher Bereich T benutzt, in dem n Funktionen $f_1, \dots, f_n$[20] erklärt sind, dass diese sich auf beliebige endliche Bereiche, in denen n Funktionen $g_1, \dots, g_n$ durch "symbolische

Auflösung von H" eingeführt sind, homomorph abbilden lassen. Jede k-zahlige Erfüllung ergibt durch Festlegung der Funktionen $g_1^{(k)}, \dots, g_n^{(k)}$ und Wahl des Homomorphismus φ_k eine erfüllende "Belegung" B_k über T für $H^* = \forall x\, H_0(x, f_1(x), \dots, f_n(x))$, wobei in T an die Stelle der Identität eine Gleichheit tritt. Die Menge der Belegungen über T wird zu einem kompakten topologischen Raum von der Struktur des Cantorschen Diskontinuums durch die Festsetzung (E eine Belegung, die nur endlich vielen atomaren Ausdrücken den Wert "wahr" gibt; $U_E(B_0)$ die durch E bestimmte Umgebung von B_0):

$B \in U_E(B_0) =_{Df} B \cap E = B_0 \cap E$ (gleichwertig mit einem Ansatz von Mostowski (Zbl. 29, 100)

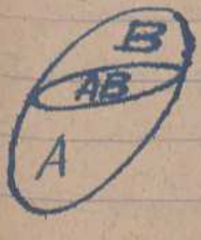
Die Mengen $\mathfrak{f}_{H^*}$ und $\mathfrak{f}_{Idt}$ der Belegungen, die H^* bzw. die identitätstheoretischen Axiome erfüllen, sind abgeschlossen. Nach Voraussetzung hat man unendlich viele B_k in $\mathfrak{f}_{H^*} \cap \mathfrak{f}_{Idt}$. Ein Häufungspunkt der B_k liegt also wieder in $\mathfrak{f}_{H^*}$ und $\mathfrak{f}_{Idt}$ und durch Übergang zu den durch die Gleichheit von B^* erhält man eine eigentliche Erfüllung von H^*, also auch von H. Durch geeignete Wahl der φ_k kann erreicht werden, dass B^* unendlich viele Klassen bestimmt.

G. Hasenjaeger (Münster)

Additive Funktionale bei konvexen Körpern

13.10.49
11–12[15]

Es handelt sich um eine Beweisskizze für den folgenden Satz: Wenn $\varphi(A)$ ein über der Klasse der konvexen Körper A eindeutig definiertes Funktional ist, welches die nachfolgend aufgeführten Eigenschaften [vgl. Figur]



I) $\varphi(A) = \varphi(A')$ $\quad A \cong A'$ (Bewegungsinvarianz)

II) $\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A+B) + \varphi(AB)$ (Additivität)

III) $|\varphi(A) - \varphi(A')| < \varepsilon$ $\quad d(A, A') < \delta_\varepsilon$ (Stetigkeit)

aufweist, so gilt

$$\varphi(A) = \sum_0^k c_\nu W_\nu(A)$$

Hierbei bezeichnen k die Dimension des zugrunde liegenden euklidischen Raumes und $W_\nu(A)$ $\nu = 0, 1, \dots k$ die Minkowskischen Quermassintegrale welche dem Körper A zukommen. Aus diesem Satz lassen sich verschiedene ältere und neuere Resultate [z.B. Formeln von Cauchy, Crofton, Blaschke u.a., insbesondere diejenigen der Integralgeometrie] leicht gewinnen

H. Hadwiger (Bern)

13. 10. 49
15.15 – 16.00

Kurzer Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für abgeschlossene Mengen des k-dim. euklidischen Raumes.
Die Ungleichung wird ~~nach~~ mit der Minkowskischen Oberfläche ausgesprochen.

H. Hadwiger (Bern)

13. 10. 49
20^h – 21^h

Struktur endlichdimensionaler Ringe mit eindeutiger Partialbruchzerlegung.

In Fortführung eines am 1. 4. 49 (vgl. Vortragsheft 1) gehaltenen Vortrages, dessen wesentliche Teile kurz wiederholt wurden, wird gezeigt, daß abgesehen von Isomorphien, die Polynomringe einer Unbestimmten die einzigen endlichdimensionalen Ringe sind, in deren Quotientenkörper die zugehörige Partialbruchzerlegung eindeutig ist. ~~Die~~ Eine notwendige u. hinreichende Bedingung dafür, daß $K[x][\xi]$ (K = Körper, ξ transzendent über K) wieder Euklidizität mit eindeutiger PBZ hat, wird noch angegeben. – Weiter wurde noch nachgetragen, daß Axiom 3 bereits aus Axiom 5 folgt und somit entbehrlich ist.

H. Ostmann

4 - III - 1950
11^h - 11^{45}

Alcune proprietà per funzioni reali di due variabili reali. – Sia $f(x,y)$ una simile funzione, definita nel quadrato $Q: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$, e continua separatamente rispetto a x ed y. Essa è allora (secondo Baiada) quasi-continua in modo regolare rispetto a x e y. Per le funzioni quasi-continue in modo regolare si costruisce la teoria degli integrali curvilinei (che può essere applicata a dimostrare ~~il~~ teorema di Looman-Menchoff). Si introduce poi (seguendo Stampacchia) il concetto di convergenza o quasi-convergenza uniforme regolare e si ricordano alcuni criteri di Stampacchia, relativi, per così dire, ad una quasi-compattezza regolare.

G. Scorza Dragoni

4-III-1950
17^{15}-16

Vengono esposte alcune estensioni dei Fixpunktsätze di Brouwer e Schauder, considerando anche il caso di trasformazioni plurivalenti

G. Scorza Dragoni

W-Strahlensysteme, Komplexflächen, Projektiv-Minimalflächen

7.3.50
20^{45}-21^{30}

Die Lie-Quadriken der beiden Brennflächen einer W-Kongruenz in den Berührungspunkten eines Kongruenzstrahles schneiden sich in einem windschiefen Vierseit.

Es wurde berichtet über geometrische Fragen, die mit diesem Satz zusammenhängen.

G. Bol

9.3.1950

Eigenschaften monofokaler Kegelschnitte lassen sich sehr einfach durch eine zur stereographischen Abbildung duale Abbildung dieser Kegelschnitte auf Raumpunkte behandeln. Dies wird nach Darlegung einiger wichtiger Sätze über das Schnittverhalten berührender Flächen zweiter Ordnung, durch einen einfachen Beweis einer Verallgemeinerung des Satzes von Dandelin verwendet, um eine Hülleigenschaft der monofokalen Kegelschnitte mit fester großer Achse 2a (Ellipsen bzw. Hyperbeln bzw. im Grenzfall $2a \to \infty$ Parabeln) auf sehr einfache geometrische Art herzuleiten, die mechanisch Th. Pöschl, elementargeometrisch O. Emersleben 1949 gefunden haben: Alle monofokalen Ellipsen, fester Hauptachsenlänge 2a, die durch einen festen Pkt P gehen, umhüllen eine Ellipse, die ~~[illegible]~~ neben dem festen Brennpkt S der Monofokalschar auch noch P als zweiten Brennpkt hat. SP ist ~~[illegible]~~ Symmetrieachse der Hüllellipse, ihre Hauptachse ist 4a – r, wenn r = SP. Verallgemeinerung auf den Hyperbel- und Parabelfall. Zusammenhang mit einem genauen mechanischen Problem (Keplersche Ellipsen fester Energie durch einen Pkt P, Hüllkurve) und einer äquivalenten Fragestellung der Planetenbewegung.

Karl Strubecker
(Karlsruhe).

L. Schwarz. 9.3.50. Lösung der Igl. 1. Art $g(y) = \int_{-A}^{A} [1 + e^{x-y}] \frac{f(x)}{x-y} dx$ und Einordnung dieses Problems in die Theorie der Funktionaltransformationen. „Beifügung" bei Iglen. von 2 Variabeln. –

9. 3. 50 Gitterpunkte in nichtkonvexen Körpern.

Ist ein bel. abgeschl. Körper K im n-dim. Raum gegeben, so kann man die Frage stellen, wie gross man die Determinante $|\Delta| \neq 0$ eines Gitters wählen darf, so dass bei geeigneter Lage von K ausser O mindest. ein weiterer Gitterpunkt in K liegt. Ein Blichfeldtscher Satz besagt, dass, wenn K ein beschr. Körper vom Vol. V_K ist und jede Punktdifferenz $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2$ (mit $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ aus K) in k liegt, man $|\Delta| \leq V_K$ wählen darf. Das Auffinden eines maximalen Körpers K für nichtkonvexen Körper k ist schwierig. Mullender gibt eine 2-dim. Lösung für einen symmetrisch zum 0-Punkt liegenden Sternbereich. Er sei gegeben durch

$$|x| \leq a \qquad |y| \leq f(x)$$

($f(x)$ stetig, einwertig, pos., mon. fallend, diff'bar), wobei x und y pos., vom 1. Grade homog. F'onen von ~~p bzw~~ p q Veränderlichen sind ($p+q=n$). Ist K geg. durch

$$|x| \leq \alpha \qquad |y| \leq f(x),$$

so muss $\alpha \leq 2a$ und

$$F(x_1, x_2) \equiv f(x_1 + x_2) - \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geq 0$$

sein. Mullender gibt eine F'on $\varphi(x)$ an, die das leistet und berechnet das Volumen V_K. Speziell für $f(x) = \frac{1}{x^{p/q}}$ ($p<q$, $p, q > 0$ ganz, $p+q=n$) gibt er eine Folge von F'onen $\varphi_q(x)$ an, die das Vol. von K konstant lassen und seine Gestalt so verändern, dass K in Richtung einer der beiden Ordinatenachsen bel. schmal wird. Der Blichfeldt'sche Satz gilt dann nach wie vor und gestattet eine Anwendung auf die simultane Approximation reeller Zahlen $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ durch Brüche mit gemeinsamem Nenner, wobei sich ergibt:

$$|\alpha_\nu x - y_\nu| \leq \frac{1}{C|x|^{\frac{1}{n-1}}} \qquad (C \leq V_K^{\frac{1}{n-1}})$$

Gerda Schlarb

Über die Modi der Syllogismen. In leichter Abänderung einer Arbeit von B. v. Freytag-Löringhoff wurden die zulässigen Schlussformen formalistisch aus der Voraus= 15. 4. 50.

setzung abgeleitet: Gegeben ein System von Dingen S, M, P, ... genannt Begriffe, und zwischen diesen eine Beziehung $S < P$ (gelesen: S ist Art von P), die transitiv ist: Aus $S < M$, $M < P$ folgt $S < P$. Der Aussagenkalkül wird benutzt.

Gericke.

16 - 4 - 50 **Espaces de Riemann dont toutes les géodésiques sont fermées.**

Problème: Une variété numérique V_n sera dite de type Γ si on peut la munir d'une structure d'espace de Riemann dont toutes les géodésiques sont fermées et de longueur continue (et par suite constante). On se propose d'examiner certaines propriétés topologiques des variétés de type Γ.

Comme variété de type Γ ~~sont connues~~ l'on connait les sphères et les espaces projectifs réels, complexes et quaternioniens.

Par ailleurs si V_n est de type Γ, la variété V^*_{2n-1} des éléments de contacts orientés à une dimension, tangents à V_n, admet une fibration en cercles, dont la base sera désignée par $W_{2(n-1)}$. Il résulte des propriétés classiques de l'invariant intégral de M. Élie Cartan que le cocycle caractéristique (premier obstacle) α de $W_{2(n-1)}$ jouit de la propriété suivante:

$$\alpha^{n-1} \neq 0.$$

Par conséquent les nombres de Betti des dimensions paires de $W_{2(n-1)}$ ne sont pas nuls. La fibration envisagée ne saurait être triviale. Les géodésiques (fermées) sont homologues à zéro (avec division).

En utilisant les relations classiques (cf. Leray) entre les groupes de Betti de $W_{2(n-1)}$ et $V^*_{2(n-1)}$, et tenant compte des propriétés de la forme α, on peut démontrer que la variété produit $S_3 \times S_3$ ne saurait être de type Γ. La même démonstration montrerait qu'en général des produits du type $S_q \times S_r$ (q, r impairs) ne sauraient être de type Γ. Une hypothèse plausible serait qu'aucune variété produit (ou fibrée) ne saurait être de type Γ.

1. Beweis eines Satzes aus einer Arbeit von Chabauty: Sind 2 Gitter A, B im R_n gegeben mit der Eigenschaft, daß jeder Gitterpunkt von B in einer Gitterrichtung von A liegt, so liegt auch jeder Gitterpunkt von A auf einer Gitterrichtung von B. Beweis mit Hilfe eines Lemmas: Es gibt Zahl λ, sodaß $E = \lambda B \subset A$. 17.4.50

2. Primzahlerzeugende Funktion (W. H. Mills): Es gibt reelle Zahl A, so daß $f(x) = [A^{3^x}]$ für jeden pos. ganzen Wert von x eine Primzahl ergibt. Beweis aufgrund des Satzes von Ingham: $p_{n+1} - p_n < K p_n^{5/8}$ (K fest für alle n), mit Hilfe eines Lemmas: Für $N > K^8$ gibt es Primzahl p mit $N^3 \leq p < (N+1)^3 - 1$.

Arno Deicke

Es wurde über einen Satz von Th. Skolem berichtet: Vorgelegt ist eine Folge von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$, wobei nur ganz-positive Argumente zugelassen und nur ganz-pos. Funktionswerte möglich sind. Dann läßt sich die Existenz einer ebensolchen Funktion $g(x)$ zeigen, so daß für alle ganz-pos. $x > x_{ij}$ (und $i < j$) stets eine und nur eine der Beziehungen 17.4.50.

$f_i[g(x)] < f_j[g(x)]$, $f_i[g(x)] = f_j[g(x)]$, $f_i[g(x)] > f_j[g(x)]$

erfüllt ist, wenn x_{ij} eine passend bestimmte ganze Zahl > 0 bedeutet.

Heinz Künle.

18. 4. 1950

Abschätzungen des kleinsten p-ten Potenznichtrestes einer Primzahl q.
Neue Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen.

Elementarer Beweis des Satzes: Für jede Primzahl $q > 23$ und jede Primzahl $p \mid q-1$ ist der kleinste positive p-te Potenznichtrest von q kleiner als $\sqrt{q}$.

Eine ungerade Zahl $n = p^{\alpha} \prod_{\varrho=1}^{r} q_{\varrho}^{2\beta_{\varrho}}$; $(p \equiv \alpha \equiv 1 (4))$ kann nicht vollkommen sein, wenn $2\beta_1 < 10$ und $\beta_{\varrho} = 1$ für $\varrho = 2, \dots, r$.

Wenn $n = p^{\alpha} \prod_{\varrho=1}^{r} q_{\varrho}^{2\beta_{\varrho}}$ ungerade und vollkommen ist, wenn ferner $(p-1, 2\beta_{\varrho}+1) = 1$ für $\varrho = 1, \dots, r$ und a die Anzahl der Primzahlen bedeutet, die in $q_1, \dots, q_r$ enthalten und $\equiv 1 (p)$ sind, so folgt $\alpha < a(a-1) \leqq (r-1)(r-2)$.

Ähnliche Abschätzungen gelten für $2\beta_1$, wenn
$(q_1 - 1, 2\beta_{\varrho}+1) = (q_1 - 1, \frac{\alpha+1}{2}) = 1$ für $\varrho = 2, \dots, r$.

Hans-Joachim Kanold.

19. 4. 1950.

I. Teil: Über eine Klasse von Funktionalgleichungen ($f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \beta_1 f(x_1) + \beta_2 f(x_2) + p_1(x_1) + p_2(x_2) + p_0$) und deren Anwendung auf Mittelwerte der allg. Form $\mathfrak{M}(f; x_1, x_2; q_1, q_2) = f^{-1}[q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)]$ nach einer Arbeit von Aczél (1947). Ferner wurden Anwendungen auf gewisse Funktionen $T(f; x_1, x_2; p_1, p_2)$ und $U(f; x_1, x_2; r_1, r_2, r)$ gegeben, die Verallgemeinerungen von $\mathfrak{M}$ darstellen.

II. Teil: Einige Fragen der Primzahlverteilung nach Erdös und Turán. Die Frage nach der Konvexität von $\log p_n$ und p_n, wo p_n die Primzahlfolge bedeutet, wurde verneint. Genauer: die Ungleichungen

$$\frac{p_{n-1} + p_{n+1}}{2} < p_n \qquad \frac{p_{m-1} + p_{m+1}}{2} > p_m$$

$$p_{n-1} p_{n+1} < p_n^2 \qquad p_{m-1} p_{m+1} > p_m^2$$

sind für unendl. viele n bzw. m erfüllt.

Heinz Kunle.

Über Mittelwerte (nach J. Aczél) 20. 4. 50

Beweis, daß für eine Funktion $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\alpha \leq x_1, \dots x_n \leq \beta$ die 5 Bedingungen

(I) M ist streng monoton wachsend,

(II) Stetigkeit

(III) „Bisymmetrie": $\psi_2(x_{11}, \dots x_{nn}) = M[M(x_{11}, \dots x_{1n}), \dots \dots M(x_{n1}, \dots x_{nn})]$ ändert seinen Wert nicht bei Vertauschung der Indizes

(IV) Reflexivität: $M(x, \dots x) = x$

(V) Symmetrie in $x_1, \dots x_n$

notwendig und hinreichend sind dafür, daß sich M in der Form $M(x_1, \dots x_n) = f^{-1}\left(\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}\right)$ (f stetig, streng monoton) darstellen läßt, d. h. daß M ein symmetrischer Mittelwert ist. (I)–(IV) ist notwendig und hinreichend für Darstellung
$$M(x_1, \dots x_n) = f^{-1}[q_1 f(x_1) + \dots + q_n f(x_n)], \quad \sum q_i = 1$$
(gewichteter Mittelwert). Eine Funktion $[x_1, \dots x_n]$, welche (I)–(III) erfüllt, läßt sich in der Form $[x_1, \dots x_n] = f^{-1}[p_1 f(x_1) + \dots + p_n f(x_n) + p]$ bezw. für $\sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$ auch in der Form $[x_1, \dots x_n] = \phi^{-1}[p_1 \phi(x_1) + \dots + p_n \phi(x_n)]$ darstellen.

Arno Deicke

21. 4. 50

Über drei Sätze aus der Geometrie der Zahlen.

Van der Corput zeigt, dass man bereits auf die Anzahl der Gitterpunkte in einem n-dim. offenen, zentralsymmetrischen konvexen Körper schliessen kann, wenn man das Volumen des kleinsten ihn einschliessenden Polyeders kennt, das nicht mehr als $2(2^n - 1)$ Seitenflächen hat. Im 2-dim. Fall gibt er für konvexe symm. Bereiche, die ausser 0 keinen Punkt eines Gitters der Det. 1 enthalten und deren Begrenzung eine Kurve mit stetigem Krümmungsradius $\rho \geq \rho_0$ ist, eine genaue obere Grenze für den Flächeninhalt an.

Im n-dim. Fall wird der Krümmungsradius ersetzt durch den n-1-dim. Inhalt $U(R)$, den der konvexe Körper K aus einer Hyperebene R ausschneidet, die im Abstande $d(R)$ von der nächsten parallelen Tangentialebene an K liegt. Er wendet hier den ersten Satz an und kann eine, wenn auch ziemlich grobe, obere Schranke für das Volumen von K angeben, wenn K außer 0

Gerda Schlarb — keinen Gitterpunkt eines Gitters der Det. 1 enthalten soll.

22. 4. 50.

Zum Problem der Zerlegungsgleichheit von Polyedern (nach einer noch unveröff. Arbeit von Hadwiger, Bern). Im Anschluß an Ergebnisse einer schon früher von Hadwiger veröffentlichten Arbeit gelingt es, neue Relationen als notw. Bedingung für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder aufzustellen, aus denen sich dann die bekannten Dehnschen Bedingungen (Math. Ann. 1905) ableiten lassen. Falls eine berechtigte Hoffnung in Erfüllung ginge, daß nämlich zwei gewisse Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ von Funktionalen $\chi(A)$ als identisch erwiesen werden können, wären die Hadwigerschen Bedingungen auch hinreichend.

Heinz Funke.

24. 4. 50

Ein Mittelwertsatz für Funktionen einer komplexen Veränderlichen (nach Heinz Huber, Zürich). Ist $f(z)$ in einer Umgebung von z_0 regulär und $f''(z_0) \neq 0$, so gibt es Kreisscheibe $\mathfrak{K}$: $|z-z_0| < S$, in der $f(z)$ regulär und die durch $f'(z)$ auf einen konvexen Bereich abgebildet wird.

Dann gibt es zu jedem z aus $\mathfrak{G}$ genau ein ξ in $\mathfrak{G}$, für das gilt $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(\xi)$. Die Stelle ξ liegt in dem Kreiszweieck, das den beiden durch z und z_0 gehenden und den Rand von $\mathfrak{G}$ berührenden Kreisen gemeinsam ist, und außerdem in einem Kreis um $\frac{z+z_0}{2}$ mit dem Radius $\frac{|z-z_0|^2}{2S}$.
ξ ist eine reguläre Funktion von z in $\mathfrak{G}$.

Arno Deicke

11.–22. 4. 50 zum 200. Todestage Joh. Seb. Bachs:
Das wohltemperierte Klavier.

H. Boerner.

3-6-50 Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen.
Bei geeigneter Normierung kann sich zwei der in den Frenetschen Formeln eingehenden Invarianten deuten als [illegible] Invarianten einer ebenen Kurve. Durch geeignete Abbildungen kann man die sämtlichen Invarianten mit einander verknüpften [illegible]

G. Bol

7.6.50. Über normierte Moduln.
Den Elementen $a, b, \cdots$ eines beliebigen Moduls wird eine "Norm" zugeordnet sodass $N(a) \geq 0$, $N(\varrho a) = |\varrho| N(a)$ (für reelles ϱ) und $N(a+b) \leq N(a) + N(b)$. Die Normierungen sind ein-eindeutig den zentrierten konvexen Bereichen zugeordnet. Sie zerfallen in Klassen, die den identisch erfüllten Ungleichungen $\sum_i N(b_i(x_1,\dots,x_n)) - \sum_k N(a_k(x_1,\dots,x_n)) \geq 0$ entsprechen. Diese Klassen bilden einen vollständigen Verband. Mehrere Sätze die hiermit zusammenhängen wurden skizziert.

F. W. Levi

4.6.50 nach dem Tee: Aus [illegible] [illegible] Größen kurze Zus.fassung früherer Vorträge über Funktional-transformationen

L. Schwarz.

5.6.50 Über eine Arbeit von Monna:

Zu einem Satz von Koksma zur Theorie der diophantischen Approximationen.

Der Verfasser überträgt einen Approximationssatz von Koksma auf eine topologische Gruppe G, die Produkt topologischer Gruppen G_i und lokal kompakt sein soll, sodass auf ihr ein rechtsinvariantes Mass existiert. Sei $x \in N$ eine abzählbare Menge aus einem top.-Raum E und $y \in Y$ eine bel. Menge aus einem top. Raum H, so soll die F'on $F(x,y)$ ihren Wertevorrat in G haben und nur für $K(x)$ (ganzwertige F'on) Punkte y in das Intervall Q^2 fallen (Q ein best. Intervall um $e \in G$). Wählt man zu jedem x ein passendes Intervall um e: $\underline{I}(x) \in Q$, das durch Umgebungen $V_i(x)$ der neutr. El. $e_i \in G_i$ bestimmt ist, sodass die Reihe

$$\sum_{x \in N} K(x)\, m(\underline{I}^{-1}(x)) \quad \text{konvergiert}$$

und konvergiert die Summe über die Punktmengen aus Q, deren i-te Koord. zu $V_i(x)$ gehört (summiert über $x \in N$), so erhält der Satz die Gestalt:

Für fast alle Punkte $\alpha \in Q$ gibt es höchstens eine endl. Anzahl von Pkten $x \in N$, für die es ein $y \in Y$ gibt mit $\alpha^{-1} F(x,y) \in \underline{I}(x)$.

Der Verfasser führt Beispiele in verschiedenen topol. Gruppen an.

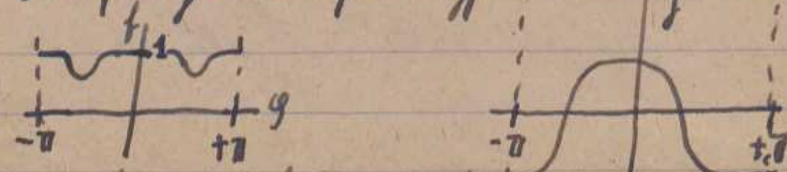
Gerda Schlarb

18 - 8 - 1950 Variétés feuilletées. Feuilles compactes.

Discussion de la famille des lignes intégrales définies dans le produit topologique $T_2 \times I$ (avec les coordonnées φ, θ, t) par le système différentiel:

$$dt = 0 \qquad [1 - t f(\varphi)]\, d\theta + t\, g(\varphi)\, d\varphi = 0$$

où f et g sont des fcts. du type:



Par recollement de deux exemplaires de $T_2 \times I$ on obtient un feuilletage de $T_2 \times T_1$.

Cet exemple montre que dans une structure feuilletée toutes les feuilles peuvent être compactes sans que la relation d'équivalence associée soit ~~[illegible]~~ fermée.

On peut construire de façon analogue une structure feuilletée pour la dimension deux dans $S_2 \times T_1 \times T_1$. Sur cet exemple on vérifie le :

Théorème 1 : Si V_q est une feuille compacte simplement connexe d'une variété feuilletée V_n, alors toutes les feuilles voisines de V_q sont homéomorphes à V_q et forment une fibration d'un voisinage de V_q.

Par contre l'exemple en question montre que si $q < n-1$ le théorème suivant est faux

Théorème 2 : Si la variété feuilletée V_n est compacte et admet une feuille compacte V_q simplement connexe alors toutes les feuilles sont compactes.

Dans la dernière partie de l'exposé on a démontré le théorème 1 (~~[illegible]~~ avec des hypothèses simplificatrices) et le théorème 2 pour $q = n-1$.

Reeb

Anwendung der Theorie der F-Räume auf Limitierungsverfahren. 18.8.50.

Das Konvergenzfeld eines Matrixverfahrens A (also die Menge der Folgen $\{s_\nu\}$, für die $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ erklärt ist und $\lim \sigma_n$ existiert), kann aufgefaßt werden als ein FK-Raum (das ist ein linearer Koordinatenraum, der zugleich F-Raum — mit der Bezeichnung der polnischen Schule: B_0-Raum — mit „koordinatenweiser Konvergenz" ist). Abbildungen von FK-Räumen untereinander mittels Matrizen sind linear, ferner sind allgemeine Aussagen über die linearen Funktionale in FK-Räumen bekannt; das allgemeine lineare Funktional im Konvergenzfeld eines Matrixverfahrens läßt sich mit Hilfe von Matrizen darstellen.

Hieraus lassen sich Sätze folgender Art herleiten: Inäquivalenzsätze (z.B.: Das C_∞-Verfahren ist keinem Matrixverfahren äquivalent); Verträglichkeitssätze (Bedingungen dafür, daß ein permanentes Matrixverfahren mit allen stärkeren verträglich ist); Abbildungssätze (Abbildungen von Konvergenzfeldern ineinander; u.ä.); Größenaussagen über Konvergenzfelder (limitiert eine konvergenztreue Matrix eine beschränkte divergente Folge, so auch eine unbeschränkte; u.ä.).

Karl Zeller

. Étude des extensions de groupes topologiques (d'après Iwasawa & Serre) ; si F et B sont 2 groupes top. à une extension E est attaché son invariant θ, qui est une rep. continue de $B \to \mathrm{Aut}\,F / \mathrm{Int}\,F$; ~~à chaque extension ayant θ~~. Le théorème classique de Zassenhaus montre que si B et F sont compacts, ou discrets, ou de Lie, on se ramène au cas de F abélien. Dans ce cas à chaque classe du groupe de cohomologie de dim. 2 rel. à θ, sur B et à coeff. dans F, correspond une extension E d'invariant θ ayant une section continue. On montre alors que, si F est de Lie (ab. ou non), toute extension de F a une section locale (Gleason) (passant par chaque point) d'où : Toute extension d'un gr. de Lie par un gr. de Lie est de Lie (on se ramène au cas où $F = R^n$ et on peut choisir dans toute classe du 2e gr. de cohomologie un cocycle indéf. différentiable). Toute extension d'un R^n par un compact a une section qui est un sous-groupe (tous les gr. de cohomologie sont nuls). En utilisant le fait que, si F est compact, $\mathrm{Aut}\,F / \mathrm{Int}\,F$ est tot. discontinu (il suffit de le voir si F est de Lie) on montre que, si F est sans centre et B connexe, E est $F \times B$; si F est abélien et B connexe, E est une extension centrale. Ces résultats permettent d'étudier les groupes de Lie connexes résolubles (on se ramène aux extensions d'un R^n ou T^n par R ou T).

Jean Braconnier, 21/8/1950

22 - V - 50 **Remarques sur l'existence de solutions périodiques de l'équation différentielle**

$$(1)\quad x'' + f(x,x')x' + g(x) = \mathcal{P}(x,x',t).$$

Levinson, Lefschetz et d'autres ont montré que moyennant des hypothèses raisonnables sur f, g, et $\mathcal{P}$ les trajectoires de (1) tracées dans le plan des phases (x,x') vérifient l'hypothèse suivante:

(H) Il existe dans le plan (x,x') une courbe de Jordan Γ telle que les trajectoires de (1) rentrent dans Γ.

Si on suppose maintenant que ϑ est périodique en t, et a pour période T, on peut montrer, d'après les théorèmes des points fixes de Brouwer, que (1) admet au moins une solution périodique.

On peut remarquer que (H) est un énoncé stable (si on modifie légèrement f, g, et ϑ, l'énoncé (H) continue à être vérifié). Par contre l'hypothèse de périodicité sur ϑ n'est pas stable.

~~On remarquant~~ On remarque cependant qu'en pratique les systèmes du type (1) dérivent de systèmes beaucoup plus complexes dans lesquels on a négligé certains termes. Cette dernière remarque permet de remplacer l'hypothèse de périodicité faite sur ϑ, par une autre hypothèse qui présente l'avantage d'être stable.

Regular Curve Families with Isolated Singularities

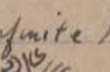
W. Kaplan has proved the following theorems about curve families, F, which are regular (locally homeomorphic to parallel lines) in a simply connected domain D:

1. There exists for each such curve family F a continuous function u, without relative extrema, and having F as level curves.

2. Each such family may be decomposed into a countable number of non-overlapping subfamilies, each filling a simply connected domain D_α and each homeomorphic (as a curve family) to the parallel lines of a half plane.

3. For each such family F there exists a "cross-section" family G

4. The curve family F is homeomorphic to the level curve family of a harmonic function.

I have extended these theorems to the case where the curve family F is allowed to have a (possibly infinite) set of isolated singularities of the multiple saddle point type: (). Thus the extended theorem 4° characterizes (topologically) the level curves of an harmonic function (with critical points) defined in a simply connected domain. Application of theorem 2 to the case of analytic functions defined in a simply-connected domain demonstrates the existence of the decomposition of the domain into relatively simple fundamental domains and gives some insight into the structure of the Riemann Surface of the inverse function.

24.8.50

W.M. Boothby

25. 8. 50 Eine Punktmenge M in einer komplex-analytischen $2n$-Mannigfaltigkeit P_n mit örtlichen komplexen Koordinaten $u_1, \dots, u_n$ heißt analytisch in einem ihrer Punkte, wenn eine offene Menge $U \ni a$ ~~und~~, in U gültige Koordinaten u_i und in U analytische Funktionen $f_i(u_1, \dots, u_n)$ gegeben sind derart, daß $U \cap M$ mit der Menge der gemeinsamen Nullstellen der Funktionen f_i übereinstimmt.

„Eine kompakte, in jedem ihrer Punkte analytische Teilmenge des projektiven Raumes P_n $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n$ (komplex)) ist eine algebraische Mannigfaltigkeit, d.h. die Nullstellenmenge einer Anzahl homogener Polynome in $x_0, \dots, x_n$."

Für diese „classical conjecture" hat Wei Liang Chow (Amer. J. Math. 71, 893–914 (1949)) einen Beweis gegeben, der die topologischen Eigenschaften der analytischen Mengen kräftig heranzieht. Hier wurde demgegenüber gezeigt, daß der Satz allein mit den naturgemäßen funktionentheoretischen und algebraischen Hilfsmitteln

H. Kneser. bewiesen werden kann.

, Étude de certains groupes localement compacts (Iwasawa, Gleason)

Un bon groupe est un gr. loc. compact G dans lequel il existe une base de filtre $\mathcal{F}$ formé de sous-groupes dist. tels que $\bigcap_{H \in \mathcal{F}} H = \{e\}$ et que G/H soit de Lie pour tout $H \in \mathcal{F}$ (L-groupes d'Iwasawa). Si G est bon et connexe, $\mathcal{F}$ converge vers $\{e\}$. Tout sous gr. d'un bon gr. est un bon gr. Tout quotient d'un bon gr. connexe est bon. Pour que H soit bon (resp G/H), il faut et il suffit que H_0 (resp G/H_0) soit bon (G étant connexe). Dans un bon groupe connexe G, il existe un plus grand sous gr. distingué compact N et G/N est de Lie; N_0 est le plus grand ss-gr. distingué compact connexe de G. Toute extension connexe d'un bon groupe par un bon groupe est 1 bon groupe. Tout groupe connexe résoluble est bon. Un bon groupe connexe possède un plus grand sous-groupe résoluble distingué $R(G)$; $R_0(G)$ s'appelle le radical de G. Si G est bon (et connexe), il est loc. isomorphe d'un groupe compact et d'un gr. de Lie local. Si G est un gr. connexe, il existe dans G un plus grand ss-gr. dist. compact connexe $K(G)$ et un plus grand ss. gr. distingué résoluble $R(G)$. $G/R(G)$ est produit de groupes de Lie simples connexes et d'un groupe P ne contenant pas de <u>tous</u> sous. gr. distingués $\neq \{e\}$. Le 5° Problème de Hilbert est ainsi résolu pour les bons groupes. Jusqu'à ici la conjecture que tous les groupes connexes sont bons.

25/8/50 par [illegible]

26-8-50 <u>Invariants intégraux dans les espaces de Finsler, et dans les espaces munis d'une notion d'aire.</u>

~~Soit~~ Soit V_n une variété de classe C_3, soit $V_n(\overset{p}{\Lambda})$ la variété des vecteurs extérieurs de degré p construits sur V_n, et soit $V_n(\overset{p}{\Lambda}{}^*)$ la variété des formes extérieures de degré p construites sur V_n. Tout système de coordonnées locales (x_i) dans V_n peut se prolonger en un système de coordonnées locales $(p_{i_1 \cdots i_p}, x_i)$ dans $V_n(\overset{p}{\Lambda}{}^*)$ ce qui permet de définir dans $V_n(\overset{p}{\Lambda}{}^*)$ les formes extérieures suivantes.

$$\theta_p = \Sigma\, p_{i_1 \cdots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \qquad \Omega_{p+1} = d\theta_p .$$

Si on se donne dans $V_n(\overset{p}{\Lambda})$ une fonction numérique $f(x, u_p)$ homogène de degré 1 en u_p (et dont seules les valeurs sur la grassmannienne importent) on dira qu'elle définit dans V_n une notion d'aire pour la dimension p. La fonction f permet, suivant les méthodes classiques, de définir une application g de $V_n(\overset{p}{\Lambda})$ dans $V_n(\overset{p}{\Lambda}{}^*)$.

Les variétés ~~minimales~~ extrémales (c.à.d. d'aire les variétés extrémales du problème du calcul des variations $\int_{V_q} f(x, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = \min$) sont définies dans ces conditions par le système différentiel suivant

$$\Omega_{p+1} \,\llcorner\, v_p = 0 .$$

Dans la dernière partie de l'exposé on a donné quelques applications de ce qui précède à l'étude des éléments de contact du second ordre attachés aux feuilles d'une variété feuilletée. Reeb

---

<u>Éléments de Calcul différentiel et Distributions sur les groupes abéliens localement compacts</u>

A toute représentation continue $t \to r(t)$ du groupe additif R des nombres réels dans le groupe abélien localement compact G on associe la dérivation $d_r f(x) = \frac{d}{dt}\{f(x + r(t))\}_{t=0}$ définie sur certaines fonctions complexes $f(x)$

définie sur G. L'ensemble $\mathcal{R}(G)$ de toutes les représentations r peut être munie d'une ~~topologie~~ structure d'espace vectoriel localement convexe en lui transportant par dualité $r \leftrightarrow \hat{r}$ la structure naturelle des représentations $\hat{r} \in \mathcal{L}(\hat{G})$ de $\hat{G}$, dual de G, dans $\hat{R} = R$ (pour les $\hat{r}$ on prend la topologie de convergence compacte, c'est aussi celle de convergence simple et $\mathcal{L}(\hat{G})$ est un espace de Baire). On montre que les sous-groupes compacts H de G tels que $\mathcal{R}(G/H)$ soit de dimension finie forment une base de filtre $\mathcal{H}(G)$ convergeant vers 0. L'image de $\mathcal{R}(G)$ dans G par l'application $r \to r(1)$ est un sous-groupe dense dans la composante connexe de 0 et les r telles que $r(1) = 0$ forment un sous-groupe totalement discontinu de $\mathcal{R}(G)$; si H est un sous-groupe compact de G l'application $r \to h \circ r$ (h : homomorphisme canonique de G sur G/H) est un homomorphisme de $\mathcal{R}(G)$ sur $\mathcal{R}(G/H)$ admettant un inverse linéaire

21-8-50 continu.

Si f est une fonction continue, continûment dérivable l'application $r \to d_r f(x)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{R}(G)$, d'où l'on déduit que pour toute $f \in \mathcal{D}(G)$ (f continue, continûment dérivable, à support compact) il existe $H \in \mathcal{H}(G)$ ~~telle~~ telque f soit constante sur les classes de G suivant H. Ceci montre de suite comment (avec un produit de composition) on peut construire des $f \in \mathcal{D}(G)$ de support contenu dans un ouvert donné aussi petit soit-il. On peut alors étudier les applications dérivables d'un groupe G dans un autre G' $x \to \theta(x)$ comme étant celles qui par composition avec tout caractère sur G' donnent une fonction de $\mathcal{D}(G)$; pour tout $x \in G$ il existe alors une application linéaire tangente $r \to \delta\theta_x(r)$ de $\mathcal{R}(G)$ dans $\mathcal{R}(G')$ qui, au moins dans le cas G connexe et θ continue, permet de retrouver θ : en particulier si $G = R$ on trouve que toute application dérivable et continue de R dans G' est composée de l'applicatis $x' \to x'(1)$ et d'une application dérivable (au sens usuel des espaces vectoriels) de R dans $\mathcal{R}(G')$.

25-8.50 Une distribution sur G est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ qui est continue sur chaque sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(K;H)$: sous espace des f continûment indéfiniment dérivables à support contenu dans K, admettant $H \in \mathcal{H}(G)$ comme groupe de périodes, et muni de la topologie de convergence uniforme des fonctions et de chacune de leurs dérivées. On donne différentes caractérisations de la plus fine topologie d'espace vectoriel localement convexe sur $\mathcal{D}(G)$ pour laquelle sont continues les distributions : c'est un espace complet, "relatively strong & boundedly closed" (Mackey) dans lequel les ensembles bornés sont contenus dans les $\mathcal{D}(K;H)$ et y sont bornés. ~~L'application par~~ Dans $\mathcal{D}(G\times G')$ l'image par $(f,f') \to ff'$ de $\mathcal{D}(G)\times\mathcal{D}(G')$ engendre un sous espace vectoriel dense, ce qui permet de définir le produit tensoriel $T \times T'$ de deux distributions.....

28.8.50 Les principales propriétés des distributions sur R^n (Schwartz L.) se démontrent aussi pour les distributions sur G (distributions à support compact, transformation de Fourier, dérivation, ... composition ...).

29.8.50 Zur Proj. Differentialgeometrie der Flächen, deren eine Schar von Asymptotenlinien Kurven dritter Ordnung sind.

Man geht von einer bel. einparametrigen Schar von C_3 aus; sind diese Asymptotenlinien der aus ihnen gebildeten Fläche, so hüllen sie 4 Kurven ein. Der Fall, dass diese 4 Kurven zusammenfallen, ist bekannt als Harmonikalfläche einer singulären Kurve, die eine Kreuzungskurve ist. Andernfalls gibt es zwei verschiedene singuläre Kurven, auf die man die Darstellung der Fläche bezieht. Diese vereinfachte Darstellung liefert leicht einige Einzelergebnisse. Man kann so die folgende Umkehrung beweisen: Besitzt eine aus C_3 gebildete Fläche 4 singuläre Kurven (die zusammenfallen können) derart, dass in ihnen Schmiegebene der

Kurve mit Schmiegebene der C_3 zusammenfallen, so bilden die C_3 Asymptotenlinien der Fläche.

M. Barner.

29. 8. 50. 23^{30}–24^{00}

W. H. Mills (Bull. Am. Math. Soc. 53, 604 (1947)) hat gezeigt, daß $[A^{3^n}]$ bei geeignetem $A>0$ für alle ganzen $n>0$ eine Primzahl ist, L. Kuipers (Indag. math. 12, 57–58 (1950)), daß derselbe Satz mit beliebigem ganzen c statt 3 gilt. Das ist ein ziemlich harmloser Scherz; denn es gilt:

Sei $f(x)$ stetig und wachsend für $x \geqq x_0$, $f(x_0) = x_0$; sei P eine Menge reeller Zahlen derart, daß für $x \geqq x_0$ zwischen $f(x)$ und $f(x+1)-1$ immer ein $p \in P$ liegt: $f(x) \leqq p < f(x+1)-1$. Bezeichnet f^n die n-te Iterierte von f, so gibt es eine reelle Zahl v, ~~mit~~ derart, daß es für jedes ganze $n \geqq 0$ ein $p_n \in P$ gibt mit $p_n \leqq f^n(v) < p_n + 1$. (Sind alle $p \in P$ ganz, so ist $p_n = [f^n(v)]$).

Beweis: Sei $x_0 \leqq p_0 \in P$; ist p_n bekannt, so sei $p_{n+1} \in P$ gemäß $f(p_n) \leqq p_{n+1} < f(p_n+1) - 1$ gewählt. Setzt man $u_n = f^{-n}(p_n)$, $v_n = f^{-n}(p_n+1)$, (f^{-n} = n-te Iterierte der Umkehrfunktion f^{-1} von f), so findet man $u_n \leqq u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$. Daraus folgt die Behauptung mit $v = \lim_{n\to\infty} v_n$. Bei den Primzahlen kann man $f(x) = x^\gamma$ setzen, wenn $\gamma \geqq 8/3$ ist; denn zwischen $f(x)$ und $f(x+1)$ gibt es wegen $f(x+1) - f(x) \sim \gamma f(x)^{1-\frac{1}{\gamma}}$ bei großem x immer Primzahlen (nach A. E. Ingham, Quart. J. Math. Oxford ser. 8, 255–266 (1937), worauf auch Mills und Kuiper verweisen). Schon aus Tschebyscheffs Ergebnis $0 < \inf \frac{\pi(x)\log x}{x}$, $\sup \frac{\pi(x)\log x}{x} < \infty$ läßt sich $f(x) = Kx$ für $0 \leqq x \leqq 1$, $f(x) = K^x$ für $x > 1$ mit $K > \frac{\sup}{\inf}$ als brauchbar nachweisen.

H. Kneser

<u>groupes abéliens sans torsion</u>; d'après G. Szekeres.

Soit G un groupe sans torsion, $G^{(n)}$ le sous-groupe de G formé par les x de la forme ny. ~~Et~~ Si p est un entier premier, $G/G^{(p)}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur $Z/(p)$; on dira qu'une famille (x_i) d'él. de G est libre (mod p) si les classes des x_i dans $G/G^{(p)}$ sont libres (sur $Z/(p)$). $G' = G / \bigcap_n G^{(p^n)}$, muni de la topologie dans laquelle les $G'^{(p^k)}$ sont des voisinages de 0 peut être complété en un groupe $\overline{G}$ qui est muni d'une stru base de Z_p-module (Z_p = entiers p-adiques), une famille (x_i) d'él. de G est dite libre (mod. Z_p) si les classes $\bar{x}_i$ des x_i sont libres dans le Z_p-module $\bar{G}$. Si les (x_i) sont libres (mod G), ils sont libres (mod Z_p); si de plus a, est libre (mod Z_p) sur les x_i, il existe un + grand h tel que $a + \Sigma \alpha_i x_i \in G^{(p^h)}$ $(0 \leq \alpha_i \leq p^h)$. Dans ces conditions si G est dénombrable, un système $(a_i)_{i\in I} = S$ (I intervalle de N^*) maximal d'él. libres (rel. à Z) a une puissance qui est un invariant de G; soit a_{i_1} le premier él. de S libre (mod Z_p) et $b_1 = p^{-h_1} a_{i_1}$ (h_1 + grand entier tel que $a_{i_1} \in G^{(p^{h_1})}$); définissons les b_k par récurrence par $a_{i_k} = p^{h_k} b_k + \sum_{l=1}^{k-1} d_{i_k,l}\, b_l$ (1) (a_{i_k} étant le premier des él. de S libre (mod Z_p) p. r. à $b_1 \dots b_{k-1}$ et les $b_1 \dots b_{k-1}$ libres mod Z_p). Les (b_k) forment un système max. d'él. libres mod Z_p; la puissance de $I(p) = \{i_k\}$ est donc un invariant de G; si $j \notin I(p)$, on définit les $b_{j,n}$ $(n \in N^*)$ par $b_{j,0} = a_j$ et $p\, b_{j,n} = b_{j,n-1} - \sum_{l=1}^{k} d_{jl}^{(n-1)} b_l$ (2) avec $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{jl}^{(n)} p^n = q_{jl} \in Z_p$. Alors tout $x \in G$ s'écrit d'une seule manière sous la forme

$$x = \sum \xi_i a_i + \sum_p \sum_{k \in I(p)} \eta_k(p)\, b_k(p) + \sum_p \sum_{j \notin I(p)} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{j,n}(p)\, b_{j,n}(p) \quad (\xi_i \in N);$$

$0 \leq \eta_k(p) \leq p^{h_k(p)}$; $0 \leq \zeta_{j,n}(p) \leq p$). Récip. il existe un seul groupe G ayant comme invariants I, $I(p)$ $(p = 2, 3 \dots)$, h_{k_p} et $q_{j,l}$ (c'est le groupe obtenu à partir d'un groupe libre à l'aide des rel. (1) et (2)). Les b_i et $b_{j,n}$ dépendent de S; cependant l'extension de Q par les p-adiques $q_{j,l}$ est un invariant de G (qui caractérise G, lorsque G est p-primitif de rang fini (cf. Kurosch, Ann. of Math., 38)).

Pour que G soit libre, il faut et il suffit que $I = I(p)$ pour tout p et que $h_k(p) = 0$ pour tout k, sauf peut être pour un nombre fini de p. Il serait heureux, mais il semble difficile, de compléter ces résultats.

en revenir
6/8/50

31.8.50. Der Vortrag von Herrn Reeb am 26.8. hat einen neuen Antrieb gegeben, die Resultate der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale – mehrere unabhängige und mehrere abhängige Veränderliche –, die bisher nur in gewöhnlicher Darstellung, nicht invariant, gewonnen wurden (Hadamard, De Donder-Weyl, Carathéodory-Boerner, Lepage, Debever, Van Hove), auf invariant zu behandelnde Probleme in invarianter Darstellung zu übertragen. Auf Wunsch wurden diese Resultate noch einmal kurz zusammengestellt.

Ein geodätisches Feld von Flächenelementen hat („Carathéodorys Königsweg") folgende Eigenschaft: man kann vom gegebenen Integral ein nur von der Berandung abhängiges so subtrahieren, dass der Integrand des Resultats für die Elemente des Feldes $=0$, für alle andern >0 ausfällt. Je nachdem man jenes unabhängige Integral als Integral über eine Divergenz oder über eine Funktionaldeterminante ansetzt, ergeben sich die Felder von de Donder-Weyl oder die von Carathéodory. Nur die letzteren führen zu einer Theorie der Transversalität, erlauben also auch alle Probleme mit beweglichem Rand zu behandeln.

Um beides unter einen Hut zu bringen, benutzt Lepage äussere Differentialformen. Ist $f(t_1 \dots t_\mu, x_1 \dots x_n, p_{11} \dots p_{n\mu})$ $\left(p_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}\right)$ der gegebene Integrand, so werden im $R_{\mu+n+\mu n}$ der sämtlichen Argumente von f die Formen $f\,dt_1 \dots dt_\mu$ und $\omega_i = dx_i - p_{i\alpha}\,dt_\alpha$ betrachtet und dann ω durch Ω mit $\Omega \equiv \omega\ (\omega_i)$ und $d\Omega \equiv 0\ (\omega_i)$ ersetzt (die Einführung von Ω wird erst in einer invarianten Theorie ganz befriedigend zu begründen sein). Die geodätischen Felder sind durch $d[\Omega]=0$ gekennzeichnet, wo $[\Omega]$ aus Ω bei Ersetzung der $p_{i\alpha}$ durch Funktionen von t u. x entsteht. Die in den ω_i quadratischen und höheren Glieder von Ω bleiben unbestimmt. Setzt man sie 0, so entsteht die Theorie von de Donder-Weyl. Auf die Carathéodorysche wird man geführt, wenn man eben verlangt, dass das geodätische Feld auch transversale Trajektorien besitzt, was darauf führt, zu verlangen, dass Ω den Rang μ besitzt. – Die quadratischen Glieder in Ω geben zu den seit Hadamard bekannten willkürlichen schiefen Zusatzgliedern in der quadratischen Form Anlass, die in der Legendreschen Bedingung vorkommt. – Kürzlich hat van Hove für die zweite Variation ein Eigenwertkriterium aufgestellt.

Boerner.

2.8.50 Neuere Entwicklung der Galoisschen Theorie nach Jacobson und einem Vortrag von F. K. Schmidt. Unter Heranziehung des Begriffs der linearen Transformationen in Vektorräumen ohne Dimensionsbeschränkung wurde bewiesen, daß jedem Zwischenkörper eines beliebigen Oberkörpers umkehrbar eindeutig ein im Sinne einer gewissen Topologie abgeschlossener Ring linearer Transformationen zugeordnet werden kann. Die Topologie ist der Krullschen Topologie der Automorphismengruppe einer unendlichen separablen algebraischen Erweiterung eines Grundkörpers nachgebildet. Der Übergang von den Ringen linearer Transformationen zu den Untergruppen der Automorphismengruppe wurde kurz angedeutet.

Ostmann

1.9.50. Über die Parallelverschiebung im Finsler'schen Raum.
Bei Cartan und seinen Nachfolgern hängt die Parallelverschiebung von einer willkürlich eingeführten „Faserung" ab, d.h. alle Messungen sind auf eine oskulierende Indikatrix bezogen, welche durch die Richtung des willkürlichen Feldes in dem betrachteten Punkt festgelegt wird. Auch der Parallelismus hängt von dieser Richtung ab. Hier handelt es sich um die Bestimmung eines „absoluten" Parallelismus, welcher auf rein geometrischem Wege gesucht wird. Die verwendete Methode beruht hauptsächlich auf der Untersuchung der Variation der lokalen Minkowskischen Metrik zwischen benachbarten Punkten des Finsler'schen Raumes. Das so erhaltene, etwas umständliche Resultat, lässt sich durch die Einführung der sog. „Verallgemeinerten Christoffel'schen Symbole" auf eine rechnerisch brauchbare Form reduzieren.

H. Rund.

9. 9. 50 : Sur la cohomologie des espaces fibrés du point de vue des formes différentielles.

Lorsqu'un groupe de Lie connexe opère dans une variété F, on définit une "algèbre différentielle universelle" (F, G). La structure de (F, G) est comparable à celle de ~~un espace~~ l'algèbre des formes différentielles d'un espace fibré de fibre F dont la base aurait pour algèbre de cohomologie l'algèbre $H_S(G)$ des invariants symétriques de la représentation linéaire adjointe de G. On a en particulier les homomorphismes classiques entre les algèbres de cohomologie

$$H_S(G) \longrightarrow H(F,G) \longrightarrow H(F)$$

qui correspondent à la projection de l'espace sur sa base et à l'injection des fibres.

Si E est un espace fibré différentiable compact de base B de groupe de structure G opérant comme plus haut dans la fibre F, on définit au moyen d'une connection dans l'espace fibré principal associé des homomorphismes $\tilde{k}$ et $\tilde{k}'$

$$\begin{tikzcd} H_S(G) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{k}'"] & H(F,G) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{k}"] & H(F) \\ H(B) \arrow[r] & H(E) \arrow[ru] & \end{tikzcd}$$

compatibles avec les homomorphismes classiques et indépendants du choix de la connection. Les propriétés cohomologiques de (F, G) sont d'accès relativement simple et se répercutent sur <u>tout espace fibré</u> de fibre F et de groupe G.

En collaboration avec A. WEIL, C. CHEVALLEY, H. CARTAN.

J.-L. Koszul.

8. 9. 50 Über eine Abschätzung bei Kreisteilungspolynomen. Ein Satz über ein System von zwei diophantischen Gleichungen. Einige neuere Bedingungen für die Existenz ungerader vollkommener Zahlen.

1. Wir bezeichnen mit $F_m(x)$ das m-te Kreisteilungspolynom, dessen nur einfache Wurzeln genau die primitiven m-ten Einheitswurzeln sind. Es sei $m = \prod_{\kappa=1}^{k} p_\kappa^{\alpha_\kappa}$ die Zerlegung von m in Primzahlpotenzen und als Abkürzung $x^{\frac{m}{p_1\cdots p_k}} = z$ gesetzt. Dann gilt

$$F_m(x) = F_{p_1\cdots p_k}(z) = \frac{F_{p_1\cdots p_{k-1}}(z^{p_k})}{F_{p_1\cdots p_{k-1}}(z)}.$$

Für $x \geqq 2$ gelten die Abschätzungen

$$\frac{2x+k-2}{2x+k-3} \leqq \frac{F_{p_1\cdots p_k}(x)}{x^{(p_1-1)\cdots(p_k-1)}} = \frac{F_m(x)}{x^{\varphi(m)}} < \frac{x}{x-1} \text{ für ungerades } k;$$

$$\frac{x-1}{x} < \frac{F_m(x)}{x^{\varphi(m)}} \leqq \frac{2x+k-3}{2x+k-2} \text{ für gerades } k.$$

Daraus ergibt sich der folgende Satz: Ist $m = \prod_{\kappa=1}^{k} p_\kappa^{\alpha_\kappa} > 6$, so existiert mindestens eine Primzahl q mit den beiden Eigenschaften

a) $q \equiv 1 \pmod{m}$; b) $q < 2^{\varphi(m)}$, wenn $\begin{cases} m \text{ ungerade oder} \\ k \text{ gerade oder} \\ \frac{m}{2} > 6,\ \frac{m}{2} \text{ ungerade.} \end{cases}$

$$q < \frac{2^{\frac{m}{p_1\cdots p_k}}}{2^{\frac{m}{p_1\cdots p_k}}-1} \cdot 2^{\varphi(m)} \text{ sonst.}$$

2. p, p_1, p_2 seien ungerade Primzahlen; a, b, c, d seien pos. gz. Dann können die Gleichungen

$$1 + p_1^a + p_1^{2a} + \cdots + p_1^{(p-1)a} = p\,p_2^c;\quad 1 + p_2^b + p_2^{2b} + \cdots + p_2^{(p-1)b} = p\,p_1^d$$

nicht zusammen bestehen.

3. $n = p^\alpha \prod_{\varrho=1}^{r} q_\varrho^{2\beta_\varrho}$ sei ungerade und vollkommen. ($p \equiv \alpha \equiv 1\ (4)$).

Es sei $q_\varrho \equiv 1 \pmod{p}$ für $1 \leqq \varrho \leqq a$; $q_\varrho \not\equiv 1 \pmod{p}$ für $\varrho > a$;

$(p-1,\ 2\beta_\varrho+1) = 1$ für $\varrho = 1, \cdots, r$.

Dann ist $a \leqq r-1$;

$\alpha \leqq \mathrm{Min}\left\{a(a-2);\ \left[\frac{3}{4}a(a-1)\right]\right\}$, wenn $p^{a-1} \nmid (1+q_\varrho+\cdots+q_\varrho^{2\beta_\varrho})$ für alle ϱ;

$\alpha \leqq \left[\frac{a-1}{2} \cdot \frac{3a-2}{2}\right]$ sonst.

Wenn p eine Gaußsche Primzahl ist, ist $(p-1,\ 2\beta_\varrho+1) = 1$ von selbst erfüllt. Wir können dann ausserdem $q_1 = 3$ annehmen. Wenn $p > 17$, gilt $a \leqq r-2$.

Es sei a die Anzahl der Primzahlen aus $q_2, \cdots, q_r$, die der Restklasse $1 \pmod{q_1}$ angehören. Es sei ferner

$(q_1-1,\ \frac{\alpha+1}{2}) = (q_1-1,\ 2\beta_\varrho+1) = 1$ für $\varrho = 2, \ldots, r$. Dann muss genau einer der folgenden Fälle eintreten

I. Aus $p \not\equiv \pm 1 \pmod{q_1}$ folgt $3 \leqq a \leqq r-2$ und

$2\beta_1 \leqq \mathrm{Min}\left\{a(a-2);\ \left[\frac{3}{4}a(a-1)\right]\right\}$, wenn $q_1^{a-1} \nmid (1+q_\varrho+\cdots+q_\varrho^{2\beta_\varrho})$ für alle ϱ;

$2\beta_1 \leqq \left[\frac{a-1}{2} \cdot \frac{3a-2}{2}\right]$ sonst.

II. Aus $p \equiv +1 \pmod{q_1}$ folgt $2 \leqq a \leqq r-1$ und $2\beta_1 \leqq \left[\frac{a}{12}(9a+7)\right]$.

III. Aus $p \equiv -1 \pmod{q_1}$ und $q_1^\xi \mid \frac{p+1}{2}$; $q_1^{\xi+1} \nmid \frac{p+1}{2}$ folgt

$a \leqq r-1$ und $2\beta_1 - \xi \leqq \left[\frac{a}{12}(9a-2)\right]$.

Wenn q_1 eine Gaußsche Primzahl ist, ist $(q_1-1,\ \frac{\alpha+1}{2}) = (q_1-1,\ 2\beta_\varrho+1) = 1$ von selbst erfüllt. Für $q_1 = 3$ gilt überdies:

I. Aus $p \equiv 1 \pmod 3$ folgt $2 \leqq a \leqq r-1$ und $2\beta_1 \leqq \left[\frac{a^2+(a+1)(a+2)}{4}\right]$.

II. Aus $p \equiv -1 \pmod 3$ folgt $a \leqq r-1$ und $2\beta_1 - \xi \leqq \left[\frac{a(2a+1)}{4}\right]$, wobei $3^{\xi} \mid (p+1)$; $3^{\xi+1} \nmid (p+1)$.

Hans-Joachim Kanold. $n = p^{\alpha} q_1^4 q_2^4 q_3^2 q_4^2 \cdots q_r^2$ kann nicht vollkommen sein.

11.9.50. Über Gitter und Volumen.

(Eine Arbeit von Hadwiger).

Der Verfasser zeigt Verallgemeinerungen der Sätze von Minkowski, Blichfeldt u. a. über den Zusammenhang zwischen Gitter und Volumen. Als Gitter wird jetzt eine beliebig im Raum verteilte Punktmenge ohne Häufungspunkt im Endlichen bezeichnet, und der Verfasser kann zeigen:

Enthält ein beschränkter Jordanscher Bereich in jeder Lage mindestens einen Gitterpunkt im Innern oder auf dem Rande, so kann er in eine solche Lage gebracht werden, dass er mindestens 2 Gitterpunkte im Innern enthält.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich 2 Sätze über die Anzahl von Gitterpunkten im Einheitsgitter in einem Körper vom Vol. $V=1$ und $V>1$, die für die Gruppe der Translationen gelten, auf die volle Bewegungsgruppe übertragen und damit verschärfen zu:

1. Ein Jordanscher Bereich vom Vol. $V=1$ kann im Einheitsgitter durch eine geeignete Bewegung stets in eine solche Lage gebracht werden, dass kein Gitterpunkt bedeckt wird.
2. Ein Jordansches Gebiet mit $V=1$ kann durch geeignete Bewegung stets in eine solche Lage gebracht werden, dass mind. 2 Gitterpunkte (im Einheitsgitter) bedeckt werden.

G. Schlarb

Theorie der ersten Randwertaufgabe.

~~Unter einer dem~~ Beim ersten Randwertproblem hat man es ~~etwa~~ mit folgendem Sachverhalt zu tun: Für jedes ~~Gebiet~~ Gebiet einer gewissen Klasse von Gebieten (welche in der Menge aller Gebiete des betr. Raumes dicht sein soll) und für jede (etwa) stetige Fkt. auf dem Rande eines solchen Gebietes soll in eindeutiger Weise für das Innere des Gebietes eine stetige Funktion bestimmt werden, die sich stetig an die Randwerte anschliesst. Die Eindeutigkeit dieser Zuordnung beruht in der Regel auf dem Umstande, dass die Funktion im Innern einer gewissen Funktionalgleichung genügt. Sieht man hiervon ab und behält nur die Forderung der Eindeutigkeit, so ~~hat man~~ ist damit ein Operator definiert, der einem Paar (T, f) (T Gebiet, f Randfunktion) eine Funktion u im Innern von T zuordnet. Wir schreiben

$$u = R_{T,f}$$

und beschränken uns auf lineare Probleme. Nur ganz wenig Beschränkungen werden dem Operator R auferlegt: zuerst der Linearität, ein gewisses Maximumprinzip und eine Kompaktheitseigenschaft: Einer ~~beschränkten~~ gleichmässig beschränkten f-Menge soll eine kompakte u-Menge entsprechen. Man kann dann bereits zeigen, dass stets eine „Grundlösung" existiert, die überall in einem Gebiet mit Ausnahme eines Punktes (des „Poles") ~~[illegible]~~ regulär ist. Für den Fall dass diese nur von r abhängt, lässt sich zeigen, dass sie im Pole mindestens die Singularität des klassischen Newtonschen oder logarithmischen Potentials aufweist. Diese erscheint also ~~also~~ für nur von r abhängige Grundlösungen als die schwächst mögliche, die bei einem Randwertoperator auftreten kann. Man kann weiter zeigen, dass bei klassischer Singularität der Grundlösung bei ~~hinreichender~~ 3maliger Differenzierbarkeit des Operators der Randwertoperator aus einer elliptischen Dgl. entspringen muss.

Tautz

Über einige Transformationen im R_3, die als Verallgemeinerungen der Zentralkollineation angesehen werden können. 11. 9. 1950.

Während bei der Zentralkollineation im R_3 der Ort der Inzidenzpunkte (außer dem Kollineationszentrum O) eine Ebene α und der der Bilder der Fernpunkte eine zu α ∥ Ebene ist, werden als die entsprechenden Örter für die zentrischen Verwandtschaften nun krumme Flächen (die in Bezug auf das Zentrum O der Transformationen ähnlich u. ähnlich gelegen sein müssen) gewählt und die Forderung der Projektivität der Reihen entsprechender Punkte auf den Strahlen durch O (wie bei der zentr. Kollineationen) beibehalten. Spezialfälle, in denen die genannten Flächen Kugeln oder gewisse Zylinder u. Kegel sind, werden näher untersucht u. für diese, da sie sich zu Verallgemeinerungen der Reliefperspektive eignen, zweckmäßige Konstruktionsprinzipe angegeben. Von mehreren Sätzen, die sich bei diesen Betrachtungen ergeben, seien erwähnt: „Transformiert man einen Kegelschnitt aus seinem Brennpunkt mittels zentr. Kollineationen mit derselben Charakteristik, so haben die resultierenden Kegelschnitte denselben Parameter. Ist p der Parameter des gegeb. Kegelschnittes, c der Wert der Charakteristik, so ist der Parameter des resultierenden Kegelschnittes $\frac{p}{c}$." und „Die Schnittkurven eines Kegels 2. Gr. mit Ebenen, die durch einen Punkt O seiner Fokalachse z gehen, werden aus allen Punkten von z durch Kegel projiziert, deren Spurkurven mit der Ebene durch O senkrecht z Kegelschnitte von festem Parameter sind."

F. Rötter

28. 8. 50. Einige Fragen aus der Geschichte der Mathematik.

1. Bemerkungen zum Prioritätsstreit Leibniz-Newton, die darauf hinzielen, die Verschiedenheit der beiden Persönlichkeiten herauszustellen.

2. Inwiefern ist die Mathematik des Barockzeitalters barock?

3. Kant, die Nichteuklidische Geometrie und die modernen Auffassungen von den Grundlagen der Mathematik.

Gericke.

14. 9. 50. Äquivalenz der Minkowskischen Vermutung über den Grenzfall des Linearformensatzes mit dem Satz von Hajos über die Einfachzerlegung Abelscher Gruppen, gezeigt mittels Sätzen über die definierenden Relationen abelscher Gruppen.

Gericke.

15. 9. 50 Zunehmende Funktionalen.

Le problème posé est le suivant:

Dans quels cas, une fonction $F(x)$ positive non décroissante définie sur un espace X pourvu d'une structure d'ordre peut être considérée comme la valeur pour l'ensemble $E[y; y<x]$ d'une mesure de Radon positive définie sur X.

L'étude est faite dans les conditions ci-dessous:

X est un sous-espace de l'espace $\mathfrak{X}$ des applications continues d'un espace compact $\mathcal{C}$ sur un espace métrique ordonné $\mathfrak{E}$.

La structure d'ordre de $\mathfrak{E}$ est supposée "en harmonie" avec la topologie de $\mathfrak{E}$, en ce sens que les ensembles

$$E[\eta; \eta<\xi] \quad \text{et} \quad E[\eta; \eta>\xi]$$

sont fermés.

Nous écrivons $\eta \ll \xi$ pour exprimer que η appartient à l'intérieur de $E[\eta; \eta<\xi]$.

Et nous supposons que les segments $E[\eta; \xi_1<\eta<\xi_2]$ ont tous un diamètre fini et que tout segment, intervalle $E[\eta; \xi_1 \ll \eta \ll \xi_2]$, semi-segment $E[\eta; \xi_1 \ll \eta < \xi_2]$ et toute intersection d'un nombre fini de tels ensembles est décomposable en au plus $\aleph_0$

semi-segments disjoints de diamètres inférieurs à un nombre positif donné.

La métrique et l'ordre de $\mathcal{E}$ permettent de définir un ordre et une métrique sur $\mathcal{X}$, en posant, si $\xi = x(t)$ est une application continue de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{E}$

pour la distance $\quad d_{\mathcal{X}}(x,y) = \max_{t\in\mathcal{T}} d_{\mathcal{E}}(x(t), y(t))$

pour l'ordre $\quad y < x \quad$ si $\quad y(t) < x(t) \quad t \in \mathcal{T}$.

Du sous-espace X de $\mathcal{X}$, on suppose qu'il possède les propriétés suivantes.

1°) il est compact à distance finie.

2°) les ensembles $E[y;\ x\in X,\ y\in X,\ y \text{ non} \gg x,\ y \text{ non} \ll x]$ sont compacts.

3°) X contient inf.(x,y) chaque fois qu'il contient x et y.

4°) Les hypothèses ci-dessus assurent l'existence d'un plus grand élément $\bar{x}(\xi_0)$ vérifiant $\bar{x}(t_0) = \xi_0$.

Nous supposons que si $\xi_0' \ll \xi_0$, $\bar{x}(\xi_0') \ll \bar{x}(\xi_0)$

Hypothèse analogue pour le plus petit élément $\underline{x}(\xi_0)$ vérifiant $\underline{x}(t_0) = \xi_0$

5°) Pour tout $x \in X$ (sauf si x est l'éventuel plus petit ou plus grand élément de X), on peut trouver quelque soit $\varepsilon > 0$, des éléments y et z tels que

$$y \gg x \qquad d(x,y) < \varepsilon$$
$$z \gg x \qquad d(x,z) < \varepsilon.$$

Il est à noter que toutes ces hypothèses sont vérifiées dans le cas où $\mathcal{T}$ étant le segment numérique $(0,1)$, $\mathcal{E}$ est l'espace euclidien R^p ordonné par la loi : un vecteur est positif si toutes ses coordonnées le sont, et X l'espace des applications de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{E}$ ayant un module de continuité donné.

La fonctionnelle $F(x)$ est supposée 1°) positive 2°) non-décroissante c'est à dire que $x < y$ entraîne $F(x) \leq F(y)$ 3°) continue à droite c'est à dire que l'on a $F(x) = \lim_{\mathcal{F}} F(y)$ où $\mathcal{F}$ est le filtre ayant pour base les ensembles $E[y;\ z > x,\ y < x]$

Ceci étant, nous introduisons les systèmes S comprenant $p+1$ éléments arbitraires de X, l'un noté x et les autres u_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ et vérifiant $u_i < x$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ et nous posons

$$\Delta(S) = F(x) - \sum_i F(u_i) + \cdots + (-1)^k \sum_{(i_1 \ldots i_k)} F[\inf. u_{i_1} \ldots u_{i_k}] + \cdots + (-1)^p F[\inf. u_1, \ldots u_p]$$

les sommations étant étendues aux combinaisons d'indices.

On peut alors énoncer le théorème suivant

La condition nécessaire et suffisante pour que $F(x)$ soit la valeur pour les sous-ensembles $E[y; y < z]$ de X, d'une mesure de Radon positive définie sur X est que l'on ait

$$\Delta(S) \geq 0$$ pour tous les systèmes S.

a Remarque On remarquera que cette condition généralise celle qui est relative aux fonctions croissantes de plusieurs variables réelles.

18.9.50. Skizze der Theorie der Verbände.

Gericke.

19.9 1950 Über Parallelverschiebung und Krümmungsverhältnisse in Finslerschen Räumen:—

Nachdem die Beziehungen zwischen Riemann'schen, Minkowski'schen und Finslerschen Räumen ausführlich dargestellt wurden, wurde die Parallelverschiebung nochmals erklärt (vergl. 1.9.50). Hierauf wurde die Krümmungstheorie begründet, indem als Mass der Krümmung die „Defekte" zweiter Ordnung zwischen dem Finslerschen Raum und dem Minkowski'schen Tangentialraum, ~~der~~ welcher jedem Punkte des Finsler'schen Raumes zugeordnet ist, angesehen wurde. Dieses führt zu einem Studium der „Geodätischen Abweichung", woraus sich naturgemäss ein Krümmungstensor ergiebt, welcher zu einer Gauss'schen Krümmung als Funktion von Ort und Richtung führt. Durch einen Integrationsprozess erhält man dann eine „absolute" Krümmung des Finsler'schen Raumes, welche nur vom Ort abhängt. Auch ergiebt sich aus der Untersuchung über geodätische Abweichung die Gleichung von Jacobi, welche uns erlaubt, Aussagen über „Probleme im Grossen" anzugeben. Das Krümmungsmass lässt sich auch geometrisch sehr klar deuten, indem man die Umfänge der Indikatrix (Minkowski'sche Einheitskugel) ~~mit~~ und der geodätischen Kugel (Finslerische Einheitskugel) mit einander vergleicht, wo beide Flächen auf denselben Punkt bezogen sind. Eine analoge Formel ergiebt sich ~~auf~~ auch für die Flächeninhalte dieser beiden Flächen. Dasselbe Krümmungsmass tritt auch in einer zu dem klassischen Satz von Gauss-Bonnet analogen Formel für Finslersche Räume auf. Es ist zu bemerken, dass die hier benutzten Krümmungsbegriffe keineswegs mit ~~dem~~ denen von Cartan, Berwald und ihren Nachfolgern übereinstimmen.

H. Rund.

25.9.50. Bericht über einen Satz von E. Hopf (Proc. nat. Acad. Sci. USA, 47-5

„Ist S eine geschlossene Fläche mit Riemannscher Metrik, welche die Eigenschaft hat, daß auf ihr keine geodätisch-konjugierten Punkte existieren, so gilt: $\int K d\sigma \leq 0$; d.h. S hat ein Geschlecht ≥ 1, (falls S orientierbar ist). Setzen wir voraus, daß $\int K d\sigma = 0$ sei, so folgt sogar $K \equiv 0$."

Zum Beweise wird der Tangentialraum Ω von S herangezogen, in welchem ein invariantes Volumenmaß durch $dV = d\sigma \cdot d\varphi$ definiert wird ($d\varphi$ ist das Winkeldifferential). Dieses Maß ist weiter invariant gegenüber allen Homöomorphismen von Ω, die durch Abtragen einer von geodätischen Strecken gewisser Länge erhalten werden. Es gelingt weiter, aus den Lösungen der Jacobischen Variationsgleichung eine Funktion u des Tangentialraums Ω zu konstruieren, welche über Ω integrabel ist. Sie löst die Riccatische Differentialgleichung: $u'(s) + u^2(s) + K(s) = 0$ längs einer geodätischen Linie.

K. Leichtweiß Das Endergebnis ergibt sich dann durch eine 2-malige Integration dieser Gleichung nach s und dV nach einigen Umformungen in wenigen Schritten

27.9.50. Überblick über relative Differentialgeometrie im affinen Raum: —

Die Theorie zweier durch parallele Tangentenebenen aufeinander bezogenen Flächen wird im Anschluss an Arbeiten von E. Müller, Haar, Berwald und dem Vortragenden entwickelt und gezeigt, wie sich darin die übliche elementare Flächentheorie nicht nur, sondern auch diejenige der raumisotropen und der homogenen Affinitäten von Blaschke bzw. Salkowski als Sonderfalle einordnen lässt. Die Minkowskische Theorie der konvexen Körper und die damit verbundene Geometrie mit einigen Anwendungen sowie die Theorie affininvarianter Variationsprobleme von Haar lassen sich auf die natürlichste

Süss. Weise einbauen.

23-11-50. Géométrie infinitésimale directe et équations aux dérivées partielles du 1er ordre $f(x,y,z,p,q) = 0$

La géométrie infin^le directe reprend des théorèmes obtenus dans l'espace euclidien comme applications de l'analyse classique. Par exemple le théorème de Meusnier (lieu des centres de courbure des courbes d'une surface S tangentes en M à MT = cercle passant par M dans un plan normal à MT) n'est au fond qu'une proposition presque immédiate de géométrie des ensembles. On l'obtient en introduisant l'ensemble limite des cercles (M, MT, M') où M' est un point infiniment voisin de M (tel que lim MM', MT = 0) sur l'ensemble étudié. Dans les questions soulevées par l'étude de $f(x,y,z,p,q)=0$, il suffit de considérer certains ens. lim. de droites, introduits dans un esprit analogue. Ce sont le CONTINGENT, le PARATINGENT (voir Haupt, Differential und Integral Rechnung, 2e Band). Au delà de la méthode ancienne de Lagrange (extérieure au champ des mathématiques utilisables, c-a-d donnant des méthodes d'approximation correctes), et de la méthode de Cauchy, on est conduit — justement pour montrer les propriétés de stabilité dont bénéficie cette dernière — à définir

a) des intégrales contingentes, en liaison avec la théorie des champs de cônes convexes (cf. Marchaud, Compositio Mathematica, 1936)
et aussi (mon étude : Analyse géométrique & problèmes aux dérivées partielles, Revue Scientifique 1948)
b) des intégrales paratingentes, dont l'objectivité apparaît en divers problèmes : étude des solutions d'une
(voir mon mémoire Journal de Math. pures et appliquées, 1937)

$$f(x, y, z, p, q, \varepsilon) = 0$$

qui tend vers une éqn aux différentielles totales non intégrable [cas de $(y-p)^2 + q^2 = \varepsilon^2$ qui $\rightarrow$ $dz = y\,dx$] ; extension à $f(x, y, z, p, q) = 0$ de la théorie faite pour les éqns diffles ordinaires $F(x, y, y') = 0$ en vue de faire apparaître les points de rebroussement des intégrales. Pour $f(x, y, z, p, q)$ possibilité analogue pour les arêtes de rebrousst. par projection d'intégrales ptgtes de l'éqn linéaire en u dans l'espce (x, y, z, u) à laquelle on est conduit en exprimant la condn d'intégrabilité d'un syst.

$$p = A(x, y, z, u) \qquad q = B(x, y, z, u) \quad \text{équiv}^{t} \text{ à } f = 0$$

N.B. M. Ehresmann signale certains travaux récents de M. Kaplan en relation avec ceux de M. Marchaud.

G. Bouligand

24.11.50 [illegible]

[illegible] M. Hall (Projective planes, Transact. 54, 1943)*) [illegible] 0 [illegible] 1) [illegible] (a, b, c) [illegible] a, b, c [illegible] (a, b, c) [illegible] x = c [illegible] y = (x, a, b) [illegible] a + b = (a, 1, b), ab = (a, b, 0), [illegible] 0 [illegible] 0 [illegible] 1. [illegible]

*) [illegible] : R. Baer, Homogeneity of projective planes, Am. J. 64 (1942).

$(a,b,c) = ab + c$ (bei festgehaltenem Koordinatensystem!) verwenden. Denn es ist die Gültigkeit zusammen mit der Assoziativität der Addition gleichbedeutend mit der Gültigkeit des „kleinen Desargues" für die Schar der Parallelen zur y-Achse. Gilt der „kleine Desargues" für die Schar der Parallelen zur y-Achse sowie für die Schar der Parallelen zur x-Achse, so gilt er für jede Parallelenschar und es gilt $(a+b)c = ac+bc$ sowie $a+b=b+a$. Aus $(a+b)c = ac+bc$ folgt umgekehrt der „kleine Desargues" für jede Parallelenschar. Der algebraische Kern des Beweises von $a+b=b+a$ läßt sich in folgendem Satz aussprechen: Ist in einer additiv geschriebenen Gruppe G eine als Multiplikation geschriebene Verknüpfung mit den beiden Eigenschaften 1.) $-xs+xr=t$ ist eindeutig auflösbar für $s \neq r$, 2.) $(a+b)c = ac+bc$ [oder statt 2.) auch: $(a+b)c = bc+ac$] gegeben, so liegt jedes Element a, für welches jede Gleichung $c+a-c = ax$ auflösbar ist, im Zentrum von G.

Bei Gültigkeit und Assoziativität der Addition läßt sich der Koordinatenbereich kennzeichnen als eine Gruppe bzgl. +, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$, $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$

II. $-xs + x\cdot r = t$ ist eindeutig auflösbar für $s \neq r$

III. $r\cdot x - s\cdot x = t$ ist auflösbar für $s \neq r$.

Die Anordnung der Ebene drückt sich aus in einer Anordnung der Gruppe, für welche noch aus $a<b$ und $s<r$ stets $-as+ar < -bs+br$ folgen muß. Es gibt sogar archimedisch angeordnete Ebenen dieser Art, welche nicht desarguessch sind. Fordert man dagegen noch ein Distributivgesetz und die Assoziativität der Multiplikation, so ist der Koordinatenbereich ein Körper (kommutativ!), während (bei archimedischer Anordnung) es nichtarchimedisch angeordnete nichtdesarguessche Ebenen dieser Art gibt.

G. Pickert.

27.11.50. Auflösung von Gleichungssystemen.

Es werden zur Diskussion des Gleichungssystems $f_\nu(x_1, \dots, x_n) \equiv f_\nu(X) = 0$ die Grössen eingeführt

$$\Delta_p(P) = \Big[\sum_{\nu,\mu} \Big|\frac{\partial x_\mu}{\partial f_\nu(P)}\Big|^p\Big]^{\frac{1}{p}}, \quad \Delta_q^*(P) = \Big[\sum_{\nu,\mu,\kappa} \Big|\frac{\partial^2 f_\nu(P)}{\partial x_\mu \partial x_\kappa}\Big|^q\Big]^{\frac{1}{q}},$$

wo die Matrix $\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial f_\nu(P)}\right)$ die inverse Matrix zur Jacobischen Matrix $\left(\frac{\partial f_\nu(P)}{\partial x_\mu}\right)$ ist und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Dann ist das erste Hauptergebnis der Theorie, dass wenn in A $f_\nu(A) = b_\nu$, $[|b_\nu|^q]^{\frac{1}{q}} = \rho$, und in der Umgebung $\sum |x_\nu - a_\nu|^p = \varrho^p$ von A durchweg $\Delta_p(P)$ endlich und $\leqq T_p$ ist, dann das Bild jener Umgebung vermöge $y_\nu = f_\nu(P)$ den ganzen Bereich $\sum |y_\nu - b_\nu|^q = \left|\frac{\varrho}{T}\right|^q$ enthält. Der zweite im Vortrag hergeleitete Satz besagt, dass wenn $(c_{\mu\nu})$ eine quadratische Matrix ist, deren Elemente von $t_1, \dots, t_k$ differenzierbar abhängen, man dann hat,

$$(c_{\mu\nu})^{-1} = (\gamma_{\mu\nu}), \quad [|\gamma_{\mu\nu}|^p]^{\frac{1}{p}} = \Delta_p,$$

$$\delta = \sum_\kappa l_\kappa \frac{\partial}{\partial t_\kappa}, \qquad \Delta_q^* = [\sum |\delta c_{\mu\nu}|^q]^{\frac{1}{q}}$$

gesetzt, die beiden Relationen

$$\Big[\sum_{\nu,\mu} |\delta \gamma_{\mu\nu}|^p\Big]^{\frac{1}{p}} \leqq \Delta_p^2 \Delta_q^*,$$

$$\Big|\delta \frac{1}{\Delta_p}\Big| \leqq \Delta_q^*.$$

Weitere Anwendungen der skizzierten Ansätze wurden besprochen.

A. Ostrowski

24.11.50. Über die Struktur der vollinvarianten Untergruppen freier Gruppen.

Es sei F eine freie Gruppe und $\mathfrak{N} \subseteq F$ eine vollinvariante Untergruppe. Jede Gruppe $\mathfrak{N}$ kann erzeugt werden, indem man ein System von Worten $w(x_1,\dots,x_n)$, w', w'', … in unbestimmten Variablen $x_1,\dots,x_n$ angibt und für x_i beliebige Elemente aus F einsetzt. $G = F/\mathfrak{N}$ ist dann die „maximale“ Gruppe mit dem System von „Regeln“ $w=1$, $w'=1$, … . $F = F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ sei die Kette der Untergruppen der absteigenden Zentralreihe von F und $\mathfrak{A}_n(F) = F_n/F_{n+1}$. Entsprechend sei

$\mathfrak{A}_n(G) = F_n / \{(F_n,\mathfrak{N}) \cdot F_{n+1}\}$.

Durch Zuordnung eines Lieschen Ringes Λ zu F nach Magnus gehört dann zu $\mathfrak{A}_n$ der Modul Λ_n aller Formen in Λ, homogen vom Grade n in den Erzeugenden. Dem Durchschnitt $(F_n,\mathfrak{N})$ ist dann ein Teilmodul Φ_n in Λ_n zugeordnet. Dann ist $\mathfrak{A}_n(G)$ isomorph zu $\Lambda_n^* = \Lambda_n/\Phi_n$. Nach der Darstellungstheorie ist eine Aufspaltung von Λ_n in irreduzible Teilmoduln möglich; wegen der Vollinvarianz von $\mathfrak{N}$ ist dann Φ_n Summe von solchen Teilmoduln.

Zu dem System von Worten w aus $\mathfrak{N}$ gehört dann ein System von Formen f_n in Φ_n, die ~~in der Gestalt~~ ξ als Summe von Produkten $[\cdots[[\xi_{i_1}\xi_{i_2}]\xi_{i_3}]\cdots]$ mit n verschiedenen Variablen geschrieben werden. Das bedeutet, daß Φ_n allein durch einen Operator Θ_n im Gruppenring der symmetrischen Gruppe S_n bestimmt ist.

Als Anwendung wird gezeigt: Zu $\mathfrak{N} = F''$ gehört der Teilmodul $\sum \Lambda_n^\alpha$ für alle $\alpha < [n-2,2]$, das heißt $\Lambda^* = \Lambda_n / \Phi_n$ besteht aus einem irreduziblen Teilmodul Λ^α zur Zerlegung $\alpha = [n-2,2]$. Zwischen F_n und $(F_n, F'')\cdot F_{n+1}$ lassen sich demnach keine vollinvarianten Untergruppen von endlichem Index einschieben.

[illegible]

24/1/50 Sur les approximations diophantiennes linéaires réelles

Soient $L_i(X,A) = x_i + \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, x_{p+j}$ $1 \le i \le p$. ($p+q=n$) un système de formes linéaires à coefficients réels. $L(X,A) = \mathrm{Max}\,|L_i(X,A)|$ $H(X) = \mathrm{Max}_{j=1}^{q}\, |x_{p+j}|$.
L'étude des solutions de $L(X,A) \le \varphi(t)$ et $H(X) \le t$ $\varphi(t)$ fonction >0 décroissante en entiers X et le problème analogue pour $L(X+Y_0)$ donne des résultats classiques pour la signature ($p=1$ $n=2$) : I théorème de Dirichlet Minkowski II théorème de Kintchine. III théorème de Tchebycheff Minkowski IV théorème de Kintchine-Morimoto. Pour une signature $(p,n) \neq (1,2)$. La généralisation de I est bien connue. Les problèmes correspondant à II III IV n'ont été étudiés que pour des signatures particulières $(1,3)$, $(2,3)$ $(1,n)$, $(n-1,n)$ suivant les cas (Blichfeldt Khintchine). Dans un travail en collaboration avec Mlle Lutz nous avons pu étudier le cas général. L'analogue de IV vaut pour toute signature. Au contraire pour toute signature $\neq (1,2)$ il y a des systèmes "singuliers" non triviaux ne satisfaisant pas aux analogues de II et III. Voici par ex l'énoncé pour problème II.. " Pour toute signature $(p,n) \neq (1,2)$ il existe un système A "pur" tel que $L(X,A) \le \varphi(t)$ $0 < H(X) \le t$ ait une solution entière X pour tout t avec $\varphi(t) = 1/t^{\frac{q}{p}-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ convenable) plus précisément si $p \le \frac{2}{3}(n-1)$ on peut prendre $\varphi(t)$ (>0 décroissante) arbitraire. si $n > p \ge n/2$ on peut prendre $\varphi(t) = \psi(t)/t^{q/(n-1)}$ $\psi(t)$ croissante tendant vers l'infini arbitraire.
Mademoiselle Lutz indépendamment a étudié les problèmes analogues pour les approximations diophantiennes linéaires p-adiques

Chabauty

24.11.50 Ganze transzendente Lösungen algebr. Differentialgleichungen.

Die Frage nach ganzen Lösungen gewisser Typen gewöhnl. Dgl. ist vielfach untersucht worden. So ist jede ganze Lösung von $w^{(n)} = f(w)$, $f(w)$ ganz in w und nicht linear, eine Konstante. Dieses Ergebnis läßt sich verallgemeinern. Es gilt nämlich: In der Dgl. $P(z, w, w', \dots, w^{(p)}) = f(w)$ sei P ein Polynom in den angegebenen Veränderlichen und $f(w)$ ganz transz. in w. Dann ist jede ganze Lösung der Dgl. eine Konstante.
Der Beweis stützt sich auf den 1. und 2. Hauptsatz der Wertverteilungslehre. Die Diskussion der algebr. Dgl. $P(z, w, w', \dots w^{(p)}) = 0$ gelingt mit Wiman's Theorie des Zentralindex $\nu(r)$ bei g. tr. Funktionen. Für eine grosse Klasse algebr. Dgl. läßt sich dann die Ordnung einer g. tr. Lösung nach beiden Seiten durch Zahlen, die direkt der Dgl. entnommen werden, abschätzen. Die Schranken sind scharf. Diese Ableitung enthält eine Reihe bereits bekannter Resultate, z. B. einen Satz von Perron und eine Verschärfung von Pólya: In ~~d~~ $a_0(z) w^{(p)} + a_1(z) w^{(p-1)} + \dots + a_p w + a_{p+1}(z) = 0$ seien die Koeff. Polynome vom Grad $\le s$ und $a_0(z)$ habe genau den Grad s. Dann ist jede g. tr. dieser Dgl. von der Ordnung $\lambda \le 1$.

~~Ist~~ In $w^{(p)} + a_1(z) w^{(p-1)} + a_p(z) w = 0$ seien die Koeff. ganze Funktionen und $w_1, \dots, w_p$ ein Fund.system der, wobei alle $w_j(z)$ von endlicher Ordnung sind. Dann folgt aus der Wertverteilungslehre, daß die Koeff. Polynome sind. Ist noch die Ordnung λ_j von $w_j(z)$ gleich $1+\varrho$, so gilt weiter Grad von $a_1(z)$ bzw. von $a_p(z)$ ist $\le \varrho$ bzw. ~~$\le$~~ $p \cdot \varrho$. Übertrg. auf $w^{(p)} + a_1 w^{(p-1)} + \dots + a_p w = 0$ unter gewissen Vor. möglich. $F(z, w, w') = 0$ hat keine g. tr. Lösung der Ordnung Null. Für allgemeine ~~Dgl.~~ algebr. Dgl. gilt das nicht, wie Valiron zeigte. Eine Funktion der Ordnung Null, die beinahe dieselbe Nullstellenverteilung hat wie die Valironsche, wird angegeben. Sie genügt der Funktionalgl. $f(sz) = p(z) f(z) + q(z)$, $|s| > 1$, p, q Polynome, $p'(z) \not\equiv 0$, und genügt daher keiner algebr. Dgl.

Wittich.

Räume mit Mittelbildungen. 25.11.50.

Ein „verallgemeinertes Mittel von n Argumenten" in einem Raum R (kurz: n-Mittel in R), $n>1$, ist eine stetige Funktion $M(x_1,\dots,x_n)$ die n Punkten $x_1,\dots,x_n$ von R einen Punkt von R zuordnet, derart dass (1) $M(x_1,\dots,x_n)$ symmetrisch in $x_1,\dots,x_n$ ist, und dass (2) $M(x,\dots,x)=x$ ist für alle $x\in R$ (m.a.W. eine Abbildung des symmetrischen Produktes von n Exemplaren von R auf dessen Diagonale, die auf der Diagonale die Identität ist). (Vgl. auch Arbeiten von Aumann, insbes. Math. Annalen 119.). Es werden notwendige Bedingungen dafür gesucht, dass in R ein n-Mittel für einen bestimmten Wert von n, oder für alle $n>1$, existiert.

Satz 1. Wenn in R ein n-Mittel existiert, dann haben alle Homotopiegruppen π_r $(r\geq 1)$ von R die Eigenschaft E_n: Zu $\alpha\in\pi_r$ ex. ein $\alpha_0\in\pi_r$, so dass $\alpha=n\alpha_0$. – Für abelsche Gruppen mit endlich-vielen Erzeugenden ist E_n äquivalent mit E_n': Die Ordnung eines jeden Elementes ist zu n teilerfremd. – Auf einer Sphäre S^r gibt es also für kein n ein n-Mittel, ebenso für weitere Beispiele.

Satz 2. Wenn in R ein n-Mittel existiert, dann ist die Fundamentalgruppe π_1 Abelsch.

Die Sätze 1 und 2 lassen sich leicht aus einer Formel für die Homotopiegruppen herleiten, welche unabhängig von (1) und (2) für jede Funktion M gilt und auch weitere Anwendungen hat (z.B. in topologischen Gruppen): Für beliebige $\alpha_i,\beta_i\in\pi_r$ gilt

$$M(\alpha_1,\dots,\alpha_n)+M(\beta_1,\dots,\beta_n)=M(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n).$$

Aus den Sätzen 1. und 2. und einem Satz von Hurewicz folgt leicht: Satz 3. Gibt es in einem endlichen Polyeder R für jedes $n>1$ ein n-Mittel, dann ist R in sich zusammenziehbar. – Ist umgekehrt R in sich zusammenziehbar, so kann man auf Grund der Erweiterungstheorie der Abbildungen für jedes n ein n-Mittel konstruieren.

Für die ganzzahligen Cohomologiegruppen in posit. Dim. eines endlichen Polyeders R kann – mit anderen Methoden – gezeigt werden, dass sie die Eigenschaft E_n' haben, wenn es in R ein n-Mittel gibt. Also

Satz 4. Gibt es im endlichen Polyeder R ein n-Mittel, dann sind in den Dimensionen > 0 die Bettischen Zahlen von R alle $= 0$ und die Torsionskoeffizienten alle zu n teilerfremd. Dies sind sehr starke topologische Bedingungen, die nur in seltenen Fällen erfüllt sind und die Existenz von n-Mitteln weitgehend ausschliessen.

B. Eckmann.

25. 11. 50

Über den heutigen Stand der Goldbachschen Vermutung.

Überblick über die bisherigen Methoden, die Goldbachsche Vermutung in der Form: Jede ungerade natürliche Zahl ist als Summe dreier ungeraden Primzahlen darstellbar, anzugreifen und über die dabei erzielten Ergebnisse.

I. Experimentelle Methode (Haussner, Pipping). Vermutung bestätigt für alle $n = 2k+1 \leqq 360\,749$.

II. Siebverfahren (V. Brun, Buchstab). Es gilt $n = a+b$ für $n > n_0$, wobei a und b höchstens 4 Primfaktoren enthalten.

III. Alte analytische Methode (Hardy, Littlewood). Mit L-Reihen und Fareyzerschneidung (singular series) und unter Annahme der Vermutung (H): Es gibt ein $\Theta < \frac{3}{4}$, sodass $L(s,\chi) \neq 0$ ist für $\Re(s) = \sigma > \Theta$ bei beliebigem Charakter χ und Modul k, ist erreicht worden: (1) eine asymptotische Formel f.d. Anzahl d. Darstellungen $n = p+p'+p''$ (p, p', p'' Primzahlen $\geqq 3$), hieraus folgend (2) die Darstellbarkeit jeder $n = 2k+1 > n_0$ in der Form $n = p+p'+p''$ und (3) der Nachweis, dass fast alle geraden Zahlen (d.h. bis auf eine Menge von der natürlichen Dichte 0) als Summe von zwei Primzahlen darstellbar sind.

IV. Dichtemethode (Schnirelmann, Romanoff). Es gibt eine Weltkonstante S, sodass $n = p_1+p_2+\dots+p_k$ mit $k \leqq S$ für jedes $n > n_0$ gilt. Abschätzungen von S durch Romanoff: $S \leqq 1104$. Verbessert auf $S \leqq 71$ (Heilbronn–Landau–Scherk 1936) und $S \leqq 67$ (Ricci).

V. Zwischenspiel (Siegel, Walfisz). Zur Elimination der Hypothese (H) sind Aussagen über die Nullstellen der $L(s,\chi)$ notwendig. Der Satz von Siegel kann nach Walfisz benutzt werden, um $L(s,\chi) \neq 0$ für $\sigma \geqq 1 - \frac{D}{k^{\varepsilon}(|t|+1)^{\varepsilon}}$ allgemein nachzuweisen (wo $D = D(\varepsilon)$ zu $\varepsilon > 0$ gehört).

VI. Neue analytische Methode (Vinogradow). Mit letzterem Resultat gelang Vinogradow der Nachweis von III, (1) und damit (2), unter Hinzuziehung von Abschätzungen von Weylschen Summen. Der Satz von Goldbach-Vinogradow wurde damit geschaffen. Aber der Beweis war ein kompliziertes Gebilde, aus vielerlei Methoden zusammengesetzt. Eine Vereinfachung und Vereinheitlichung war geboten.

VII. Neue-alte analytische Methode (Linnik). Diese gelang durch Linniks Entdeckung über die Nullstellenanzahl von L-Reihen. Seine Abschätzung besagt, dass im Streifen $1/2 \leqq \sigma \leqq 1$ nicht soviel Nullstellen liegen können, dass sie beim Beweise stören. In der Darstellung von Tchudakoff ist der Beweis von III, (1) genau nach dem alten Hardy-Littlewood-Verfahren durchgeführt, d.h. Siebverfahren, Diskmethode, Weylsche Summen wieder ausgemerzt. Lediglich Siegels Abschätzung ist noch wesentlich, aber auch diese kann man nach Estermann und Chowla jetzt nur mit L-Reihen beweisen.

H. Rohrbach

J. Deny
25.11.50

Problèmes de la Théorie du Potentiel

Définitions classiques relatives au potentiel: Soit $K(x)$ un noyau défini dans R^m $(m \geq 1)$, s.c.i., symétrique $(K(x) = K(-x))$, ≥ 0. On appelle potentiel engendré par la mesure $\mu \geq 0$ la fonction s.c.i. $U^{\mu}(x) = \int K(x-y)\, d\mu(y)$. L'énergie est le nombre $I_{\mu} = \iint K(x-y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$.

Généralisation: Lorsque le noyau est, non plus une fonction, mais une mesure $\varkappa \geq 0$ et symétrique: $U^{\mu} = \varkappa * \mu$ (= mesure positive, si $*$ a un sens); μ est dite d'énergie finie si: 1°) $\varkappa * \mu * \check{\mu}$ a 1 sens 2°) $\varkappa * \mu * \check{\mu} = f(x)\, dx$, où $f(x)$ est continue; on pose alors $I_{\mu} = f(0) = S_{\mu}\, \varkappa * \mu * \check{\mu}$

Cette définition permet l'usage de la transformation de Fourier (méthode de Schwartz). On suppose de plus que $\varkappa$ = mesure positive du type positif satisfaisant à une condition simple; alors $\mathcal{E}$, ensemble des $\mu \geq 0$ d'énergie finie, est complet pour la norme $\sqrt{I_{\mu}} = \|\mu\|$ (Théorème montré par H. Cartan dans le cas newtonien).

Pour des "noyaux réguliers", identité des deux définitions de l'énergie. On pose alors pour ces noyaux les problèmes suivants : (A) Problème de l'équilibre (Tout compact admet-il une ~~[illegible]~~ distribution d'équilibre? (B) Problème du balayage (Toute mesure $\in \mathcal{E}$ peut-elle être "balayée" sur un fermé quelconque? (C) Problème de Beurling : A-t-on, pour tout fermé, $V_F = W_F$? (cf. notations dans mon travail aux Acta Mathematica, en 1950).

On donne quelques conditions ~~suffisantes~~ pour la résolubilité de (A), (B), (C). Par exemple : la sousharmonicité ~~de~~ de $K(x)$ hors de 0 est suffisante pour (A) et (C). Pour (A) et (B) (simultanément) il faut et il suffit que ~~[illegible]~~ tout potentiel de la forme $U^\lambda - U^\mu$ ($\lambda, \mu \in \mathcal{E}$, λ à support compact) dont la borne supérieure est strictement positive, atteigne cette borne supérieure sur le support de λ ; etc...

Deny

26.VI.50

Die CARTANsche Theorie der alternierenden Formen hat bei ihrer Anwendung auf die Projektive Differentialgeometrie den Nachteil, dass bei Umnormung $\bar{\mathfrak{x}} = \rho\,\mathfrak{x}$ der Flächenpunkte die Ableitungen von ρ, die keine geometrische Bedeutung haben, in die Rechnung eingehen.

Nach einem Vorschlag von G. Reeb kann man diese Schwierigkeit beheben durch eine Abänderung des Kalküls; verhält sich eine Form ω bei den Umnormungen wie $\bar\omega = \rho^c \omega$ und ist π eine Pfaffsche Form für die dabei $\bar\pi = \pi - d(\log \rho)$, so setze man $\bar d \omega = d\omega + c\,\pi \wedge \omega$. Für das neue Differential gelten die üblichen Regeln, nur ist $\bar d(\bar d \omega) = c\, d\pi \wedge \omega$. Ist $d\pi = 0$ so kann man die Normierung so festlegen, dass $\pi = 0$, dann reduziert sich der Kalkül auf den klassischen. – Verallgemeinerungen. – Anwendung auf die Flächentheorie. – Beziehungen zur Tensorrechnung.

G. Bol

H. Cartan.

26-11-50

Sur la théorie des foncteurs.

Il s'agit d'exposer les éléments d'une théorie actuellement développée par S. Eilenberg et H. Cartan. On rappelle la notion de module sur un anneau Λ avec élément unité (commutatif ou non), les notions d'homomorphisme, de suite exacte de modules et d'homomorphismes, d'extension, d'extension triviale. Un module P est projectif si tout homomorphisme de P dans le quotient C d'un module B, provient d'un homomorphisme $P \to B$; un module Q est injectif si tout homomorphisme, dans Q, d'un sous-module A de C se prolonge en un homomorphisme $C \to Q$. Tout module est quotient d'un module projectif, et peut être plongé dans un module injectif (Baer). Ces deux théorèmes d'existence sont à la base d'une théorie des "satellites" d'un foncteur donné.

Foncteurs. — Λ et Λ' sont des anneaux donnés. Un foncteur covariant [resp. contravariant] T associe à chaque Λ-module A un Λ'-module $T(A)$, et à chaque homomorphisme $f : A \to B$, un homomorphisme $T(f) : T(A) \to T(B)$ [resp. $T(B) \to T(A)$], de manière que : 1) si $f : A \to A$ est l'identité, $T(f)$ est l'identité ; 2) si f est composé gh, $T(f)$ est composé $T(g)\,T(h)$ [resp. $T(h)\,T(g)$] ; 3) si $f = f_1 + f_2$, $T(f) = T(f_1) + T(f_2)$.

Exemple : $\mathrm{Hom}(A, B)$, comme fonction des Λ-modules A et B, est un foncteur contravariant de A (pour B fixé) et un foncteur covariant de B (pour A fixé). – A chaque foncteur $T(A)$ sont associés un satellite droit et un satellite gauche ; par exemple, le satellite gauche de $\mathrm{Hom}(A, B)$ est nul, le droit est $\mathrm{Ext}(A, B)$ (groupe des "extensions"). On peut considérer des satellites itérés.

La théorie a des applications diverses : classification des anneaux d'après leur structure, théorème des syzygies de Hilbert, homologie et cohomologie des groupes discrets, formule "de Künneth" donnant l'homologie du produit de 2 espaces topologiques, etc...

26. 11. 50

Schlauchknoten.

Ist V ein (im allg. verknoteter) Vollring in der 3-Sphäre S^3, dessen Seele ~~k~~ der Knoten k ist, und l ein Knoten, der auf dem Rande von V liegt [und mindestens zweimal „umläuft"], so heisst l Schlauchknoten mit dem Träger k. Es wird gezeigt, dass l seinen Träger k eindeutig bestimmt. Bezeichnet man einen einfachen Weg auf dem Rande von V, der nullhomotop in V nicht aber auf dem Rande von V ist, als Meridian, so bilden k, die Schnittzahl von l (≥2) mit einem Meridian und die Verschlingungszahl von k und l ein Invariantensystem von l, wenn k ~~noch~~ so ~~normiert~~ orientiert wird, dass die Schnittzahl von l und dem Meridian positiv ist. Falls der Träger ein Kreis ist, ~~kommt~~ erhält man durch Vertauschung von Schnittzahl und Verschlingungszahl denselben Knoten.

H. Schubert

2. April 1951.

Entscheidungen beim Kartenlegen.

Es handelt sich um eine bestimmte „Patience", bei der derjenige, der die Patience „legt", nach dem Mischen des Kartenblocks keinen weiteren Einfluß auf den Ablauf des Spiels nehmen kann. Der Spielverlauf vollzieht sich in einzelnen Schritten. Der einzelne Schritt kann gedeutet werden als ein nach einem bestimmten Gesetz auszuführender Übergang von der nach dem Mischen entstandenen Permutation

P der Menge aller Karten des Spiels, hinführend zu einer neuen Permutation P', von P' ebenso zu $(P')' = P''$ usw. Es kann vorkommen: a) daß in der so entstehenden, notwendig von einer gewissen Stelle $m \geqq m_0$ an periodischen Folge F von Permutationen $P, P', P'', P''', \ldots$ eine solche $P^{(n)}$ auftritt, in welcher für jede der f „Farben" ($f = 4$ bei der gewöhnl. Whist Karte) alle Karten dieser Farbe, geordnet in absteigender Anordnung, aufeinander folgen; dann ist die Patience „aufgegangen" (geglückt). Oder b), daß dies nicht eintritt, wie weit man auch in F fortschreitet, wo dann $P^{(m)}$ für $m \geqq m_0$ stabil heiße u. die Patience „nicht aufgeht". Es entsteht die Frage, wie der Fall b) durch ein Kriterium für den Spieler erkennbar sei.

Ein besonderer Name für die besprochene Patience ist mir nicht bekannt (vgl. l.c. unten p. 148 „Dauer-Patience"). Wegen des Eindrucks, den der Spieler bei lang anhaltender hastiger Ausführung des Spiels macht, wurde sie von Kameraden im Feld (1914/18) „Wahnsinns-Patience" benannt. Die einigermaßen umfangreiche ~~des~~ Untersuchung des „Stabilitäts-Kriteriums", – damals wie jetzt durchaus abwegig und inaktuell – erschien bzw.

erscheint im Jahr. ber. D. M. V. Bd 53, Heft 1 (1943), Bd 54 Heft 2 (1951). Vgl. auch 4 Noten in Sitz. ber. Bay. Ak. d. W. Jgg. 1943.

H. Tietze.

3. 4. 1951.

Über numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen.

Es werden einige in neuerer Zeit mehrfach behandelte Teilfragen herausgegriffen. 1. Stabilität beim Differenzenverfahren. Beim Differenzenverfahren zur genäherten Lösung von Anfangs- und Anfangsrandwertaufgaben kann oft eine ungünstige Fehlerfortpflanzung, ein Aufschaukeln der Abrundungsfehler, das Verfahren unbrauchbar machen, das Verfahren wird dann „instabil" genannt. Es wird über neuere Stabilitätstheorien von John v. Neumann, Eddy, Hyman berichtet. 2. Erweiterungen des Trefftzschen Verfahrens. Das Trefftzsche Verfahren hat gegenüber dem Ritzschen Verfahren den Vorzug, nur die Auswertung von Randintegralen, aber nicht von Gebietsintegralen, zu benötigen. Ursprünglich war es für die 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie aufgestellt. Es wird über Erweiterungen auf die 2. und 3. Randwertaufgabe bei elliptischen Differentialgleichungen $L[u] = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = r$ berichtet. 3. Fehlerabschätzung für die 1. Randwertaufgabe. Der klassische Satz vom Randmaximum in der Potentialtheorie läßt sich sehr verallgemeinern und führt für die 1. Randwertaufgabe bei der oben erwähnten Differentialgleichung zu einer Fehlerabschätzung sowohl für das Trefftzsche als auch für das Ritzsche Verfahren.

L. Collatz

4. 4. 1951.

In der linearen Differentialgleichung $w^{(m)} + a_{m-1}(z)\, w^{(m-1)} + \dots + a_0(z)\, w = 0$ seien die Koeffizienten $a_j(z)$ Polynome und so beschaffen, dass die Differentialgleichung keine Polynomlösungen zulässt. Es gibt ein Fundamentalsystem $w_\mu(z)$ von ganzen transzendenten Lösungen der Ordnung λ_μ, $\mu = 1, 2, \dots, m$. Dann gilt $m \leq \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu$. Das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn die $a_j(z)$ Konstante sind, also für lineare homogene Differentialgl. mit konstanten Koeffizienten. In diesem Falle ist also die Ordnung des allgemeinen Integrales $w(z) = c_1 w_1 + \dots + c_m w_m \not\equiv 0$ völlig unabhängig von den Integrationskonstanten c_κ. Ein entsprechendes Resultat gilt für beide Lösungen $w = w(z; c_1, c_2)$ der Painlevé'schen Differentialgleichung $w'' = 6w^2 + z$. Die Lösungen sind in $|z| < \infty$ eindeutig analytisch und haben unendlich viele Doppelpole, die verschiebbar sind. Die Ordnung $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,w)}{\log r} = \lambda$ ist unabhängig von der Wahl der Integrationskonstanten und ist in allen Fällen gleich $\frac{5}{2}$.

H. Wittich.

<u>Betragflächen analytischer Funktionen</u>: <u>Krümmung u. Wertvorrat.</u> 5. 4. 1951.

Als <u>Träger</u> einer analyt. Funktion $w(z)$ wird die „einfachste" Riemannsche Fläche verstanden auf der $w(z)$ eindeutig ausgebreitet werden kann. Einige Eigenschaften des Wertvorrats von $w(z)$ sind schon durch die Struktur seines Trägers vorbestimmt. Z.B. (für harmonische F'onen analog:) Träger mit Nullrand, ohne Greensche Funktion, ohne beschränkte Nicht-konstante Funktion, ohne nicht-konstante F'on mit endlichem Dirichletintegral. – Wir heben insbesondere hervor: <u>Liouvilleträger</u>, auf denen jede (eindeutige) beschränkte F'on schon in eine Konstante entartet („Satz v. Liouville" f.d. Ebene), und dagegen (Liouville-)<u>Freie Träger</u>, auf denen es eindeut. beschränkte, aber nicht-konstante Funktionen gibt. Beispiele dazu, Voll- bzw. Endl. Ebene, Flächen vom Geschlecht p, analog k-blättr. Flächen als Träger algebroider F'onen (und deren 1-1-Bilder) — bzw. Einheitskreis, universelle Überlagerungsflächen einer q-fach punktierten Ebene. Hinweis auf Arbeiten von Nevanlinna, Pflüger, Sario, Virtanen u.a.

Krümmungsverhalten der Betragflächen $h = |w(z)|$ ergibt sich aus $K = |w'|^2(1+|w|^2)^{-2} \cdot \Re\{\frac{w'^2}{ww''} - 1\}$. Fordern wir – global – einsinnige Krümmung der Bfl. im Gesamtverlauf so entscheidet $\Re\{\} \gtreqless 0$ über das Vorzeichen. Gehört der Differentialausdruck $c(z) \equiv w'^2 : ww''$ zu einem Liouvilleträger, so artet er in eine Konstante aus, und die allg. Potenzen $(az+b)^{\alpha + i\beta}$ sind die einzigen F'onen mit $K \gtreqless 0$ je nachdem $\alpha \gtreqless 1$ ist; $K \equiv 0$ noch bei e^{az+b}. Gehört aber $c(z)$ zu einem Freien Träger so ist $w(z) = w(0) \exp \int^z \frac{dt}{a + \int^t b(\tau) d\tau}$ mit $b = 1 - \frac{1}{c}$

und $K \gtreqless 0$ je nach $|b(z) - \frac{1}{2}| \lesseqgtr \frac{1}{2}$. Umgekehrt erlaubt jede beliebige beschränkte F'on auf einem Freien Träger $\mathfrak{F}_c$ nach der vorigen Quadraturformel den Aufbau beliebig vieler $w(z)$ auf $\mathfrak{F}_w$ über $\mathfrak{F}_c$ mit einsinnig gekrümmten B'fl. bei $K>0$, bzw. $K<0$ im Gesamtverlauf.

Beispiel, wonach der Quadraturprozess von einem Liouville-träger (Vollebene) zu einem Freien Träger führte, der eine Teilfläche von der Verzweigungsstruktur einer Universellen Überlagerungsfläche ($q \geqq 3$) enthält.

Verallgemeinerungen bei Annahme anderer Flächen als $h = |w(z)|$, bei Änderung der Annahmen über die Arten des geforderten Krümmungsverhaltens, bzw. bei Verzicht auf globale Betrachtung (Etwa: Ersatz des Liouvilleschen Satzes durch Aussagen über Wertvorrat u. Teilungsgebungen einer wesentlichen Singularität wie Phragmén-Lindelöf u.a.m.) [Vgl. Mz. 54].

Egon Ullrich (Giessen).

__Beweis der Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper beliebigen Geschlechts.__

Durchläuft $\mathfrak{a}$ die sämtlichen ganzen Divisoren eines algebraischen Funktionenkörpers K/Ω, dessen Konstantenkörper Ω die endliche Elementezahl q besitzt, so besagt die „Riemannsche" Vermutung, daß die ζ-Funktion $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}$ ihre Nullstellen auf der Geraden $\Re(s) = \frac{1}{2}$ ~~allein~~ besitzt. Der Vortragende beweist diese Vermutung ~~do~~ auf rein arithmetischem Wege dadurch, daß er im Multiplikatorenring von K eine Metrik definiert (die im klassischen Falle, wo Ω der komplexe Zahlkörper ist, durch eine zugehörige Riemannsche Matrix geliefert wird) und zeigt, daß diese positiv definit ist. Die Beweismethoden schließen sich unmittelbar an die von Deuring entwickelte Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper an (Crelles J. 177, S. 161). Es ergeben sich

Anwendungen auf zahlentheoretische Probleme, insbesondere auf den Satz von der Endlichkeit der Anzahl der ganzzahligen Punkte einer algebraischen Kurve vom Geschlechte $g > 0$.

Peter Roquette.

Inhalt, Maß und Integral

12. 4. 51

Es werden grundsätzliche Betrachtungen darüber angestellt, wie eine einführende Darstellung der Lebesgueschen Theorie – etwa im Rahmen eines Göschenbändchens – zweckmäßig (d.h. für mittlere Semester geeignet) gestaltet werden kann:

1) Schrittweise Umformung des R-Integrals so weit, daß zur Einführung des L-Integrals nur noch der Inhalt durch das Maß zu ersetzen ist. Insbes. ist die eigentl. R-Integrierbarkeit auch auf nichtbeschränkte Fktn auszudehnen.

2) Die methodische Einstellung, die durch den Namen Carathéodory gekennzeichnet wird, ist konsequent durchzuhalten.

3) Von vornherein n-dim. Inhalte und Maße. (Bei der Darstellung $n=2$ wählen). Von vornherein Integrale über Punktmengen des E_n.

4) Von vornherein auch nichtbeschränkte Fktn. (Fischer-Riesz!)

5) Verwendung von speziellen Stieltjesschen Integralen als Abkürzungen für gewisse Gr.W. (Im wesentl. $\int_{-\infty}^{+\infty} u\,d\chi(u)$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,d\chi(u)$).

6) Ablehnung der Def. des inneren Maßes mit Hilfe des äußeren Maßes durch Komplementbildung.

7) Ablehnung der Integraldefinition als Maß der Ordinatenmenge.

Ferner werden die Beweise für die Orthogonalinvarianz von Inhalt und Maß von Erh. Schmidt, R. Schmidt, Aumann und Weiland skizziert.

Robert Schmidt

Der Helly'sche Satz.

13. 4. 51.

Dieser lautet: "Wenn $C_1, \dots, C_N$ konvexe Mengen in einem $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Raume sind und jedes n-tupel dieser Mengen einen gemeinsamen Punkt hat, so haben sie alle einen gemeinsamen Punkt."[1] Die zahlreichen bekannten Beweise des Satzes benutzen wesentlich spezifische Eigenschaften des Euklidischen Raumes. Es wird gezeigt, dass der Satz von einer viel allgemeineren Natur ist. Ist nämlich Σ eine Menge, in der eine Familie $\mathfrak{L}$ von Untermengen ausgezeichnet ist, die 2 Axiomen genügt, so gilt der Helly'sche Satz. Diese Axiome lauten: 1.) Aus $C_1, \dots \in \mathfrak{L}$ folgt $\bigcap_\nu C_\nu \in \mathfrak{L}$. 2.) Ist $m > n$ und $Q_1, \dots, Q_m \in |P_1 \cdots P_n|$, so kann man die Q's so in zwei Klassen teilen, dass $|Q_{i_1} \cdots Q_{i_\mu}| \cap |Q_{i_{\mu+1}} \cdots Q_{i_m}| \neq 0$ ist. Hierbei bedeutet $|P_1 \cdots P_n|$ die "konvexe Hülle" von $P_1, \dots, P_n$. Dass die Euklidischen Räume – und ebenso alle Räume über einem geordneten Körper – den Axiomen genügen, ist leicht nachzuweisen. Der Beweis, dass die Axiome in jedem Raume gelten, die den Axiomen der Inzidenz u. Anordnung genügen, bedarf etwas eingehender Untersuchung. Weiterhin wird auf Anwendung des H'schen Satzes hingewiesen. Die Untersuchungen werden im nächsten Bande des Journals of the Indian Math. Soc. veröffentlicht werden.

F. W. Levi.

14. April 51 Approximationen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen.

Dem Rungeschen Satz ~~wesentlich~~ kann man die folgende Formulierung geben: Jede in einem gegebenen schlichten Gebiete $\mathfrak{G}$ der z-Ebene reguläre Funktion ist dann und nur dann dort durch in einem $\mathfrak{G}$ umfassenden Gebiete $\mathfrak{G}'$ reguläre (rationale) Funktionen $f_n(z)$ gleichmässig zu approximieren, wenn alle Randpunkte von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}'-\mathfrak{G}$ mit dem Rande von $\mathfrak{G}'$ verbindbar sind. Von dieser Formulierung wird ausgegangen, um die Frage zu beantworten, wie das nichtschlichte Gebiet $\mathfrak{G}'$ beschaffen sein muss, damit alle in ~~$\mathfrak{G}$~~ gegebenen, nichtschlichten Gebiete $\mathfrak{G}$ regulären Funktionen $f(z)$ dort gleichmässig durch noch im umfassenden Gebiete $\mathfrak{G}'$

regulären Funktionen approximiert werden können. Die notwendigen und hinreichenden Kriterien dafür werden besprochen (siehe Math. Ann. Bd 120) Im Anschluss daran wird gezeigt:

1) Wie die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstrass auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen übertragen werden können.

2) die Vermutung von Carathéodory bewiesen werden kann, dass es zu jeder nicht-geschlossenen Riemannschen Fläche eine dort eindeutige Funktion gibt, die auf ihr überall regulär ist. Es kann darüber hinaus eine dort reguläre Funktion angegeben werden, die nicht fortsetzbar ist. „Alle Gebiete auf Riemannschen Flächen sind Regularitätsgebiete und deshalb regulär konvex".

Zum Schluss wird der entsprechende Satz in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen formuliert, und von seinen Konsequenzen gesprochen.

Heinrich Behnke

Ungleichungen für Eigenwerte und konvexe Funktionen. 26. Mai 1951

Die von Chang, Weyl, Fan, Polya und A. Horn hergeleiteten Ungleichungen zwischen den Eigenwerten einer Matrix A und denen von AA* werden mit dem von I. Schur eingeführten Begriff der konkaven Funktion mehrerer Variablen in Zusammenhang gebracht. Auf diese Weise lassen sich sowohl die Ungleichungen für Eigenwerte weiter verallgemeinern als auch die Schursche Theorie weiterführen.

A. Ostrowski

Über eine strenge Fassung der Kirchhoff'schen Beugungstheorie durch zwei simultane Integralgleichungen.

Die traditionelle Fassung d. Beugungsproblems durch Kirchhoff ist in sich widerspruchsvoll, da aus der Annahme $u=0$ und $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ auf dem Schirm das ident. Verschwinden der Wellenfunktion u gemäß der Differentialgl. $\Delta u+k^2u=0$ folgen würde. Nach einem Vorschlag von H. Schaffers (Ann. d. Phys. 1942) kann man nun die Lösung u zu beiden Seiten des Beugungsschirmes in Form von Fourier-Integralen darstellen. Fordert man nun Stetigkeit von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ in der Öffnung als Bedingung des analytischen Zusammenhanges der Lösungen zu beiden Seiten des Schirmes und setzt als Randbedingung $u=0$ auf dem Schirm, so ergeben sich zwei simultane ~~Dif~~ Integralgleichungen, die das Problem eindeutig determinieren. Es wurde ein Lösungsansatz für eine auf einen Spalt senkrecht einfallende Lichtwelle diskutiert. – Das Zurückgreifen auf das Huyghens'sche Prinzip wird entbehrlich u. prinzipiell durch das Fourier'sche Integraltheorem ersetzt.

26. Mai 1951. H. Hönl

27. Mai 1951. Unendlich benachbarte Punkte

Max Noether hat die „unendlich benachbarten" Punkte auf algebraischen Kurven mit Hilfe von quadratischen Transformationen untersucht; er hat aber nicht gesagt, was ein „Nachbarpunkt" eigentlich ist. Enriques hat, von der Puiseuxreihe ausgehend, eine sehr komplizierte Theorie aufgebaut. Zariski hat eine andere Begründung mittels der Idealtheorie gegeben. Es geht aber viel einfacher, wenn man von der Schnittmultiplizität ausgeht und einen Nachbarpunkt als eine Menge von Kurven definiert, die einen gewissen Zweig mit einer höheren Multiplizität schneiden als man erwarten würde, wenn die Kurve mit dem Zweig nur die Nachbarpunkte von niederer Ordnung gemeinsam haben. Ich habe das in den Indagationes (=Proc. Amsterdam 1951) näher ausgeführt.

B. L. v. d. Waerden

22. Juni 1951. Ein neuer Eingang in die Funktionentheorie.

Wenn $t = x+yi$, sei die Funktion $f(t) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ im Bereich G stetig und in jedem einfach zusammenhängenden Teilbereich von G eindeutig. Ferner wird vorausgesetzt: Zu jedem inneren Punkt $\zeta = \xi + \eta i$ aus G ist jede der Funktionen u und v gleich ihrem Mittelwert auf jedem Kreis K_ζ um ξ, η, der ganz innerhalb G liegt und dessen Radius $= \varrho$ sei. D.h. wenn man Polarkoordinaten für die Punkte x, y auf K_ζ einführt, wobei das Bogenelement auf K_ζ $ds = \varrho\, d\varphi$ ist,

$$x = \xi + \varrho\cos\varphi\,, \quad y = \eta + \varrho\sin\varphi\,,$$

so lautet die Voraussetzung:

$$(1)\quad \begin{cases} u(\xi\eta) = \dfrac{1}{2\varrho\pi}\displaystyle\int_0^{2\varrho\pi} u(xy)\,ds = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi+\varrho\cos\varphi, \eta+\varrho\sin\varphi)\,d\varphi \\ v(\xi\eta) = \dfrac{1}{2\varrho\pi}\displaystyle\int_0^{2\varrho\pi} v(xy)\,ds = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\xi+\varrho\cos\varphi, \eta+\varrho\sin\varphi)\,d\varphi\,. \end{cases}$$

Einfache Rechnung führt als mit (1) gleichbedeutend zu

$$(2)\qquad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_\zeta} \frac{f(t)\,dt}{t-\zeta}\,,$$

einem sehr speziellen Fall der Cauchyschen Integralformel, der aber genügt.

Ist nämlich $\zeta = a$ ein beliebiger innerer Punkt aus G, also in (2) ζ durch a zu ersetzen, und ϱ_a der Radius von K_a, so sei K'_a ein um K_a konzentrischer Kreis, dessen Radius $\varrho'_a < \varrho_a$, z.B. $\varrho'_a = \frac{1}{3}\varrho$ sei. Ist dann z ein beliebiger Punkt im Innern von K'_a, K_z mit Radius ϱ_z der Kreis um z, der K_a von innen berührt (so daß für $\zeta = z$ (2) gilt). Bei der Integration bewegt sich t auf K_z und dabei ist stets $|z-a| < \frac{1}{3}\varrho_a$, $|t-a| > \frac{1}{3}\varrho_a$, also $\left|\frac{z-a}{t-a}\right| < 1$. Daher ergibt sich in bekannter Weise für $f(z)$ die innerhalb K'_a konvergente Reihe

$$(3)\quad f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots\,, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_z}\frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aber die Koeffizienten sind nur scheinbar von z abhängig. Geht man nämlich von einem anderen z^* innerhalb K_a' aus, so erhält man für $f(z)$ eine ebenfalls innerhalb K_a' konvergente Reihe

(9) $f(z) = c_0' + c_1'(z-a) + c_2'(z-a)^2 + \dots$

und diese muss wegen der innerhalb K_a vorausgesetzten Eindeutigkeit von $f(z)$ mit (8) identisch sein.

Diese Begründung der Funktionentheorie setzt weder eindeutige Differenzierbarkeit (Cauchy, Goursat) noch eindeutige Integrierbarkeit (Heffter, Kurvenintegrale u. Begründung der Funktionentheorie, 1948) voraus und braucht keinen neuen Integralsatz.

L. Heffter.

Herr Professor Heffter Freiburg teilt mit dass der von ihm am 22. Juni 1951 zu Oberwolfach gehaltene Vortrag durch einen demnächst in den Sitz. Ber. der Heidelberger Akademie erscheinenden Aufsatz von ihm berichtigt und wesentlich erweitert wird.

8. April 1952

G. L. Tautz.

40 Jahre quasielliptische Geometrie

5. Aug. 1957.

Nach einem geschichtlichen Überblick über Grundlagen, Werden und Anwendungen der quasielliptischen Geometrie, in dem die Leistungen von F. Klein, S. Lie, E. Study, W. Blaschke, J. Grünwald, A. E. Mayer, und die Beiträge des Autors[1] erwähnt werden und insbesondere auch die Bedeutung der kinematischen Abbildung für die darstellende Geometrie (E. Müller, E. Kruppa) gewürdigt wurden, wird die kinematische Abbildung als Darstellung der ebenen Bewegungen im Parameterraum. Dies wird die quasielliptische Geometrie als Invariantentheorie des entstehenden absoluten Gebildes eingeführt. Als methodisches Hilfsmittel dienen Studysche Quaternionen (Vgl. K. Strubecker, Monatshefte   ) und im Parameterraum die kommutativen Gruppen Cliffordscher quasielliptischer Schiebungen, mit deren Hilfe die ebenen Bewegungen die Gestalt $x' = \alpha^{-1} x \alpha$ und die Links- bzw. Rechtsschiebungen die Gestalt $x' = \beta x$ bzw. $x' = x\alpha$ annehmen. Durch die Cliffordschen Schiebungen werden Links- und Rechtsparallelismen, ferner Links- und Rechtsnetze sowie Links- und Rechtsspindeln erklärt und analytisch dargestellt. Die auch geometrisch einfach erklärte kinematische Abbildung kann am einfachsten

[1] Wiener Vorlesung vom Jahre 1935/36, Ber. Akad. Wien 1930, Jber. DMV 1934

gruppentheoretisch beherrscht werden, bei der entsprechen Geraden g. geordnete Punktepaare g_l, g_r, Punkten entsprechen Bewegungen des rechten gegen das linke Bildfeld, Ebenen jedoch Umlegungen, wobei nach dem Hauptsatz der kinematischen Abbildung Rechtsschiebungen usw. stets als Bewegungen des rechten Bildfelds π_r anzusehen, bei festem linken Bildfeld π_l (und umgekehrt). Jeder Punkt P bildet sich dabei auf jene Bewegung von π_r gegen π_l ab, die jener Rechtsschiebung äquivalent ist, die den Bildpunkt O der Identität nach P bringt. Nach einer Entwicklung der neueren Kinematik der Ebene (Geometrie der Somen = orientierten Linienelemente) und eines natürlichen Äquivalenzbegriffs, nach dem Figuren von orient. Linienelementen äquivalent sind, wenn sie durch das (kommutative) Produkt einer Bewegung und einer „dilatorischen Zeigerbewegung" zur Deckung gelangen, befaßte sich der zweite Vortrag mit der kinematischen Abbildung der Geraden des Raumes auf Turbinen. Die Punkte der Geraden haben als Bild die ~~Hoor~~ or. Linienelemente der Turbine, ~~die~~ um die Mitte P_g, die kongruent ist zu der Turbine, die das Linienelement einer Umfassung um P_e beschreibt. Sonderfälle der Geraden-Turbinen. Geraden des Nebengewindes bilden sich auf Zykel, Geraden des Nebennetzes auf Speere, Geraden des

Grundnetzes auf Nullzykel ab. Die Kompo-nenten 1) des Nebengewindes, 2) des Neben-netzes 3) des Grundnetzes bilden sich dabei kinematisch ab die Kreisgeometrien 1) von Lie; 2) von Laguerre 3) von Möbius.
Zieht man das Verfahren der Zyklographie heran, das d. Linienelemente auf Isotropgeraden einer quasieuklidischen Metrik abbildet, so gewinnt man durch Zusammensetzung mit der kinematischen Abbildung der Geraden auf Turbinen den konstruktiv einfachsten Mechanismus für die euklidischen Geraden-Kugel-Transformation. – Eine Reihe von Beispielen beschlossen den [illegible] Vortrag, von denen hier nur die einfache Herleitung einer allgemeinen Lieschen Kreisverwandtschaft durch vier sich berührende Zykel und die Konstruktion der ∞^2 Linienelemente, die einem festen Elemente zugeordnet werden können, erwähnt sei. (Vgl. Strubecker, Sitz. Ber. Wien, 1930).

K. Strubecker (Karlsruhe)

Eine Aufgabe der projektiven Geometrie.
Schreibt man von einer Raumkurve vierter Ordnung erster Art 4 Punkte in einer Ebene und in ihnen die Tangenten vor, so müssen 2 Bedingungen erfüllt sein zwischen diesen Bestimmungsstücken. Diese lassen sich rechnerisch u. geometrisch auf verschiedene Arten fassen.

W. Blaschke (Hamburg)

6.8.51.

Singularités des courbes planes en géométrie projective différentielle

Soit, sur une courbe plane C, une branche analytique d'ordre m et de classe $n-m$ $(n>m)$. Avec la seule exception du cas où C est une conique, il est toujours possible de fixer un triangle de référence intrinsèque par rapport à la branche. Si C n'est pas de la forme $y^m = x^n$, on trouve pour les développements canoniques des coordonnées non homogènes

$$x = t^m + h_r t^{m+r} + h_{r+1} t^{m+r+1} + \cdots, \quad h_r \neq 0, \quad r \geq 1$$
$$y = t^n$$

avec les conditions

a) pour $n \neq 2m$, $\quad h_{n-m} = h_m = h_n = 0$

b) pour $n = 2m$, $\quad h_m = h_n = h_{r+m} = 0$

Les h_i avec $i<m$ sont des invariants relatifs et il est de même, en tout cas, pour h_r. La condition $h_r = 1$ permet de fixer le point unité d'une façon intrinsèque.

L'ordre infinitésimal du triangle de référence est égal à $2n$ dans le cas a) et égal à $\max.(r+3m, 2n)$ dans le cas b). Le point unité dépend de l'ordre infinitésimal $r+n$.

Pour les branches $m = n = 1$ on trouve le développement canonique

$$y = x^2 + x^s + \mu_{s+2} x^{s+2} + \cdots$$

où $s-1$ est l'ordre de contact de la branche avec sa conique osculatrice.

6-8-1951 G. Ancochea (Madrid)

Textilgeometrie und projektive Übertragungen.

Die Kurven eines 3-Gewebes in der Ebene lassen sich stets auffassen als Geodätische eines projektiven Zusammenhanges (System of paths). Die Gesamtheit der projektiven Zusammenhänge über einem 3-Gewebe hängt ab von einer Funktion in zwei Variabeln. Unter ihnen gibt es einen ausgezeichneten, welcher geom. Bedeutung besitzt, nämlich der Zusammenhang, dessen Geodätische mit den Kurven des Gewebes konstante Doppelverhältnisse bilden. (D.V.-System). Ein Kurven-4-Gewebe bestimmt den proj. Zusammenhang eindeutig.
Diese Fragen lassen sich durchgehend auf n Dimensionen verallgemeinern, indem die Flächen eines Gewebes als geodätische Flächen aufgefasst werden. Die proj. Zusammenhänge (Übertragungen) über einem (n+1) Gewebe werden aufgespannt durch $\binom{n}{2}$ Funktionen in n Variabeln. Darunter gibt es wieder einen ausgezeichneten, nämlich das Doppelverh.-System. Ein (n+2)-Gewebe im R^n bestimmt genau einen proj. Zusammenhang.
Das Doppelverh.-System spielt in allen Dimensionen eine gewisse Rolle bei den parallelisierbaren Geweben.

7. 8. 51 M. Jeger (Zürich).

Automorphisms of Bilinear Forms

To parametrise the automorphisms Y, of a bilinear form with matrix A, i.e. the matrices Y such that

$$Y'AY = \mu^2 Y \quad (\mu \text{ a scalar}),$$

consider the transformation T, given by

$$\mu = |\lambda E + X|$$
$$Y = (\lambda E - X)\,\mathrm{adj}(\lambda E + X)$$

where $AX + X'A = 0$, ——— (1)

and consider T as a birational-transformation of the linear-space Σ defined by (1) onto the group manifold, V (locus of all points (μ, Y)). V is a Veronesean variety (rational), ~~and~~ namely the transform of Σ by a system of primals of order n, passing through a base-locus, D. This locus, D, is determinantal (being given by

$$\mathrm{adj}(\lambda E + X) = 0\ \}$$, and its components and structure (the linear spaces which it carries) have been determined. See my paper in Proc. Camb. Phil. Soc. (1951), part 2. The transformation of the points of D, gives the exceptional matrices Y, not obtainable by the explicit parametrisation, considered above. In the lecture an outline was given of the results for (i) the orthogonal group, G, $(A = E)$

(ii) the symplectic group, H, $\left(A = I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\right)$.

(iii) the intersection $G \cap H$,

(iv) the general case of a matrix A, such that $|A| \neq 0$.

L. S. Goddard (Aberdeen; Scotland)

Komplexflächen als Schiebflächen.

Eine einparametrige Schar von Projektivitäten nennen wir eine „Schiebung", die Bilder eines Punktes beschreiben dabei eine „Bahnkurve". Es werden die speziellen Schiebungen untersucht, bei denen die Tangenten an die Bahnkurven an jeder Stelle einem fest mit der Schiebung verbundenen linearen Komplex angehören. Diese „K-Schiebungen" sind in verschiedener Weise geometrisch gekennzeichnet, insbesondere besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen den K-Schiebungen und den einparametrigen Scharen linearer Komplexe.

Deshalb bilden die K-Schiebungen eine geeignete Basis zur Behandlung der Komplexflächen. Eine Komplexfläche wird erzeugt durch Anwendung einer K-Schiebung auf eine dem ausgezeichneten Komplex zugehörige Komplexkurve. Die geometrischen Eigenschaften der K-Schiebung übertragen sich auf die Komplexfläche.

Spezielle K-Schiebungen führen auf spezielle Komplexflächen, unter denen die zweisinnigen Komplexflächen eine [illegible] Klasse sind. Ihre explizite Darstellung gewinnt man von diesem Gesichtspunkt aus ohne die verschiedenen Fälle unterscheiden zu müssen und ohne andere Hilfsmittel.

7.8.51. Martin Barner.

Grundlagen einer koordinatenfreien Kurvengeometrie

Bericht über den Inhalt einer in Bearbeitung befindlichen „Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven." Es handelt sich um die von Moebius und von Staudt veranlagte, von A. Kneser (1889, 1893) begründete und von C. Juel ausgebaute rein synthetische Kurvengeometrie.

Die Schwierigkeiten, eine anschauliche Kurvengeometrie aufzubauen, sind durch folgende Umstände gekennzeichnet: Entweder gerät man bald in das Gestrüpp mengentheoretischer Komplikationen oder man beschränkt sich von vornherein auf einen Bereich von Objekten, zum Beispiel auf algebraische Kurven, der zwar abnormale Verhältnisse ausschliesst, der aber doch allzu eng erscheint. Zum Beispiel ist für eine anschauliche Kurvengeometrie nicht einzusehen, warum man sich auf Objekte beschränken sollte, die in ihrer Ganzheit bereits durch ein beliebig kleines Stück bestimmt sind. – Es werden die vom Referenten gewählten Erklärungen, Grundlagen, der Aufbau und einige Einzelheiten der erwähnten Einführung skizziert.

7. August 1951 Louis Locher-Ernst

7. 8. 51 Zur Zerlegungstheorie euklidischer Polyeder

Es sei G eine Bewegungsgruppe im k-dim. euklid. Raum R_k, die die Translationsgruppe T enthält. Zwei Polyeder $A, B \in R_k$ heissen G-zerlegungsgleich – symbolisch $A \sim B$, wenn Zerlegungen existieren der Form $A = \sum_1^n A_\nu$, $B = \sum_1^n B_\nu$ mit $A_\nu \simeq B_\nu$ (G-kongruent) ($\nu = 1, .., n$). Mit $n.A$ bezeichnen wir ein Polyeder, das sich als $\sum_1^n A_\nu$ mit $A_\nu \simeq A$ schreiben lässt. Es gelten die beiden für den formalen Aufbau einer Zerlegungstheorie grundlegenden Hilfssätze:

(a) Aus $A + C \sim B + D$, $C \sim D$ folgt $A \sim B$

(b) Aus $n.A \sim n.B$ folgt $A \sim B$.

Sätze von der Zerlegungsgleichheit ergänzungsgleicher bzw. selbstergänzungsgleicher Polyeder.

[(a) wurde erstmals im Falle $k = 3$ bei voller Bewegungsgruppe von J. P. Sydler (Comm. Math. Helv. 1943) bewiesen]

Unter einem i-stufigen Zylinder verstehen wir ein Polyeder, das sich als i-stufige Minkowskische Summe $A = A_1 \times A_2 \times .. \times A_i$ mit $A_\nu \subset R_{k_\nu}$, $k_1 + \dots + k_i = k$ darstellen lässt.

Ein beliebiges Polyeder ist demnach ein 1-stufiger Zylinder, ein Parallelotop ein k-stufiger Zylinder. Es gilt der folgende Hilfssatz: Ist $A \in Z_i$, so gibt es eine Zerlegung $A \sim A' + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ mit $A' \in Z_{i+1}$

Hierbei bedeutet K_i die Klasse aller Polyeder, die mit endlich vielen i-stufigen Zylindern G-zerlegungsgleich sind. Offenbar gilt $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_k$.
λA bezeichnet das sich aus A durch Dilatation mit λ ergebende Polyeder. Es lässt sich zeigen, dass die Zerlegungsgleichung $n \cdot X = A$ bei gegebenem A stets eine und (bis auf G-zerlegungsgleiche) nur eine Lösung hat. Es wird $X = \frac{1}{n} \cdot A$ gesetzt. Mit $p = \frac{m}{n}$ wird $p \cdot A = m \cdot \frac{1}{n} \cdot A$ definiert. Es gelten die üblichen distributiven Gesetze wie $(p+q) \cdot A = p \cdot A + q \cdot A$, $p \cdot q \cdot A = pq \cdot A$ usw. – Es kann nun eine Zerlegungsalgebra entwickelt werden. Eine Formel dieser Algebra lautet z.B.:

$$\begin{vmatrix} A & pA & \dots & p^k A \\ 1 & p & & p^k \\ \vdots & & & \\ 1 & p^k & \dots & p^{k^2} \end{vmatrix} \sim 0 \qquad (p = \text{rational}),$$

welche ausdrückt, dass zwischen den rational dilatierten Polyedern $A, pA, \dots, p^k A$ eine Zerlegungsrelation
$q_0 \cdot A + q_1 \cdot pA + \dots + q_k \cdot p^k A \sim 0$ besteht.

Nach einer Hamelschen Konstruktion lässt sich eine Polyederbasis H_τ aufstellen (Wohlordnung!) so, dass sich jedes Polyeder A auf eine und nur eine Weise in der Form $A \sim \sum h_\tau \cdot H_\tau$ „darstellen" lässt. Die rationalen Koeffizienten
$h_\tau = h_\tau(A)$ sind Funktionen von A, welche die Eigenschaften (I) $\Phi(A) = \Phi(A')$ $A \simeq A'$ (G-invariant) (II) $\Phi(A+B) = \Phi(A) + \Phi(B)$ (additiv) aufweisen. Es lässt sich nun eine Verallgemeinerung eines Satzes von B. Jessen (1941) gewinnen: Zwei Polyeder A und B sind dann und nur dann G-zerlegungsgleich, wenn für alle G-invarianten und additiven Funktionen Φ gilt: $\Phi(A) = \Phi(B)$.

Um eine effektive (nicht nur formale) Lösung des Zerlegungsproblems zu gewinnen, müsste man nun die Funktionale Φ kennen. Man kann zeigen, dass $\Phi(\rho A) = \chi_1(A)\rho + \chi_2(A)\rho^2 + \dots + \chi_k(A)\rho^k$ (für ρ rationale) ist, wobei nun die Koeffizientenfunktionale $\chi_i(A)$ rational homogen vom Grade i sind, wenn $\chi_i(\rho A) = \rho^i \chi_i(A)$ gilt. Rekursiv erklärt Darstellungen der Form

$$\chi_i(A) = \sum \varphi_i[V(A_i)]\,\psi_{k-i-1}(T_{k-i-1}) \qquad (1 \leq i < k)$$

wobei sich die Summation über alle i-dim. Randpolyeder A_i von A zu erstrecken hat, und φ eine Cauchy-Hamelsche Lösung der Funktionalgleichung $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi(\alpha+\beta)$ und $V(A_i)$ das i-dim. Volumen von A_i bedeutet. ψ_m bezeichnet ferner ein Funktional der m-dim. sphärischen Teilpolyeder auf der $(k-1)$-dim. Einheitssphäre S_{k-1} mit den Eigenschaften I) $\psi_m(T) = \psi_m(T')$ $T \cong T'$ (bez. der Drehungsgruppe D von G); II) $\psi_m(T+T') = \psi_m(T) + \psi_m(T')$ ($T, T' \in$ nämlichen m-dim. Sphäre $S_m \subset S_{k-1}$) III. $\psi_m(Z) = 0$ für ein Zweieck.

T_{k-1-1} bezeichnet nun das $(k-i-1)$-dim sphärische Polyeder, das durch die bez. A nach außen gerichteten Normalenvektoren in einem Punkt des betrachteten i-dim. Randpolyeders auf der $(k-1)$ dim. Sphäre S_{k-1} beschrieben wird.

Vermutlich lassen sich alle Funktionale χ_i in der oben erörterten Form darstellen. Im Falle, wo G mit der vollen Bewegungsgruppe zusammenfällt, wird $\psi_{2m}(T) \equiv 0$ und demnach ist $\chi_{k-2m-1}(A) = 0$. Falls die erwähnte Vermutung zutrifft, lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die G-Zerlegungsgleichheit $A \sim B$ mit den oben angegebenen Funktionalen dadurch ausdrücken, daß $\chi_k(A) = \chi_k(B)$; $\chi_{k-2}(A) = \chi_{k-2}(B)$; … ausfallen muß. Für $k=3$ hat man $\chi_3(A) = \chi_3(B)$ [oder $V(A) = V(B)$] und $\chi_1(A) = \chi_1(B)$ [Dehnsche Bedingungen; diese wären demnach notwendig und hinreichend!]

Falls aber G mit T zusammenfällt, trifft die Vermutung oben sicher zu, und demzufolge kann das Problem der translativen Zerlegungsgleichheit vollständig gelöst werden.

7. 8. 57 H. Hadwiger

Natürliche Gleichungen einer Fläche.

Es wird bewiesen: Es gibt (von Ausnahmefällen abgesehen) im dreidimensionalen Raum in der Umgebung des Punktes $p=q=0$ eine und nur eine analytische Fläche $\mathfrak{y}(p,q)$, welche für $q=0$, $p=s$ (s = Bogenlänge!) durch einen beliebig vorgegebenen analytischen Streifen Γ geht, deren Parameter p,q isotherme Parameter sind und bei der eine ~~Krümmungs~~invariante ϕ als Funktion von p,q gleich einer beliebig vorgegebenen analytischen Funktion $f(p,q)$ ist. (Hierbei darf für ϕ nur eine solche Invariante genommen werden, bei welcher die Gleichung $\phi(E,F,G,L,M,N) = f$ eindeutig nach N auflösbar ist!) Wir können also in Analogie zur ebenen Kurventheorie $\phi = \phi(p,q)$ als „natürliche Gleichung" von $\mathfrak{y}(p,q)$ bezeichnen. ~~Für ϕ~~ kann z.B. die Gaußsche Krümmung K, die mittlere Krümmung H, die harmonische Krümmung $\frac{2H}{K}$ und eine der Hauptkrümmungen sein. Ein entsprechender Satz gilt auch, wenn p,q isotherme Parameter des sphärischen Bildes von $\mathfrak{y}(p,q)$ sind. Schließlich kann man sich bei diesen Sätzen von der Beschränkung auf spezielle Parameter befreien, wenn man noch zusätzlich die sogenannte „relative erste

Grundform" $\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)$ bzw. die analog definierte relative dritte Grundform der Fläche $y(u,v)$ vorgibt. Man gelangt so zu Verallgemeinerungen der Resultate von Scherrer. (Comment. math. helv. 25).

8.8.51. K. Leichtweiß

Über das Einspannungsproblem in der projektiven Differentialgeometrie.

Wir betrachten die p-dimensionale Fläche F_p im n-dimensionalen Raum projektiven P_n. Für das Studium der F_p in der Umgebung eines Punktes P muss man zunächst das Einspannungsproblem lösen, d.h. ein in P angeheftetes örtliches Basissystem angeben. Dabei wird es darauf ankommen, dieses Basissystem so zu wählen, dass es sich bei den projektiven Transformationen des P_n wie ein kontravarianter linearer Raum verhält und nicht von den Parametertransformationen auf der F_p und von der Normierung der homogenen Koordinaten abhängt. — Dazu erklären wir zunächst mit Hilfe des üblichen Begriffs vom $(i+1)$-ten Schmiegraum S_{i+1} $(i=1,\ldots,n)$ den i-ten Normalenraum N_i als einen solchen linearen Raum, der mit S_i einen leeren Durchschnitt hat und mit S_i zusammen den S_{i+1} aufspannt. Als 0-ten Normalenraum N_0 insbesondere bezeichnen wir einen beliebigen im Tangentialraum gelegenen linearen $(p-1)$-dimensionalen Raum, der nicht den Punkt P enthält. Während die S_{i+1} eindeutig mit der F_p verknüpft sind, ist dies für die N_0, N_i offenbar nicht der Fall. Es kommt aber darauf an, diese N_0, N_i als ganze invariant festzulegen. Dies wird nun durch eine Reihe von verallgemeinerten Apolaritätsbedingungen dergestalt geleistet, dass die N_i soweit festgelegt sind, dass sie nur von einem beliebigen N_0 abhängen. Den Aufbau der

Flächentheorie mit Hilfe dieses „polaren Basissystems“ entspricht für die Grenzfälle einer Kurve ($p=1$) und einer Hyperfläche ($p=n-1$) demjenigen, wie ihn Prof. Bol durchgeführt hat. Und zwar besteht die polare Basis einer Kurve aus den Ableitungen nach der bei einer beliebigen festgehaltenen Normierung definierten Affinbogenlänge. Die Mannigfaltigkeit der polaren Basissysteme entspricht also hier den verschiedenen Normierungen. — Bei Hyperflächen besteht das polare Basissystem aus einem beliebigen N_0 und einem Punkt auf derjenigen durch P verlaufenden Geraden, die zu N_0 polar ist bezüglich der in P oskulierenden Darboux-Quadrik.

Um auch N_0 festzulegen, geben wir eine weitere Apolaritätsbedingung an; sie ist im Falle der Kurve und Hyperfläche von der Apolaritätsbedingung abhängig, führt also nicht zu einer Festlegung von N_0. Man kann in diesen Fällen unter Heranziehung einer weiteren Ableitung auf sehr mannigfache Weise N_0 festlegen und gelangt zu den Normalenräumen von Fubini, Wilczynski u.a. — Haben wir nicht einen dieser Grenzfälle vor uns, so wird eine der erwähnten Bedingung N_0 festlegen. Das einfachste Beispiel liefert die F_2 im P_4, wo wir ein von Ableitungen bis zur 3. Ordnung abhängendes Basissystem erhalten. Es lässt sich in einfacher Weise mit Hilfe der 3-dim. Schmiegquadriken an die F_2, die die F_2 von 3. Ordnung berühren, kennzeichnen.

Aus dem projektiven Raum P_n wird ein affiner Raum A_n^∞, wenn wir eine Hyperebene E_{n-1}^∞ als uneigentliche Ebene auszeichnen. Der Schnitt des Tangentialraums mit E_{n-1}^∞ liefert einen affininvarianten N_0. Unser polares Basissystem ist hierdurch eindeutig affininvariant festgelegt und besteht für Kurven aus den Ableitungen nach der Affinbogenlänge; für Hyperflächen führt es zu der bekannten Affinnormale von Blaschke und Berwald und in dem allgemeinen Fall, dass der S_2 den A_n aufspannt, erhalten wir als N_1 die von Weise angegebene Affinnormale an. — Diese Überlegungen lassen sich unmittelbar zur Lösung des Einspannungsproblems für Räume mit affinem Zusammenhang verwenden.

8. August 1951 Wilhelm Klingenberg.

<u>Richtungsübertragungen in Flächen.</u> (8.8.51.)

post

Eine Richtungsübertragung in einer gegebenen Fläche kann durch eine Funktion Ψ des Linienelementes (P, t) festgelegt werden, die die Größe der Normalkomponente der Winkelgeschwindigkeit einer tangentialen Scheibe beim Fortschreiten ihres Berührungspunktes mit der Einheitsgeschwindigkeit t angibt, und umgekehrt. Ψ heiße die <u>Kernfunktion</u> der Übertragung. Sie muß ein „antisymmetrisches Verteilungsgesetz" haben, d.h. es muß gelten $\Psi(P, t) = -\Psi(P, -t)$.

Die einzige Übertragung, deren Kernfunktion eine reine Ortsfunktion ist, ist demnach diejenige mit verschwindender Kernfunktion, die geodätische Verschiebung.

Überträgt man ein Linienelement in seiner eigenen Richtung beliebig weit, so entsteht eine <u>Kernlinie</u> der Übertragung; ihre geodätische Krümmung ϱ ist an jeder Stelle gleich der Kernfunktion ihres Linienelementes: $\varrho = \Psi$.

Eine <u>lineare Übertragung</u> ist eine solche, deren Kernfunktion eine lineare Skalarfunktion der Richtung t ist oder ein „lineares Verteilungsgesetz" hat. Sie läßt sich als Skalarprodukt von t mit einem Vektor w, der eine Funktion des Ortes allein ist, darstellen:

$$\Psi = w t;$$

w heiße der <u>Kernvektor</u> der linearen Übertragung.

Zur Festlegung einer solchen genügen zwei Scharen von Kernlinien mit der Eigenschaft, daß durch jeden Punkt der Fläche genau zwei deren Linien gehen. Für das Bündel der durch einen Punkt laufenden Kernlinien einer linearen Übertragung gilt eine Verallgemeinerung eines Satzes von Cesàro über die Krümmungskreise der durch einen Punkt gehenden Isogonaltrajektorien seiner Kurvenschar.

Eine <u>integrable Richtungsübertragung</u> kann durch ein Feld von <u>Nullvektoren</u> x_0 gegeben werden, die alle aus einem von ihnen durch die Übertragung in eindeutiger Weise hervorgehen, wenn sie vom Weg unabhängig ist. Die x_0 gehen durch Drehung um einen konstanten Winkel in ein System von Nullvektoren derselben Übertragung über. x_0 läßt sich in einem orthogonalen Netz von Bezugslinien durch seinen Azimut, den <u>Nullwinkel</u> φ_0 festlegen.

Die <u>charakteristische Bedingung</u> der <u>Kernfunktion</u> einer <u>integrablen</u> Übertragung ergibt sich so: Auf Grund einer Formel von Bonnet-Liouville ist $\Psi = G_1 \cos\varphi + G_2 \sin\varphi + \frac{d\varphi_0}{ds}$, wo G_1 und G_2 die geodätischen Krümmungen der Netzlinien sind und φ den Richtungswinkel von t, $\frac{d}{ds}$ die geometrische Ableitung in der Richtung t bedeutet. Die zu den Tangentenrichtungen t_1 und t_2 der Bezugslinien gehörenden Werte von Ψ sind hiernach

$$\Psi_1 = G_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial s_1} \quad \text{und} \quad \Psi_2 = G_2 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial s_2}.$$

Wendet man auf die Ortsfunktion φ_0 die Integrabilitätsbedingung in der Form $\frac{\delta}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1} - \frac{\delta}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2} = 0$ an — $\frac{\delta}{\partial s}$ bedeute die „geodätische Ableitung" einer Linienelementfunktion, d. h. die Ableitung nach einer Bogenlänge unter der Annahme, daß das ~~Bogen~~element der zu differenzierenden Funktion einer geodätischen Verschiebung unterworfen wird — so findet man

$$\frac{\delta \Psi_1}{\partial s_2} - \frac{\delta \Psi_2}{\partial s_1} = K,$$

wo K das Gaußsche Krümmungsmaß ist, da nach dem theorema egregium $\frac{\delta G_1}{\partial s_2} - \frac{\delta G_2}{\partial s_1} = K$ ist. Die gleiche Beziehung, außerdem aber auch die Mainardi-Codazzische Gleichung erhält man, wenn man von der Grundformel für die Drehung eines starren Körpers ausgeht: $\frac{dx_0}{ds} = (sg + \Psi sn) \times x_0$; hier bedeutet n den Flächennormaleneinheitsvektor u. g den „geodätischen Krümmungsvektor" für das Element (P, t).

Frank Löbell

9.8.51.

Eine Verallgemeinerung der Plückerschen Formel für das Geschlecht einer algebraischen Kurve

0. $P^{(2)}$ sei die komplex-projektive Ebene, K eine irreduzible algebr. Kurve n. Ordnung ohne Singularitäten in $P^{(2)}$. Dann gilt bekanntlich: Das Geschlecht p von K ist gleich $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ und die Eulersche Charakteristik ist $E(K) = 2-2p = -n^2+3n$. Für eine irreduzible Kurve K mit Singularitäten ist

$$p(K) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum s_j \quad \text{und} \quad E(K) = -n^2+3n+2\sum s_j$$

wobei der Index j die (endlich vielen) singulären Punkte von K durchläuft und s_j von der Art der Singularität abhängt.

Diese Sätze der algebr. Geometrie werden auf eine beliebige geschlossene komplexe Mannigfaltigkeit $M^{(2)}$ von zwei komplexen Dimensionen und auf analytische Flächen $F^{(1)}$ in $M^{(2)}$ übertragen.

1. γ sei die 2-dimensionale Chernsche Cohomologieklasse von $M^{(2)}$. Die analytische Fläche $F^{(1)}$ sei irreduzibel und singularitätenfrei. $F^{(1)}$ ist dann eine orientierbare geschlossene Fläche. $E(F^{(1)})$ sei die Eulersche Charakteristik von $F^{(1)}$, f die durch $F^{(1)}$ repräsentierte ganzzahlige (2-dim.) Homologieklasse. Satz: Es ist $E(F^{(1)}) = -f\circ f + \gamma f$

("$\circ$" = Schnittzahl, "γf" Skalarprodukt; "$\circ$" ist kommutativ)

Beweisandeutung:

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $M^{(2)}$ mit einer Hermiteschen Metrik versehen ist.

a) Der Raum $N(F^{(1)})$ der Normalvektoren vom Betrage 1 an $F^{(1)}$ ist eine dreidim. orientierte Mannigfaltigkeit, die gefasert ist in Sphären S^1 und als Basisraum die Fläche $F^{(1)}$ hat. $F^{(1)}$ und die Fasern sind durch die komplexe Struktur in bestimmter Weise orientiert. Die Seifertsche Invariante dieses gefaserten Raumes (das ist die Indexsumme einer Schnittfläche, die endlich viele (isolierte) Singularitäten hat) ist gleich $f \cdot f$ (Bew.: Aus einer solchen Schnittfläche gewinnt man einen zu $F^{(1)}$ homologen Zyklus, dessen Schnitte mit $F^{(1)}$ die singulären Punkte sind)

b) Der Raum $T(F^{(1)})$ der Tangentialvektoren vom Betrage 1 an $F^{(1)}$ ist eine dreidim. gefaserte Mannigfaltigkeit (die Faser S^1 und die Basis $F^{(1)}$ sind in bestimmter Weise orientiert) mit der Seifertschen Invarianten $E(F^{(1)})$.

c) s_N, s_T seien Schnittflächen (mit endlich vielen Singularitäten) von $N(F^{(1)})$ und $T(F^{(1)})$. Durch $[s_N, s_T]$ wird auf $F^{(1)} \subset M^{(2)}$ ein Feld (mit endl. vielen Sing.) von hermitesch-ortho~~gonalen~~normierten 2-Beinen gegeben. Hieraus folgt: $\gamma f = E(F^{(1)}) + f \cdot f$ Q.E.D.

2. Aus Dualitätssätzen folgt: Es gibt eine 2-dim. ganzz. Homologieklasse c, so daß für jede 2 dim. ganzz. Homologieklasse h gilt $\gamma h = c \cdot h$. (c ist bis auf Divisionshomologie durch γ und diese Eigenschaft bestimmt).
Wenn es in $M^{(2)}$ zwei unabhängige meromorphe Funktionen gibt, kann c folgendermaßen bestimmt werden:
Durch die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t_1, t_2)}$ (t_1, t_2 beliebige lokale Koordinaten in $M^{(2)}$) wird eine Verteilung von Null- und Polstellenflächen mit ganzzahligen Vielfachheiten gegeben. (in üblicher Weise: Nullstellenfläche positive, Polstellenfläche negative Vielfachheiten!). Hierdurch wird ein Zyklus C von $M^{(2)}$ gegeben. Durch −C wird die Homologieklasse c repräsentiert. (Entsprechendes gilt für beliebig dimensionale komplexe Mannigf. $M^{(n)}$). Beispiel: Für die komplex-projektive Ebene $P^{(2)}$ folgt: $c = 3p$, wo p die Homologieklasse der komplex-projektiven Geraden $P^{(1)}$ in $P^{(2)}$ ist. (vgl. O.)

3. In $M^{(2)}$ sei die irreduzible**) analytische Fläche $F^{(1)}$ (evtl.) mit Singularitäten gegeben; f sei die Homologieklasse von $F^{(1)}$. Jede Singularität hat eine bestimmte "Art"

(vgl. O.) und aus dieser Art kann wie in der algebr. Geometrie die positive natürliche Zahl s_j berechnet werden. (j durchläuft die endl.-vielen Singularitäten). Die "Art" ist eine lokale Eigenschaft. $F^{(1)}$ wird zu einer topologischen orientierten geschlossenen Fläche $F_*^{(1)}$, wenn man in "natürlicher Weise" einen singulären Punkt von $F^{(1)}$, durch den k Zweige gehen als Menge von k verschiedenen Punkten von $F_*^{(1)}$ auffasst. Unter $E(F^{(1)})$ wird die Eulersche Charakteristik von $F_*^{(1)}$ verstanden.

<u>Satz</u>: Es ist $E(F^{(1)}) = -f \cdot \mathfrak{f} + g \cdot f + 2\sum s_j$ **)

<u>Beweisandeutung</u>: Durch wiederholtes Einsetzen von Hopfschen Trägersphären*) in die Singularitäten gewinnt man eine Mannigfaltigkeit $\tilde{M}^{(2)}$, in der $F^{(1)}$ als singularitätenfreie Fläche $\tilde{F}^{(1)}$ aufgefasst werden kann. Anwendung von 1. auf $\tilde{F}^{(1)}$ und $\tilde{M}^{(2)}$ führt zum Ziel.

Das Einsetzen von Trägersphären entspricht der bekannten Auflösung der Singularitäten in der algebr. Geometrie. Die <u>"unendlich-benachbarten"</u> Punkte, die in der algebr. Geometrie bei der Berechnung der s_j auftreten, lassen sich als Punkte auf eingesetzten Trägersphären deuten.

*) Definitionsandeutung der Trägersphäre: Die analyt. Flächenelemente (= komplexe Linienelemente) in einem Punkte P von $M^{(2)}$ bilden eine komplex-projektive Gerade (= Trägersphäre S_P^2). Herausstechen von P und analytisches Einsetzen von S_P^2 (= Wiederabschließen mit S^2_P) ist das "<u>Einsetzen einer Trägersphäre</u>". Man erhält dadurch eine Mannigf. $M_P^{(2)} = (M_P^{(2)} - \{P\}) \cup S_P^2$.

**) Die Voraussetzung irreduzibel für $F^{(1)}$ wird überflüssig, wenn unter $E(F^{(1)})$ die Summe der $E(F_k^{(1)})$ verstanden wird. k durchlaufe die irreduziblen Bestandteile von $F^{(1)}$.

F. Hirzebruch

gewissen Parameter in der projektiven Flächentheorie.
Betrachtet werden Flächen in projektiven Räumen (Koordinaten x^k $k=0,1,\dots,n$; Koordinaten der Punktvektoren X_k) unter Verwendung inhomogener (η^p $p=1,2,\dots,n-1$) und homogener (y^k $k=0,1,\dots,n-1$) Parameter. Zur differentialgeometrischen Behandlung wird im 1. Fall die Theorie von G. Bol (Math. Ann. 122) skizziert: Halbinvariante Differentiation mit Hilfe einer beliebigen, aber festen Übertragung; invariante (gegen Parametertransformationen) Differentiation mit Hilfe des Weylschen Zusammenhangs bzgl. $g_{pq} = D_p X_k \cdot D_q x^k$ als Fundamentaltensor und einer aus der Übertragung folgenden. Die Bolsche Theorie ist halbinvariant und dual. Verallgemeinerung auf Flächen in projektiven Mannigfaltigkeiten H_n mit Koordinatentransformationen $x^{k'} = \varphi^{k'}(x^k)$, die homogen 1. Grades in den x^k sind. Behandlung des projektiven Zusammenhangs der H_n nach dem Schema einer A_{n+1}. Im 2. Falle (also Behandlung einer H_{n-1} in H_n oder P_n) werden zunächst die neu entstehenden Schwierigkeiten erwähnt, insbes. die Umwandlungen der H_n. Die halbinvariante Differentiationstheorie läßt sich wohl angeben, hat aber keine geometrische Bedeutung. Dasselbe Behandlung einer nicht-halbinvarianten Theorie. (Definition von Übertragungs~~größen~~ [illegible] und zugehöriger kovarianter Differentiation) Angabe von Sätzen: Fundamentalsatz und Ableitungsgleichungen und einiger [illegible] (u. a. Bedeutung des von Schouten [illegible] (Comp. Math. 3, eingeführten) induzierten Zusammenhangs der H_{n-1}).

9.8.51 G. Witting

Zur Geometrie der Nullkorrelationen.

Nicht ausgeartete Nullkorrelationen existieren bekanntlich nur in projektiven Räumen P_{2k+1} ungerader Dimension. Eine solche Nullkorrelation klassifiziert die Räume einer bestimmten Dimension, z. B. die Geraden in allgemeine und Komplexgeraden, die Ebenen im P_5 in solche, die ihre zugeordnete in einem Punkt

schneiden (allg. Fall) und solche, die mit ihr zusammenfallen. Man nennt diejenigen S_k, die mit ihren Nullkorrelativen zusammenfallen, also höchst spezialisiert sind, autopolar. Die Gesamtheit der Projektivitäten des S_{2k+1}, die die Nullkorrelativen Beziehungen nicht zerstören, bildet die symplektische Gruppe Γ^k von $(k+1)(2k+3)$ Parametern. Es interessieren nun folgende Fragen: 1) Struktur der Bildmannigfaltigkeit $N_{\binom{k+2}{2}}$ aller $\infty^{\binom{k+2}{2}}$ autopolaren S_k des S_{2k+1} auf der Graßmannschen Mannigfaltigkeit $G_{2k+1;k}$ aller S_k des S_{2k+1}.
2) Zerlegung des Raumes der $G_{2k+1;k}$, der durch die Γ^k gleichfalls in sich transformiert wird, in irreduzible Teilräume bezüglich Γ^k. Zur Untersuchung dieser Fragen erweist es sich als zweckmäßig, die $G_{2k+1;k}$ als Teilmenge einer umfassenderen Mannigfaltigkeit $M_{\binom{2k+2}{2}}$ aufzufassen. M ist dabei das im ~~$S_{2^{2k+1}-1}$~~ $P_{2^{2k+1}-1}$ gelegene

Minimalmodell aller auf einer Quadrik Q_{4k+2} des S_{4k+3} gelegenen Räume S^{I}_{2k+1}. Nimmt man auf einer solchen Q_{4k+2} die 3 Räume A_{2k+1}, B_{2k+1} und C_{2k+1} windschief zueinander an, so wird die Gesamtheit aller S^{I}_{2k+1}, die gleichzeitig A_{2k+1} und B_{2k+1} k-dimensional schneiden, auf die Punkte einer $G_{2k+1;k}$ abgebildet und alle diejenigen S^{I}_{2k+1}, die außerdem noch C_{2k+1} k-dimensional schneiden, auf die Punkte der $N_{\binom{k+2}{2}}$. Hieraus ergibt sich mit Hilfe elementarer Kenntnisse, die man von der $M_{\binom{2k+2}{2}}$ hat, leicht, daß $N_{\binom{k+2}{2}}$ in einem linearen Schnitt der $G_{2k+1;k}$ liegt. Auch die Zerlegung des Graßmannräumes (1.(2)) gewinnt man leicht. Zum Beispiel wird bei $k=2$ der P_{19} der $G_{5;2}$ in einen P_{13} der N_6 und einen P_5 zerlegt; der P_{69} der $G_{7;3}$ in ein P_{41} der N_{10} und einen P_{27} zerlegt. Der P_{27} gestattet aber noch eine weitere Zerlegung in einen Punkt und einen P_{26}. Dieser P_{26} läßt sich auch als hyperebener Schnitt einer im P_{27} gelegenen $G_{7;1}$ auffassen.

8.8.51. Burau

Nicht-assoziative Potenzreihen I: Algebra.

Es sei P ein freies monogenes Gruppoid [d.h. ein algebraisches System mit einer binären nicht-assoziativen Operation, mit einem einzigen Erzeugenden x, und ohne nicht-triviale Relationen]. Die Elemente von P seien mit $p, q, \dots$ bezeichnet, die Operation mit π, und zwar bezeichne πpq das Produkt von p und q [Schreibweise von ŁUKASIEWICZ]. Man bildet formale Potenzreihen $f = \sum_p \alpha_p \cdot p$, $g = \sum_p \beta_p \cdot p$, usw., mit Koeffizienten $\alpha_p, \beta_p, \dots$ aus einem (assoziativen) Ring Φ. Man definiert die algebraischen Operationen der ~~skalaren~~ Multiplikation mit einem Skalar: $\alpha f = \sum_p \alpha\alpha_p \cdot p$, der Addition: $f + g = \sum_p (\alpha_p + \beta_p) \cdot p$, und der Multiplikation

$$\pi f g = \sum_p \Big(\sum_{\pi r s = p} \alpha_r \beta_s \Big) \cdot p .$$

Wenn dann $q(x_1, x_2, \dots, x_\lambda)$ ein "einfaches" Wort, d.i. ein Wort der Länge λ, das aus $x_1, \dots, x_\lambda$ mit Hilfe von π gebildet ist, ist, so gilt

$$q(g, g, \dots, g) = \sum_r \Big(\sum_{q(p_1, p_2, \dots, p_\lambda) = r} \beta_{p_1} \beta_{p_2} \cdots \beta_{p_\lambda} \Big) \cdot r$$

und man kann in der formalen Potenzreihe $f = \sum_p \alpha_p \cdot p$ die "Variable" x durch die formale Potenzreihe $g = \sum_p \beta_p \cdot p$ ersetzen, und erhält formal:

$$h = \sum_r \Big(\alpha_r \Big(\sum_{q(p_1, p_2, \dots, p_s) = r} \beta_{p_1} \beta_{p_2} \cdots \beta_{p_s}\Big)\Big) \cdot r$$

Dies ist wieder eine formale Potenzreihe. Wir sagen, sie ist durch Substitution ~~von~~ g in f hervorgegangen, und schreiben

$$h = fg.$$

Dann haben wir im Bereiche unserer Potenzreihen die algebraischen Operationen der Addition, der Multiplikation, und der Substitution, also etwa wie eine "trioperational algebra" von MENGER [Algebra of Analysis, Notre Dame Math. Publ.].

Die algebraischen Gesetze, die die Operationen verknüpfen, sind die folgenden: Die Potenzreihen bilden additiv eine abelsche Gruppe, multiplikativ ein Gruppoid, und es gelten die beiden additiv-multiplikativen Distributivgesetze. Substitution ist assoziativ wenn der Koeffizientenring Φ kommutativ ist; es gilt das additiv-substitutive Distributivgesetz, und auch das multiplikativ-substitutive Distributivgesetz wenn der Koeffizientenring Φ kommutativ ist. Ist der Koeffizientenring Φ ein (kommutativer) Körper, und nennt man f "regulär" wenn $\alpha_x \neq 0$ ist, so haben die regulären Potenzreihen, und nur diese, substitutive Inverse, d.h. zu f gibt es, wenn f regulär ist und nur dann, ein g, so dass $fg = gf = j$ ist, wobei $j = \sum_p \iota_p \cdot p$ mit $\iota_x = 1$, $\iota_p = 0$ für $p \neq x$, das substitutiv neutrale Element ist: $jf = fj = f$ für alle f.

Hat der Koeffizientenkörper Φ Charakteristik

0, so kann man im Bereiche dieser Potenzreihen algebraische Gleichungen lösen. Man kann auch den Bereich der Potenzreihen dadurch erweitern, dass man noch ein "konstantes Glied" zulässt, also etwa Reihen $F = 1+f$ betrachtet. Für diese lässt sich dann die Addition und Multiplikation ohne Weiteres definieren, und die Reihen der Gestalt $1+f$ bilden einen <u>loop</u>, in dem jede Gleichung der Form $q(G, G, \dots, G) = F$ für gegebenes $F = 1+f$ durch ein $G = 1+g$ lösbar ist. Substitution von g in F ist gestattet, also Fg hat einen Sinn; nicht aber umgekehrt.

9. Aug. 51 B. H. Neumann (Manchester)

Nicht-assoziative Potenzreihen II: Analysis.

Es wird nun das System der Potenzreihen $F = \alpha_1 + \sum_p \alpha_p \cdot p$ betrachtet. $f, g, \dots$ sind weiterhin Potenzreihen ohne konstantes Glied. Substitution Fg ist gestattet. Die Reihen $C = \alpha_1 + \sum_p 0 \cdot p$ sind "Absolut konstanten": für sie gilt $Cf = C$ für alle f.

Ein Differentialoperator Δ sei durch Additivität: $\Delta(F+G) = \Delta F + \Delta G$, und zwar unendliche Additivität: $\Delta \sum \alpha_p \cdot p = \sum \alpha_p \cdot \Delta p$ [dies sei formal verstanden] und die Multiplikationsformel $\Delta \pi FG = \pi(\Delta F)G + \pi F(\Delta G)$ eingeführt. Gilt $\Delta C = 0$, so heisst C eine "Relativkonstante". Diese verhalten sich gegenüber der Differentiation genau so wie gewöhnliche Konstanten bei gewöhnlicher Differentiation.

Insbesondere gilt $\Delta \pi F C = \pi(\Delta F) C$, usw.

Ein Differentialoperator Δ ist vollständig festgelegt, wenn Δj festgelegt ist. Wir betrachten die folgenden speziellen Operatoren:

∂ : definiert durch $\partial j = 1$

∂^*: — — — — — — $\partial j = j$.

Dann gilt für $F = \alpha_1 + \sum \alpha_p \cdot p$

$\partial^* F = \sum \lambda(p) \alpha_p \cdot p$ wobei $\lambda(p)$ die Länge von p, $\lambda(1) = 0$ ist. Die Relativkonstanten von ∂^* sind genau die Absolutkonstanten. Bei ∂ andererseits gibt es nicht-absolute Relativkonstanten, z.B. $c_1 = \pi\pi jjj - \pi j \pi jj$.

Eine Lösung der Differentialgleichung $\partial E = E$ nennen wir "Exponentialfunktion". Deren gibt es unendlich viele, und zwar sogar wenn man das konstante Glied normiert, etwa $=1$ setzt. Es gilt ähnlich dass mit E auch $\pi C E$ und $\pi E C$ Exponentialfunktionen sind, wenn C Relativkonstante ist; und umgekehrt, wenn E und $\pi E F$ oder $\pi F E$ Exponentialfunktionen sind, so ist F Relativkonstante.

Setzt man $E = 1 + e$ (wobei E normiert ist) so heisse e "Quasiexponentialfunktion". Sie erfüllt die Differentialgleichung $\partial e = 1 + e$, oder $\partial(e - j) = e$. Sie ist regulär, hat daher eine Inverse l, die durch $le = el = j$ definiert ist, und "Quasilogarithmus" genannt werde. Dann gilt für l die Gleichung $\partial l + \partial^* l = 1$. Jede Lösung dieser Gleichung ist ein Quasilogarithmus, also zu einer Quasiexponentialfunktion invers. Zwei Quasilogarithmen l_1, l_2 stehen in der

Beziehung $l_2 = (j+c)\,l_1$, wo c eine Relativkonstante ohne Absolutkonstantes Glied ist; umgekehrt ist mit l auch jedes $(j+c)\,l$ Quasi-logarithmus.

10. Aug. 51 B. H. Neumann (Manchester)

<u>Bericht</u> über Ergebnisse von <u>Alfred Tarski</u>

betreffend Entscheidbarkeit und deduktive Vollständigkeit im Bereich der elementaren Algebra und Geometrie.

Es handelt sich für die Algebra um diejenigen Aussagen, die sich ausdrücken lassen mittels

der arithmetischen Verknüpfungen: Summe, Differenz, Produkt,
der arithmetischen Beziehungen: $=$, $<$,
der aussagenlogischen Verknüpfungen,
der Begriffe „alle", „es gibt", bezogen auf Individuen.

Die Aufgabe der Entscheidung über die Gültigkeit einer solchen Aussage kommt hinaus auf die Elimination der Anwendungen der Begriffe „alle", „es gibt" (wobei sich der eine von diesen auf den anderen zurückführen lässt).

Im Sinne eines rekursiven Verfahrens handelt es sich letzten Endes darum, Fragen der folgenden Form zu beantworten: Wie gross ist die Anzahl der Werte x, für die ein gegebenes Polynom $P(x)$ den Wert 0 hat, während zugleich die Polynome $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$ positive Werte erhalten? Oder <u>genauer</u>: Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten von $P, Q_1, \dots, Q_n$ erfüllen, damit die Anzahl der verschiedenen Werte x, für die $P(x) = 0$ und zugleich $Q_1(x) > 0, \dots, Q_n(x) > 0$, gleich k ist? Die Ermittlung der Bedingungen erfolgt durch Anwendung einer Verallgemeinerung des <u>Sturmschen Satzes</u> über die Anzahl der reellen Nullstellen eines Polynoms in einem Intervall, und die Bedingungen stellen sich dar durch eine aussagenlogische Verknüpfung von Gleichungen und Ungleichungen für die Koeffizienten der Polynome $P, Q_1, \dots, Q_n$.

Die bei diesem Verfahren anzuwendenden Überlegungen lassen sich deduktiv formalisieren im Rahmen des logischen Kalkuls der ersten Stufe (d. h. des gewöhnlichen Prädikatenkalkuls), unter Zugrundelegung endlich vieler Axiome, welche die charakteristischen Eigenschaften eines geordneten Körpers zur Darstellung bringen, und eines Axiomen-Schemas der Stetigkeit, welches in der Gestalt

$$f(a) < 0 \,\&\, f(b) > 0 \,\&\, a < b \rightarrow (Ex)(a < x \,\&\, x < b \,\&\, f(x) = 0)$$

("Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ und $a < b$, so gibt es ein x derart dass $a < x$ und $x < b$ und $f(x) = 0$")

gewählt werden kann. Dabei bedeutet $f(c)$ einen beliebigen arithmetischen Ausdruck mit dem Argument c, der mit den Ausdrucksmitteln des Axiomensystems und des logischen Kalkuls gebildet werden kann. (Hierzu ist zu bemerken, dass in den logischen Kalkul auch die Kennzeichnungen (descriptions), d. h. die Formalisierungen des Begriffes „derjenige, welcher", einbezogen sein sollen.)

Für den so abgegrenzten formal-deduktiven Bereich ergibt sich mittels der formalen Übersetzung der im Obigen angedeuteten Entscheidungs-Methode die deduktive Abgeschlossenheit: d. h. jede Satzformel (Formel ohne freien Parameter) ist entweder beweisbar, oder ihre Negation ist beweisbar.

Hierdurch unterscheidet sich der betrachtete Bereich von den formalen Systemen der Zahlentheorie, der Analysis und der Mengenlehre, für welche gemäss dem Gödelschen Unvollständigkeits-Theorem die deduktive Abgeschlossenheit mit der Widerspruchsfreiheit nicht vereinbar ist (d. h. sowahr sie widerspruchsfrei sind, sind sie nicht deduktiv abgeschlossen).

Es kommt hier zur Geltung, dass in dem betrachteten Bereich keine Aussage formulierbar ist, welche eine Allgemeinheit inbezug auf natürliche Zahlen

z. B. Gradzahlen von Polynomen, enthält.

Gleichwohl lässt sich auch für solche Aussagen aus dem Entscheidungsverfahren eine Konsequenz entnehmen. Nämlich es ergibt sich: Wenn $\mathfrak{A}(m, n, \dots, k)$ eine Aussage mit Zahlparametern $m, n, \dots, k$ ist, die für jedes feste Wertsystem der Parameter eine Aussage des betrachteten Bereiches ergibt, und wenn K_1, K_2 geordnete, reell-algebraisch abgeschlossene Körper sind, so gilt die Aussage, dass für *alle* $m, n, \dots, k$: $\mathfrak{A}(m, n, \dots, k)$ besteht, falls sie für K_1 zutrifft, auch für K_2.

Anwendungsbeispiel, von Herrn *Hopf*: Aus der Tatsache, dass auf der Kugel kein stetiges Richtungenfeld existiert, folgt unmittelbar der Satz: Wenn $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ homogene Polynome mit reellen Koeffizienten sind, welche der Bedingung $x \cdot f(x, y, z) + y \cdot g(x, y, z) + z \cdot h(x, y, z) = 0$ genügen, so gibt es eine gemeinsame reelle Nullstelle x_0, y_0, z_0 von f, g, h.

Dieser Satz, der sich auf den Körper der reellen Zahlen bezieht, lässt sich aufgrund der gemachten allgemeinen Feststellung über Aussagen $\mathfrak{A}(m, n, \dots, k)$ — die Zahlparameter sind hier im Beispiel die Gradzahlen der Polynome f, g, h — ausdehnen auf Polynome mit Koeffizienten aus irgend einem geordneten reell abgeschlossenen Körper, wobei die Existenz der Nullstelle sich auch auf diesen Körper bezieht. –

Die genannten Feststellungen übertragen sich mittels der Methode der analytischen Geometrie auf den Bereich der elementargeometrischen Sätze. Man gewinnt so ein Entscheidungs-Verfahren betreffend die Gültigkeit elementargeometrischer Aussagen, – soweit solche keine Allgemeinheit über Anzahlen oder Mengen in sich schliessen. Ferner ergibt sich die deduktive Abgeschlossenheit, im Rahmen des logischen Kalkuls der ersten Stufe, für das System der Axiome der euklidischen Geometrie, wenn darin die Stetigkeitsaxiome durch ein *beschränktes Schnittprinzip* (in Form eines Axiomen-Schemas) ersetzt werden, durch welches die Lückenlosigkeit der

Ordnung der Punkte auf der Geraden nur inbezug auf solche Einteilungen (Schnitte) gefordert wird, die sich durch die geometrischen Grundbegriffe mittels der aussagenlogischen Zusammensetzungen und der Begriffe „alle", „es gibt", bezogen auf die Grundelemente, ausdrücken lassen.

Der Übergang von der axiomatischen zur analytischen Geometrie erfolgt durch die Streckenrechnung, die hier, da das archimedische Axiom nicht zur Verfügung steht, nach der Hilbertschen Methode auszuführen ist. In Bezug auf die Begründung der Strecken-Rechnung ohne Stetigkeitsaxiom (jedoch mit Anwendung der Kongruenzaxiome) wird darauf hingewiesen, dass es vorteilhaft ist, zunächst die Strecken-Proportionalität, und zwar als Proportionalität der Katheten zweier rechtwinkliger Dreiecke, mittels Winkelgleichheit zu definieren, aufgrund dieser Definition die Gesetze der Strecken-Proportion zu beweisen und hernach erst die Strecken-Multiplikation durch die Definition

$a \cdot b = c \leftrightarrow a : e = c : b$ (e Einheitsstrecke)

einzuführen. —

P. Bernays.

11. August 1951.

18.8.51 Über die Beugung elektromagnetischer Schwingungen.
(Abh. d. Dtsch. Akadem. Berlin 1945/46, Nr. 3)

Die Lösung der Gleichungen

(1) $\nabla \times \mathfrak{H} + i\omega\varepsilon\mathfrak{E} = \mathfrak{j}; \quad \nabla \times \mathfrak{E} - i\omega\mu\mathfrak{H} = -\mathfrak{j}'$

wird unter Benutzung der Ausstrahlungsbedingungen

(2) $$\lim_{R\to\infty} R(\omega\varepsilon(n \times \mathfrak{E}) + k\mathfrak{H}) = 0$$
$$\lim_{R\to\infty} R(\omega\mu(n \times \mathfrak{H}) - k\mathfrak{E}) = 0$$

und der Beschränktheitsbedingung $R\mathfrak{E}$, $R\mathfrak{H}$ endlich, für räumlich veränderliche ε und μ untersucht.

Ist außerhalb eines regulären Gebietes G mit der Randfläche F $\varepsilon = \varepsilon_a = \text{const}$; $\mu = \mu_a = \text{const}$, während

$\varepsilon = \varepsilon_i$ und $\mu = \mu_i$ im Innern von G stetig differenzierbar sind, so kann die Lösung von (1) mit Hilfe des einfallenden Feldes E_e, H_e, das nach bekannten Formeln aus den vorgegebenen j und j' berechnet werden, auf ~~die~~ Integralgleichungen zweiter Art vom Fredholm-Hilbertschen Typ zurückgeführt werden. Die Existenz der Lösung folgt dann aus den Fredholmschen Sätzen, ~~wenn~~ nachdem die Eindeutigkeit der Lösung mit Hilfe der Ausstrahlungsbedingungen bewiesen wurde.

Durch Benutzung einer neuen, durch die Natur des Problems angeregten Definition der Operationen "div" und "rot" können die Differenzierbarkeitsbedingungen schwächer gehalten werden als sonst bei Problemen dieser Art notwendig ist. (Erweiterung der gesamten Arbeit des Vortragenden)

Claus Müller

Über die Hardy-Landausche Identität und verwandte Fragen. 17. 8. 51

Setzt man

$$\sum_{n^2+m^2\le R^2} 1 = \pi R^2 + L(R)$$

so wird bekanntlich

$$L(R) = R \sum_{n^2+m^2>0} \frac{J_1(2\pi R\sqrt{n^2+m^2})}{\sqrt{n^2+m^2}}$$

wo $J_1(x)$ die Besselfunktion der Ordnung eins darstellt.

Eine Übertragung der Eulerschen Summenformel auf mehrere Veränderliche ermöglicht vereinfachte Beweise für die Identität

$$\sum_{(x-n)^2+(y-m)^2\le R^2} 1 - \pi R^2 = R \sum_{n^2+m^2>0} e^{2\pi i(nx+my)} \frac{J_1(2\pi R\sqrt{n^2+m^2})}{\sqrt{n^2+m^2}}$$

mit
$$L(R;x,y) = \sum_{(x-n)^2+(y-m)^2 \le R^2} 1 \;-\; \pi R^2$$
kann
$$\iint L(R;x,y)\, f(x,y)\,dx\,dy = O(\sqrt{R})$$
für beliebige stetige $f(x,y)$ bewiesen werden.

Durch Diskussion der Reihe
$$\sum_{0 \le n^2+m^2 \le R^2} \frac{\sin(2\pi d\sqrt{n^2+m^2})}{\sqrt{n^2+m^2}}$$
lassen sich Aussagen über die Verteilung der Gitterpunkte in der Ebene gewinnen.

Claus Müller

17.8.51. Eine Verallgemeinerung des „freien Produkts zweier Gruppen mit einer vereinigten Untergruppe". I.

Problem: Gegeben ist ein System von Gruppen G_i, die paarweise isomorphe Untergruppen $U_{ik} \subseteq G_i$ und $U_{ki} \subseteq G_k$ enthalten, mit vorgeschriebenen Isomorphismen σ_{ik} (also $U_{ik}\sigma_{ik} = U_{ki}$ elementweise). Gibt es eine Gruppe G, die die Gruppen G_i isomorph als Untergruppe enthält derart dass in G entsprechende Elemente von U_{ik} und U_{ki} — und nur diese — zusammenfallen, also $G_i \cap G_k = U_{ik}$ ist für alle Paare i,k?

Fallen alle $U_{ik} \subseteq G_i$ miteinander zusammen, und sind also alle einer festen Gruppe U isomorph (für alle Paare i,k) so ist das Schreier'sche freie Produkt der G_i mit der einen vereinigten Untergruppe U eine Gruppe der gewünschten Art. Im allgemeinen Fall müssen die Untergruppen U_{ik} und Isomorphismen σ_{ik} gewisse „Ver-

verträglichkeitsbedingungen" erfüllen, die ausdrücken dass, falls die gesuchte Gruppe G existiert, der Durchschnitt von je drei Gruppen G_i, G_k, G_l in G in jeder einzelnen dieser Gruppen gebildet werden kann, nämlich z.B. in G_i als Durchschnitt $D_{ik} \cap D_{il}$; entsprechend in G_k und G_l, mit demselben Resultat.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so nehme man zunächst im System aller Elemente aller gegebenen Gruppen G_i die Identifizierung entsprechender Elemente von D_{ik} und D_{ki} vor. Man erhält eine "unvollständige Gruppe", das sogen. "Amalgam" A der Gruppen G_i: A besteht aus genau allen Elementen aller Gruppen G_i mit vereinigten Untergruppen D_{ik}; das Produkt zweier Elemente des Amalgams ist definiert dann und nur dann wenn diese Elemente ein und derselben Untergruppe G_i angehören. Das Problem ist nun das Amalgam A in eine Gruppe G einzubetten.

Nicht jedes Amalgam ist einbettbar: Es gibt schon ein Amalgam von nur drei Gruppen das sicher nicht einbettbar ist.

Es gibt aber den folgenden Reduktionssatz: Bezeichnet man mit D_i die von den D_{ik} (mit festem i) erzeugte Untergruppe von G_i, und mit D das durch Identifizierung ~~der von~~ D_{ik} mit D_{ki} erhaltene Amalgam der Gruppen D_i, dann ist das Amalgam A der Gruppen G_i sicher dann einbettbar, wenn das Amalgam D der Gruppen D_i einbettbar ist. (Beweis durch wiederholte Anwendung der Schreierschen Konstruktion).

Darüber hinaus ist nur bekannt, dass jedes Amalgam zyklischer, oder lokal-zyklischer, Gruppen einbettbar ist. Schon für Amalgame abelscher Gruppen ist dies nicht mehr der Fall: R. Baer gibt ein Beispiel eines Amalgams von vier abelschen Gruppen das nicht in eine Gruppe eingebettet werden kann.

Hanna Neumann.

19.8.51. Eine Bemerkung zur Klassifikation der Zahlen.

Gesichtspunkte für eine Klassifikation: 1. algebraisch abhängige Zahlen in einer Klasse, 2. Güte der Approximation durch algebraische Zahlen, 3. maßtheoretische —.

Klassifikation nach Mahler: $\omega_n(A, \xi) = \text{Min}\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \xi^\nu\right)$ mit $|a_\nu| \le A$ und $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \xi^\nu \neq 0$.

$$\omega_n(\xi) = \overline{\lim_{A\to\infty}} \frac{\log \frac{1}{\omega_n(A,\xi)}}{\log A}, \qquad \omega(\xi) = \omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\omega_n(\xi)}{n}.$$

A-Klasse: $\omega = 0$, $\mu = \infty$

S- " : $0 < \omega < \infty$, $\mu = \infty$

T- " : $\omega = \infty$, $\mu = \infty$

U- " : $\omega = \infty$, $\mu < \infty$

wenn μ maximaler Index von n mit $\omega_n(\xi) < \infty$, und $\mu = \infty$, falls $\omega_n(\xi) < \infty$ für alle n.

Dann sind algebraisch abhängige Zahlen stets in einer Klasse.

Verfeinerung dieser Klassifikation durch Aufspaltung der T- und der U-Klasse in nichtabzählbar viele Klassen: Einführung von

$$\omega_n^{(\varrho)}(\xi) = \overline{\lim_{A\to\infty}} \frac{\log \frac{1}{\omega_n(A,\xi)}}{(\log A)^\varrho} \quad \text{mit } \varrho \ge 1, \text{ und}$$

$$\omega^{(\varrho,\eta)}(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\omega_n^{(\varrho)}(\xi)}{n^\eta} \quad \text{für } \eta > 0.$$

Dann zu festem ϱ: U_{ϱ^-}-Klasse $\omega_n^{(\varrho)}(\xi) = 0$ für alle n und $\omega_n^{(\varrho-\varepsilon)}(\xi) = \infty$ für $n \ge n_0(\varepsilon)$ und $\varepsilon > 0$,

und für alle ϱ U_ϱ-Klasse $0 \le \omega_n^{(\varrho)}(\xi) < \infty$ für alle n und $0 < \omega_n^{(\varrho)}(\xi) < \infty$ für $n \ge n_0$,

U_{ϱ^+}-Klasse $\omega_n^{(\varrho+\varepsilon)}(\xi) = 0$ für $\varepsilon > 0$ und allen und $\omega_n^{(\varrho)}(\xi) = \infty$ für $n \ge n_0$.

Falls sich kein endl. ϱ mit einer dieser 3 Eigenschaften finden läßt, so ξ in U_∞-Klasse.

Weitere analoge Feingliederung von U_ϱ in

$U_\varrho^{(\eta^+)}$-Klasse falls mit festem $\eta \ge 1$ $\omega^{(\varrho,\eta)}(\xi) = \infty$ und $\omega^{(\varrho,\eta+\varepsilon)}(\xi) = 0$,

$U_\varrho^{(\eta)}$-Klasse, falls $0 < \omega^{(\varrho,\eta)}(\xi) < \infty$, $\eta \ge 1$

$U_\varrho^{(\eta^-)}$-Klasse, falls $\omega^{(\varrho,\eta)}(\xi) = 0$ und $\omega^{(\varrho,\eta-\varepsilon)}(\xi) = \infty$. $\eta > 1$.

Ebenso Gliederung der T-Klasse in $T^{(\eta^+)}$, $T^{(\eta)}$, $T^{(\eta^-)}$ und T^∞ (falls $\omega^{(\eta)}(\xi) = \infty$ für alle η.).

Bedeutung dieser Verfeinerung der Klassifikation im Hinblick auf folgende Frage.

Aus Abschätzung der Approximation transzendenter Zahlen durch algebraische eine Aussage über das Transzendenzmaß zu gewinnen.
Hierzu die Klassifikation von Koksma, die auf die Approximation durch algebraische Zahlen beruht, ebenso verfeinern. Zeige dann, dass jede Zahl, die in einer Mahlerschen $A, S, T^{(\eta^+)}, T^{(\eta)}, T^{(\eta^-)}, T^{\infty}, U_{\rho\infty}, U_{\rho}^{(\eta^-)}, U_{\rho}^{(\eta)}, U_{\rho}^{(\eta^+)}, U_{\rho+}, U_{\infty}$ – Klasse liegt, auch in der entsprechenden Koksmaschen Klasse vorkommt!
Die Eigenschaft, dass algebraisch abhängige Zahlen in der gleichen Klasse liegen, bleibt bei der Verfeinerung erhalten.
Anwendung auf Transzendenzmaße, z. B.: wenn

$$|\xi - \Theta| > c_1 e^{c_2 n^{\eta} (\log h)^{\rho}}, \text{ so folgt } |Q(\xi)| > c_3 e^{c_4 n^{\eta} (\log H)^{\rho}}.$$

Θ algebraische Zahl vom Grad n und der Höhe h. $Q(x)$ Polynom mit ganzrat. Koeff. vom Grad n und der Höhe H.

Vom maßtheoretischen Gesichtspunkt liefert die Verfeinerung keinen Gewinn.

Th. Schneider.

Über die Aristotelischen Syllogismen. 18. 8. 51.

Es ist bekannt, dass sich die Aristotelischen Syllogismen auf die beiden Typen barbara und darii zurückführen lassen. Es wurde versucht, dies möglichst übersichtlich u. systematisch darzustellen. Die Urteilsmodi a, e, i, o werden als Relationen in einem komplementären distributiven Verband aufgefasst und aus Symmetriegründen folgendermaßen ergänzt:

	a	â	e	i	o	ô	u	v
$A \cap B =$	A	B	0	$\neq 0$	$\neq A$	$\neq B$		
$A \cup B =$	B	A			$\neq B$	$\neq A$	$= T$	$\neq T$

(T = Totalelement).

In der Menge dieser 8 Relationen werden die Operationen ^, ε durch $A \hat{x} B \sim B x A$, $A \varepsilon x B \sim A' x B$ (A': Komplement) definiert.
Ein Syllogismus der 1. Figur entspricht dem „Produkt" zweier Relationen.
Mittels der ε-Operation gelingt die Zurückführung der Syllogismen auf 8 Typen, davon sind 2: barbara, darii, 2 folgen aus diesen durch die ^-Operation, die übrigen ergeben die Relation v, die für alle Mengen A, B ($\neq 0$) richtig ist. Damit ist eine präzise Aussage über die nicht schlüssigen Prämissenkombinationen möglich. – Die 4 [illegible] Schlüsse ergeben sich nicht, sie benötigen eine Zusatzforderung, etwa $\hat{a} \to i$.

Gericke.

19. 8. 51

Die Erweiterungen höherer Ordnung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Eine differenzierbare Struktur auf einer Mannigfaltigkeit V_n ist definiert durch eine differenzierbare Familie (Atlas) von lokalen Karten von V_n auf den Zahlenraum R^n. Diese Karten können erweitert werden zu Karten von Vektoren, durch Erweiterung der lokalen Koordinatentransformationen auf Vektoren von R^n. So definiert man den Raum $T(V_n)$ der Vektoren der differenzierbaren Mannigfaltigkeit V_n. Dieser Raum $T(V_n)$ ist ein Faserraum $T(V_n, R^n, L_n, H)$ mit der Basis V_n; die Fasern T_x (tangenter Vektorraum in x) sind isomorph zum Vektorraum R^n, die Strukturgruppe ist die homogen lineare Gruppe L_n von R^n; H bezeichnet die Menge der Isomorphismen von R^n auf die Fasern T_x; ein solcher Isomorphismus, der auch durch ein "n-Bein" in x bestimmt ist, soll ein Hauptelement erster Ordnung heissen.

Der Raum $T(V_n)$ und alle assoziierten Faserräume sind die <u>Erweiterungen erster Ordnung</u> von V_n. Der assoziierte Hauptfaserraum H ist die <u>Haupterweiterung</u> erster Ordnung. (C. Ehresmann: Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable, Comptes Rendus, Paris, 216, 1943, p. 628; Sur la théorie des espaces fibrés, Colloque de Topologie algébrique, Paris, C.N.R.S., 1947).

Falls V_n zweimal differenzierbar ist, ist jede Erweiterung erster Ordnung von V_n einmal differenzierbar. Eine Erweiterung erster Ordnung einer Erweiterung erster Ordnung von V_n ist eine <u>Erweiterung zweiter Ordnung</u> von V_n. Durch Rekursion definiert man desgleichen eine Erweiterung k-ter Ordnung von V_n.

Die Erweiterung $E'(E, F')$ mit der Faser F' der Erweiterung $E(V_n; F)$ mit der Faser F ist auch ein Faserraum $E'(V_n, F', L_n^2, H_2)$ über dem Basisraum V_n. Die Strukturgruppe L_n^2 dieses Faserraumes ist folgende Erweiterungsgruppe von L_n: Ein Hauptelement zweiter Ordnung im Punkt O von R^n ist eine Klasse von zweimal diff. Abbildungen einer Umgebung von O in eine Umgebung von O, die O festlassen, vom Range n in O sind und bis zu den zweiten Ableitungen im Punkte O übereinstimmen. Aus der Zusammensetzung von Abbildungen leitet man eine Zusammensetzung der Hauptelemente zweiter Ordnung ab. Die Menge L_n^2 aller Hauptelemente zweiter Ordnung in O ist somit eine Gruppe. Der natürliche Homomorphismus von L_n^2 auf L_n hat als Kern eine Gruppe K_n die der additiven Gruppe eines Raumes R^ρ isomorph ist. Ein Hauptelement zweiter Ordnung in $x \in V_n$ ist eine Klasse von zweimal diff. Abbildungen einer Umgebung von $O \in R^n$ in eine Umgebung von $x \in V_n$, die O in x überführen, vom Range n sind und bis zur zweiten Ordnung übereinstimmen. Der <u>Hauptfaserraum zweiter Ordnung</u> H_2, oder <u>Haupterweiterung zweiter Ordnung</u>, ist die Menge der Hauptelemente zweiter Ordnung von R^n. Die Faserstruktur von H_2 auf V_n ist definiert durch Erweiterung auf Hauptelemente zweiter Ordnung der Karten eines zweimal differenzierbaren Atlasses von V_n.

~~Hauptfaserraum~~ H_2 ist ein Faserraum über V_n mit der Faser L_n^2. Er ist auch ein trivialer Faserraum über H mit der Faser K_n, das heisst er ist isomorph zu $H \times K_n$.

Falls L_n transitiv in F operiert, lässt der Faserraum $E'(E, F')$ mit der Basis E eine Strukturgruppe zu, die eine Untergruppe von L_n^2 ist welche K_n enthält. Speziell $T(H)$ lässt K_n als Strukturgruppe zu. Daraus folgt dass die Haupt~~faserraum~~erweiterung erster Ordnung (somit auch die Haupt~~faserraum~~erweiterung k-ter Ordnung) parallelisierbar ist.

Jeder zu $H_2(V_n, L_n^2)$ assoziierte Faserraum mit einer Faser in der L_n^2 transitiv operiert, ist auch eine Erweiterung zweiter Ordnung.

Bemerkungen über die Erweiterungen die von den Berührungselementen zweiter Ordnung von V_n gebildet sind.

Ein differenzialgeometrisches Objekt auf V_n ist ein Schnitt einer Erweiterung k-ter Ordnung von V_n.

Charles Ehresmann

20.8.51 Die Sprungrelationen der Potentiale einfacher und mehrfacher Flächenbelegungen.

Es sei

$$r_{x\xi}^2 = (x^1-\xi^1)^2 + (x^2-\xi^2)^2 + (x^3-\xi^3)^2$$

der Abstand der Punkte (x) und (ξ). F bezeichne ein analytisches orientierbares Flächenstück. Dann stellen

$$U_{(k+1)}(x) = \int_F \sigma(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial u_3}\right)^k \frac{1}{r_{x\xi}}\, dF_\xi$$

mit analytischem σ harmonische Funktionen dar, die in der Umgebung von F singulär werden.

Gegenstand des Vortrages ist die Berechnung der Sprungrelationen der Ableitungen dieser Potentiale. Zu diesem Zweck wird ein Koordinatensystem u^1, u^2, u^3 durch

$$\mathfrak{x} = f(u^1, u^2) + u^3\, n(u^1, u^2)$$

eingeführt, wobei $f(u^1, u^2)$ die Darstellung der Fläche in Vektorform und $n(u^1, u^2)$ den Flächennormalenvektor ~~der~~ bezeichnet.

Werden die Ableitungen in diesem Koordinatensystem ausgedrückt, so lassen sich die Sprungrelationen durch einfache Rekursionsbeziehungen ~~ausdrücken~~ formulieren.

Für die dabei benutzten & verallgemeinerten

Beltrami-Operatoren lassen sich einige Beziehungen und Identitäten herleiten, die differentialgeometrische Begriffe mit potentialtheoretischen Fragestellungen verbinden.
(Bericht über eine Arbeit des Vortragenden in Math. Ann. 1951)

Claus Müller

Zum Einsteinschen Problem, die Bewegungsgleichung einer Partikel in einem Schwerefeld aus den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie zu bestimmen. 20.8.51

Vorgelegt die 10 Feldgl. $R_{ik} = 0$ (Ei) als partielle Diffgl. 2. Ordng zur Bestimmung der 10 „$g_{ik}(x)$, die das Linienelement der Welt" definieren. Es soll gezeigt werden, dass gewisse Singularitäten von Lösungen der Feldgl. sich auf geodätischen Linien bewegen. – Während die recht komplizierte Beweistechnik von Einstein u. Mitarbeitern nur von räumlichen Punkt-Singularitäten ausgeht, wird hier von Flächensingularitäten ausgegangen, wie sie ~~sich~~ das Schwarzschildsche Linienelement besitzt. – Man nennt eine 3 dim.-Hyperfläche in unserer V $F = 0$ charakteristisch, wenn auf $F = 0$ die part. Diffgl. $H \equiv g^{ik} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$ erfüllt ist. ~~Und~~ Für das Schwarzschildsche Linienelement $ds^2 = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - \frac{r-\alpha}{r} dt^2$ ist die Trägerfläche der Feldsingularität $r = \alpha$ charakteristisch in dem Sinne: es gibt eine Einbettung $F(x)$ von $r = \alpha$ derart, dass $F = 0$ $(r = \alpha)$ charakteristisch ist und von wohldefinierten geodätischen Nullinien erzeugt wird, für die auf $r = \alpha$ gilt $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{p}_i$; $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}^i$. Dabei $H \equiv g^{ik} F_i F_k$ gesetzt und $F \equiv t(r - \alpha)$. – Durch Verallgemeinerung des Schwarzschildschen Ansatzes lässt sich daher das Einsteinsche Problem folgendermassen behandeln. Man gebe eine gewisse (analytische) schlauchförmige Hyper-Fläche vor. – Soll sie Trägerfläche von Singularitäten der Metrik sein (von der Art der Schwarzschildschen Singularität), so folgt zunächst unter entscheidender Benutzung des Variationsansatzes $\delta \int R \, dv = 0$, aus den drei Gl. $R_{ik}=0$ folgen, dass die Trägerfläche im oben angeg. Sinne charakteristisch sein muss (d.h. es gibt eine einbettende Funktion F derart dass $F=0$ der Schlauch ist, und auf $F=0$ $H=0$ erfüllt ist. Infolgedessen lässt sich der Schlauch auffassen als erzeugt von geodätischen Nullinien, die die Hamiltonschen Gl. erfüllen. – Lässt man nun den Querschnitt der Schlauches gegen Null gehen, so bleiben für die Erzeugenden Nullinien der Schlauches die Hamiltonschen Gl. richtig unter passender Festlegung der Art der Singularität der Metrik auf dem Schlauch. – Daraus folgt, dass nach der Zusammenziehung der Schlauches auf eine Linie die letztere notwendig geodätisch sein muss, ~~unter~~ wofern man zeigt, dass sich die Nullinien von $F=0$ (bei diesem Grenzübergang passend in ein Feld geodätischer Linien (Extremalenfeld) einbetten lassen.

Karl Ludwig Stellmacher.

Schallausbreitung in viskosen Medien.

21.8.51. In einem Medium, das – auch bei schnellen Zustandsänderungen – das Hookesche Gesetz befolgt ($\Delta p = E \cdot s$; Δp = Überdruck; s = Verdichtung; E = eine elast. Konstante) gilt für eine elast. Welle ($\Delta p = \Delta p_0 \cdot e^{i(kx-\omega t)}$) : $\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E}{\varrho_0}$ (ϱ_0 = Dichte); d.h. ihre Phasengeschwindigkeit ist $Re\left(\frac{\omega}{k}\right) = \sqrt{\frac{E}{\varrho_0}} = c_0$. Ebenso ergibt sich für ein viskoses Medium ($\Delta p = E \cdot s + \eta \cdot \dot{s}$) $\frac{\omega^2}{k^2} = c_0^2(1 - i\omega\tau)$, wo $\tau = \frac{\eta}{E}$. Danach sollte die Phasengeschwindigkeit für $\omega\tau \gtrsim 1$ proportional $\omega\tau$ werden, der Absorptionskoeffizient je Wellenlänge (μ) einem konstanten Grenzwert ($= 2\pi$) zustreben (R. Lucas, C.R. 1938). Experimentell können Schallwellen bis $\omega \approx 2 \cdot 10^{-8} s^{-1}$ bequem erzeugt werden; τ ist für Flüssigkeiten und

Gase ist unter Normalbedingungen $\tau \approx 10^{-14}$ bis 10^{-11} bzw. 10^{-10} bis 10^{-9} s und kann durch Temperaturerniedrigung (bei Flüssigkeiten ohne scharfen Gefrierpunkt) bzw. durch Verringerung der Dichte (bei Gasen) beliebig heraufgesetzt werden. So haben Greenspan (Journ. ~~Am.~~ Ac. Soc. Am. 1950) ~~und Fox~~ in verdünntem He-Gas und Fox u. Litovitz (Journ. Ac. Soc. Am. 1951) in Glycerin bei tiefen Temperaturen $\omega\tau \gtrsim 1$ erreicht. In beiden Fällen beginnt μ bei $\omega\tau \approx 1$ abzusinken.

Dieser Befund kann gedeutet werden durch den Ansatz: $\Delta p + \vartheta \Delta\dot{p} = E \cdot s + \tau \dot{s}$. Mit diesem wird $\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1 - i\omega\tau}{1 - i\omega\vartheta}$, also die Phasengeschwindigkeit für $\omega \to \infty$ $c_\infty^2 = c_0^2 \cdot \frac{\tau}{\vartheta} = c_0^2/q$ und $\mu = \frac{1+\omega^2\tau^2}{1+q\omega^2\tau^2+\sqrt{1+(q-1)\omega^2\tau^2+q^2\omega^4\tau^4}}$ d.h. μ durchläuft ein Maximum bei $\omega\tau \approx 1$ und sinkt mit wachsendem $\omega\tau$ auf 0 ab.

Hans Kneser.

Symmetrische und hermitische Matrizenpaare 27.8.51.

Unter einem symmetrischen Matrizenpaar des endlich-algebraischen Zahlkörpers K versteht man ein Paar von quadratisch-n-reihigen Matrizen, deren Elemente K angehören und die folgende Eigenschaften haben:

1) Der Rang der n-zeiligen, $2n$-spaltigen Matrix $(A\ B)$ sei n.

2) Bedeuten A', B' die transponierten Matrizen zu A, B, dann sei $AB' = BA'$.

Im Fall daß K imaginär-quadratisch ist hat es einen Sinn statt $AB' = BA'$ zu fordern daß $A\bar{B}' = B\bar{A}'$ ist, wobei die Elemente von $\bar{A}$ die konjugierten Elemente von A sind. Paare, für die $A \bar{B}' = B\bar{A}'$ statt $AB' = BA'$ gilt, nennt man hermitisch.

In dem Referat werden arithmetische Eigenschaften der sym. und herm. Paare abgeleitet, die man zur Untersuchung der Siegel-Eisenstein-Reihen braucht. Vergleiche: 1) C. L. Siegel, Analytische Theorie der quadratischen Formen I und III, Annals <u>36</u>, 1935, insbesondere Hilfssatz 41 und Annals <u>38</u> 1937, Seite 287. 2) H. Braun, Hermitian modular functions, [illegible] 1949, §1 und §3.

Braun

28.5.57. **Zur Struktur angeordneter Schiefkörper.**

Es sei K ein beliebiger (kommutativer) Unterkörper eines angeordneten Schiefkörpers S. Dann kann S unter Bewahrung der gegebenen Anordnung zu einem angeordneten Schiefkörper $\bar{S}$ erweitert werden, der die perfekte Hülle $\bar{K}$ von K bezüglich seiner Bewertung durch den absoluten Betrag enthält.

Zum Beweis wird eine Abbildung von S in ein System eingeführt, das aus den Symbolen $-\infty$ und $+\infty$ und einem angeordneten Restklassenschiefkörper R besteht, der durch eine besondere Art von Fundamentalfolgen und den entsprechenden Nullfolgen konstruiert wird und $\bar{K}$ enthält. Nach der Steinitzschen Methode wird jeweils nur die Adjunktion eines einzelnen Elementes θ vorgenommen; sie muss so erfolgen, dass θ in das Zentrum von $S(\theta)$ kommt. Man hat dann zu zeigen, dass 1) die Adjunktion wieder zu einem Schiefkörper $S(\theta)$ führt und 2) in $S(\theta)$ die ursprüngliche Anordnung fortgesetzt werden kann.

Arno Jaeger.

29.8.51. **Über Regeln in Gruppen.**

Es sei $F \cong \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ die Faktorgruppe der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ aus k Erzeugenden nach einer vollinvarianten Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{F}$. Jede Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{F}$ kann erzeugt werden, durch alle „Funktionalwerte" eines Systems von Worten $w^{(i)}(u_1,\dots,u_k)$, $i=1,2,\dots$ in den Unbestimmten $u_1,\dots,u_k$, wenn für die u_i alle Elemente aus $\mathfrak{F}$ eingesetzt werden. (Siehe Vortrag vom 24.11.50.)

Es werden nun hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Kette der Untergruppen F_n der absteigenden Zentralreihe von F ($F_1=F$, $F_2=[F_1,F]$, … $F_n=[F_{n-1},F]$, … abbricht. Ist $F_c=F_{c+1}=\cdots$ für

ein $c \geq 1$, so heiße $F_c = P(F)$ die Faltung von F. Es gibt Kommutatorregeln, aus denen die Existenz einer Faltung $P(F)$ folgt.
Als System von Regeln zur Definition von F werden gewählt alle Kommutatoren $[u_{i_1}, \dots, u_{i_m}] = 1$ mit $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, n\}$ und zwar falls $n < m$ sei. $d = m - n > 0$ heiße Defizit.
Ist $m \geq k + d$, dann ist $F_m = P(F) = 1$. Dieser triviale Fall sei ausgeschlossen, also $m < k + d$. Dann gilt:

$\underline{d = 1}$: $(F_m)^m$, die von allen m-ten Potenzen aus F_m erzeugte Untergruppe von F_m, liegt in F_{m+1}. $F_{m+1} = P(F)$ ist die Faltung von F.

$\underline{d \geq 2}$: $F_{k+d} = P(F)$ ist die Faltung von F.

Beim Defizit $d=1$ ist also die Lage ~~Faltung~~ der Faltung von der Zahl der Erzeugenden k unabhängig, nicht dagegen für $d \geq 2$.
Der Beweis benutzt die Zuordnung eines Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ zur freien Gruppe $\mathfrak{F}$, bzw. L zu F. Für $d = 1$ folgt in $L_m \cong F_m / F_{m+1}$, dass $[\dots u \dots u \dots] = 0$ und damit Invarianz von $[u_1, \dots, u_m]$ gegenüber Permutationen der Variablen bis auf das Vorzeichen bei ungeraden Permutationen. Dann ist auch $m[u_1, \dots, u_m] = \sum_{\nu=1}^{m!} \varepsilon_\nu \sigma_\nu [u_1, \dots, u_m] = 0$ mit $\varepsilon_\nu = 0, \pm 1$, σ_ν die Permutationen von m Gegenständen. Für $d = 2$ ist eine entsprechende Rechnung leicht durchzuführen.

Franz [illegible]

<u>Verallgemeinerung des freien Produktes mit einer vereinigten Untergruppe II.</u> 29.8.57.

Geg. ist ein einbettbares Amalgam von Gruppen G_i. Es existiert eine eindeutig bestimmte maximale Gruppe die das Amalgam enthält und von ihm erzeugt ist, d.h. jede andere Gruppe mit diesen Eigenschaften ist ein homomorphes Bild dieser Gruppe, der vom Amalgam A "frei-erzeugten" Gruppe. Im allgemeinen ist diese Gruppe nicht auch frei im Sinne von Schreier; dabei heißt die frei erzeugte Gruppe frei im Sinne von Schreier, wenn jede Relation $R=1$ von der Form $R \equiv u r v$ ist, wobei $r=1$ eine Relation in einer der geg. Gruppen des Amalgams ist.

Freiheit im Sinne der Maximaleigenschaft ist nach Frau Baer ~~zu~~ zu verallgemeinern: Haben alle Gruppen des Amalgams die Eigenschaft E, und ist das Amalgam in eine Gruppe mit der Eigenschaft E einbettbar, so auch in eine "maximale" Gruppe mit der Eigenschaft E: das Amalgam ist E-frei einbettbar. Daraus folgt natürlich E-Einbettbarkeit, nicht aber umgekehrt. Ist z.B. E die Eigenschaft abelsch zu sein, so kann man ein Beispiel eines einbettbaren Amalgams Abelscher Gruppen geben, das aber nicht in eine Abelsche Gruppe einbettbar ist.

Hanna Neumann (Hull)

30. 8. 51 **Darstellungstheorie endlicher Gruppen.**

Ist g_0 der Exponent einer endlichen Gruppe G, so ist jeder Charakter von G (im gewöhnlichen Sinne) über dem Körper $P(\sqrt[g_0]{1})$ der g_0-ten Einheitswurzeln repräsentierbar.*) Für diesen Satz, der schon von I. Schur vermutet und schließlich von R. Brauer bewiesen wurde, ist ein neuer einfacher Beweis vorgetragen worden. Der Beweis folgt

*) Dabei heißt ein Charakter χ über $P(\sqrt[g_0]{1})$ repräsentierbar, wenn es eine zu χ gehörige Darstellung mit Koeffizienten aus $P(\sqrt[g_0]{1})$ gibt.

daraus, daß (1.) jeder Charakter ψ einer nilpotenten Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ über $P(\sqrt[g]{1})$ repräsentierbar ist, (2.) die Eigenschaft, über $P(\sqrt[g]{1})$ repräsentierbar zu sein, beim Induktionsprozess und bei linearer Zusammensetzung erhalten bleibt, (3.) jeder Charakter von $\mathfrak{G}$ sich linear aus Induzierten von Charakteren nilpotenter Untergruppen zusammensetzen läßt. Da (1.) seit Blichfeldt bekannt ist (ein neuer Beweis wurde von Witt gegeben) und (2.) sehr einfach zu sehen ist, so verlangt lediglich (3.) einen Beweis. Der ursprünglich von R. Brauer gegebene Beweis von (3.) konnte erheblich vereinfacht werden.
(3.) folgt fast unmittelbar aus der Strukturuntersuchung der $\mathfrak{q}$-adischen Charakterringe $X_{\mathfrak{q}}$, die aus dem vollen Charakterring X von $\mathfrak{G}$ durch Erw. des Koeffizientenbereiches auf den Integritätsbereich der $\mathfrak{q}$-ganzen Zahlen des $\mathfrak{q}$-adischen Körpers $K_{\mathfrak{q}} = P_p(\sqrt[g]{1})$ entstehen. Die direkt unzerlegbaren Ideale eines solchen Ringes $X_{\mathfrak{q}}$ sind nämlich induziert von gewissen Idealen der Charakterringe nilpotenter Untergruppen von $\mathfrak{G}$. — Der Satz (3.) gestattet noch mannigfache Anwendungen; so erhält man aus ihm zum Beispiel den Satz, daß jede L-Funktion einer galoisschen Zahlkörpererweiterung eine meromorphe Funktion ist.

P. Roquette

Zeta-Funktionen quadratischer Formen. 31. 8. 51

Es sei $\mathfrak{T}^{(m)}$ eine symmetrische positive Matrix, d.h. Matrix einer positiv definiten quadratischen Form. In Verallgemeinerung der EPSTEIN'schen Zeta=funktion

$$\zeta_1(\mathfrak{T};s) = \frac{1}{2}\sum_{g \neq 0} (g'\mathfrak{T}g)^{-s}, \quad \Re s > \frac{m}{2},$$

bei der die Summe über alle Gitterpunkte $g \neq 0$ des m-dimensionalen Raumes zu erstrecken ist, würden die Reihen

(1) $$\zeta_n(\mathfrak{T}; s) = \sum_{\mathfrak{A}^{(m,n)}} |\mathfrak{A}'\mathfrak{T}\mathfrak{A}|^{-s} \; ; \quad m \ge n$$

untersucht. In (1) ist die Summe über alle ganzen Matrizen $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ vom Maximalrang zu erstrecken, die nicht rechtsassoziiert sind. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heiße dabei rechts assoziiert, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ mit unimodularem $\mathfrak{U}$ gilt. Durch Einführung der Darstellungsanzahlen kann man (1) schreiben:

(2) $$\zeta_n(\mathfrak{T}; s) = \sum_{\{\mathfrak{F}\}>0} \frac{A(\mathfrak{T},\mathfrak{F})}{E(\mathfrak{F})} \cdot |\mathfrak{F}|^{-s} \,.$$

$A(\mathfrak{T},\mathfrak{F})$ ist dabei die Anzahl der ganzen Lösungen $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{X}'\mathfrak{T}\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$, und $E(\mathfrak{T}) = A(\mathfrak{T};\mathfrak{T})$. Für $\mathfrak{T}>0, \mathfrak{F}>0$ ist $A(\mathfrak{T},\mathfrak{F})$ endlich.

Dabei durchläuft $\mathfrak{F}^{(n)}$ ein volles System von reduzierten positiven Matrizen, die durch $\mathfrak{T}$ darstellbar sind. Mit Hilfsmitteln der Reduktionstheorie der quadr. Formen kann man beweisen, daß (1) für $\Re s > \frac{m}{2}$ absolut konvergent ist. Bildet man nun

(3) $$R_n(\mathfrak{T}; s) = \pi^{n(\frac{n-1}{4}-s)}\, \Gamma(s)\Gamma(s-\tfrac{1}{2})\cdots\Gamma(s-\tfrac{n-1}{2})\, \zeta_n(\mathfrak{T}; s)$$

so kann man $R_n(\mathfrak{T};s)$ für $\Re s > \frac{m}{2}$ als ein Integral über die Theta-Reihe

(4) $$f(\mathfrak{T};\mathfrak{X}) = \sum_{\mathfrak{A}^{(m,n)}} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{X}\mathfrak{A}'\mathfrak{T}\mathfrak{A})} \,, \quad \mathfrak{T}>0,\ \mathfrak{X}^{(n)}>0,$$

bei der über alle ganzen $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ zu summieren ist, darstellen. Nach geeigneter Umformung dieses Integrals gibt es die analytische Fortsetzung von $R_n(\mathfrak{T},s)$ für alle komplexen s und man kann gleichzeitig als Analogon zur Funktionalgleichung der RIEMANNschen ζ-Funktion die Beziehung

(5) $$\underline{\underline{R_n(\mathfrak{T};s) = |\mathfrak{T}|^{-\frac{n}{2}}\, R_n(\mathfrak{T}^{-1}; \tfrac{m}{2}-s)}}$$

ablesen. Bei der Umformung des Integrals wird wesentlich die Transformationsformel

$$f(\mathfrak{T};\mathfrak{X}) = |\mathfrak{T}|^{-\frac{n}{2}} \cdot |\mathfrak{X}|^{-\frac{m}{2}}\, f(\mathfrak{T}^{-1};\mathfrak{X}^{-1})$$

verwendet, die man durch Anwendung der POISSONschen Summationsformel auf (4) erhält. $\zeta_n(\mathfrak{T};s)$ ergibt sich als eine in der ganzen Ebene analytische Funktion mit Ausnahme von Polen erster Ordnung bei

$$s = \frac{m-r}{2} \; ; \quad r = 0, 1, \dots (n-1).$$

Aus (2) schließt man in der üblichen Weise:

$$\sum_{\substack{\{\mathfrak{F}\}>0 \\ |\mathfrak{F}|\le x}} \frac{A(\mathfrak{T};\mathfrak{F})}{E(\mathfrak{F})} \cong |\mathfrak{T}|^{-\frac{n}{2}} \cdot \alpha_{m,n}\, x^{\frac{m}{2}}$$

Im Beweis von (5) ergibt sich nebenbei das von MINKOWSKI berechnete Volumen des Raumes der reduzierten positiven Matrizen bis zur Determinantenfläche $|Y|=1$.

Übertragung auf die von SIEGEL eingeführten Modulformen n-ten Grades ist möglich.

Max Koecher.

Bericht über die Arbeit von J. Lambek: The immersibility of a semigroup into a group. Canadian Journ. of Math. 3, 1951, 34–43. 31. 8. 51.

Gericke.

Galois-Theorie rein-inseparabler Erweiterungen vom Exponenten 1. 31. 8. 51

Wenn $L = K(c_1, \dots, c_m)/K$, $c_i^p = d_i \in K$ eine rein-insep. Erw. vom Exp. 1 ist, dann definiert man als „Ableitung in L über K" einen Endomorphismus ϑ der additiven Gruppe von L, der $\vartheta(xy) = x\vartheta(y) + \vartheta(x)y$ u. $\vartheta(a)=0$ für $a \in K$ erfüllt. Die Menge dieser Ableitungen ~~definiert~~ bildet bei naheliegender Definition der Verknüpfungen einen Modul mit L als Operatorenbereich, und wenn man als Klammerprodukt $[\vartheta_1, \vartheta_2] = \vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_2\vartheta_1$ definiert, einen Lieschen Ring $\mathfrak{D}$. Mit ϑ liegt auch ϑ^p (p Char. von K) wieder in ihm. Solche Lieschen Ringe von Ableitungen, die zugleich Moduln über L sind und mit einer Ableitung ϑ auch ϑ^p enthalten, wollen wir p-Lieringe nennen. Es gilt dann der dem Hauptsatz der klassischen Galois-Theorie genau entsprechende Satz: „der Verband der Zwischenkörper der Erweiterg. L/K ist isomorph zu dem zum Verband der p-Lie-Unterringe von $\mathfrak{D}$ dualen Verband." Der Isomorphismus wird vermittelt durch die Abbildungen

$\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}$ $\quad \mathfrak{L} \to K(\mathfrak{L})$, wo $K(\mathfrak{L}) = \{x;\ \mathfrak{L}(x) = 0\} \subseteq L$

$L \supseteq S' \supseteq K$ $\quad S' \to \varrho(S')$, wo $\varrho(S') = \{\vartheta;\ \vartheta(S') = 0\} \subseteq \mathfrak{L}$

(Jacobson, Transact. 42)

Hans Nastold

1.9.1951. **Normalform von Matrizen über beliebigen Körpern.**

Durch Induktion wird der Spezialfall des Hauptsatzes über abelsche Gruppen bewiesen, bei dem der Operatorenbereich ein Polynomring über einem Körper K ist. Dabei ist die Gruppe ein Vektorraum R^n und die Anwendung der Operatoren wird durch $F(z).\mathfrak{x} = F(\mathfrak{S})(\mathfrak{x})$ definiert, wo $\mathfrak{x} \in R^n$, $F(z) \in K[z]$ und $\mathfrak{S}$ eine feste lineare Transformation von R^n in sich ist. Aus dem Hauptsatz ergibt sich eine Aufspaltung $R^n = S_1 + \dots + S_k$, $S_\nu \cap S_\mu = \{0\}$, wo $S_\nu = K[z].\mathfrak{x}_\nu$ (d.h. die S_ν sind zerlegen).

Ist $F_\nu(z)$ das annullierende Polynom von S_ν (d.h. das Polynom kleinsten Grades, das alle $\mathfrak{x} \in S_\nu$ auf die Null abbildet), so spaltet sich S_ν gemäß der Primzerlegung von $F_\nu(z)$ weiter auf. R^n ist also direkte Summe von Unterräumen der Form $S = K[z].\mathfrak{x}_0$, wobei ~~dann~~ das annullierende Polynom von $\mathfrak{x}_0$ eine Primpolynompotenz $P(z)^\alpha$ ist. Ist $P(z) = z^r + a_{r-1}z^{r-1} + \dots + a_0$ und wählt man in S als Basis $\mathfrak{x}_{\nu\cdot r+\mu+1} = P(\mathfrak{S})^\nu \mathfrak{S}^\mu \mathfrak{x}_0$ $(\nu = 0,\dots,\alpha-1;\ \mu = 0,\dots,r-1)$, so ergibt sich, daß die Matrix $\mathfrak{A}$ der lin. Transf. $\mathfrak{S}$ aus diagonaler Aneinanderreihung von Kästchen der Gestalt

$$\mathfrak{A}_S = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{r-1} \end{smallmatrix} & 1 & & 0 \\ & \begin{smallmatrix} & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{r-1} \end{smallmatrix} & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \begin{smallmatrix} & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{r-1} \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

entsteht.

Im Falle, daß K algebraisch abgeschlossen ist, ergibt sich die Jordansche Normalform.

W. Noll

1.9.51. [illegible]

[illegible]

Abhängigkeiten von Formen in $\mathfrak{L}_n$ durch Elementen in $\mathfrak{S}_n$, dem Gruppenring der symmetrischen Gruppe S_n festlegen. Zu $\mathfrak{L}_n$ gehört ein Ideal $\mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{S}_n$, das $\mathfrak{L}_n$ erzeugt, wenn $\mathfrak{L}$ in einem assoziativen Ring $\mathfrak{A}$ dargestellt wird, was nach Witt stets möglich ist. Es sind dazu alle Operatoren aus $\mathfrak{R}_n$ auf $\mathfrak{A}_n$, den Teilmodul von $\mathfrak{A}$, der Formen vom Grade n in den Erzeugenden ist, anzuwenden, d.h. $\mathfrak{L}_n = \mathfrak{R}_n \mathfrak{A}_n$. $\mathfrak{L}_n$ wird durch $\mathfrak{R}_n$ reproduziert, d.h. $\mathfrak{L}_n = \mathfrak{R}_n \mathfrak{L}_n$.

Die Einführung von Regeln im Lieschen Ring L, d.h. Polynome $f(x_1 \dots x_n) = 0$ für alle $x_i \in L$, bedeutet die Konstruktion eines Moduls $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{L}$, der alle „Werte" von $f(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathfrak{L}$ enthält. Dann ist $L = \mathfrak{L} / \mathfrak{M}$ und $L_n \cong \mathfrak{L}_n / \mathfrak{M}_n$ mit $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{L}_n \cap \mathfrak{M}$.

Zu $\mathfrak{M}_n$ gehört ein Ideal $\Psi_n \subseteq \mathfrak{R}_n$, das wegen Halbeinfachheit von $\mathfrak{S}_n$ von einem (idempotenten) Element erzeugt werden kann. Alle Regeln zu einem bestimmten n lassen sich also durch eine einzige ausdrücken.

Franz [illegible]

Logische Bemerkungen über Grundbegriffe und Gegenstand der Algebra. 2.9.51.

Gericke.

Über die Klassifikation von p-Gruppen. 2.9.51

P. Hall hat folgende Klassifikation von p-Gruppen angegeben (Crelle 182):
Zwei Gruppen G, G' gehören zur selben Familie, (sind isoklin) wenn

1) die Kommutatorgruppen isomorph sind $\mathfrak{L} \cong \mathfrak{L}'$
2.) die Faktorgruppen nach den Zentren isomorph sind $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z} \cong \mathfrak{G}'/\mathfrak{Z}'$
3) die Isomorphismen 1) und 2) so wählbar sind, daß
$[a, b] \to [a' b']$ wenn $a\mathfrak{Z} \to a'\mathfrak{Z}'$ und $b\mathfrak{Z} \to b'\mathfrak{Z}'$.

Zu jeder Wortgruppe $\mathfrak{W} = \{ f(x_1, \cdots, x_n) \}$ gibt es eine Randgruppe $\mathfrak{R} = (r_i)$ aus r_i die Eigenschaft hat, daß $f(x_1, \cdots x_n) = f(r_i x_1, \cdots x_n) = \cdots = f(x_1, \cdots r_i x_n)$ (Hall, Crelle 182 Verbal and marginal subgroups.

Damit läßt sich die Hallsche Klassifikation in folgender Weise verallgemeinern: Es ist $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{G}'$ wenn für ein bestimmtes (beliebiges) Wort

1. $\mathfrak{W} \cong \mathfrak{W}'$
2. $\mathfrak{G}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{G}'/\mathfrak{R}'$
3. $\mathfrak{W}(a_1, \cdots, a_n) \to \mathfrak{W}(a_1', \cdots a_n')$ wenn $a_i \mathfrak{Z} \to a_i' \mathfrak{Z}'$

Eine Einteilung ist feiner (Index f) als eine gröbere (Index g), wenn 1. $\mathfrak{W}_g \subset \mathfrak{W}_f$, 2. $\mathfrak{R}_g/\mathfrak{R}_f \cong \mathfrak{R}_g'/\mathfrak{R}_f'$

Einige der von Hall für seine Klassifikation angegebenen Sätze lassen sich für alle Einteilungen, andere nur unter gewissen Bedingungen aussprechen.

Vortragender Wirt.

4. 9. 51.

Die hermitische Modulgruppe $\mathfrak{H}$ ist folgendermaßen definiert: $\mathfrak{K}$ sei ein imaginär-quadratischer Zahlkörper und die betrachteten Matrizen M sollen ganze Elemente haben die $\mathfrak{K}$ angehören. Setzt man $J^{(2n)} = \begin{pmatrix} 0 & E^{(n)} \\ -E^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$, dann besteht $\mathfrak{H}$ aus allen M sodaß

$$\bar{M}' J M = J$$

ist. $\bar{M}'$ bedeutet dabei die transponierte konjugierte Matrix zu M.

Durch Determinantenbildung folgt aus $\bar{M}' J M = J$ sofort $|M| = \varepsilon$, wo ε eine Einheit aus $\mathfrak{K}$ bedeutet. Darüber hinaus gilt der Satz daß sogar $|M| = \varepsilon^2$ ist. Es wurde ein Beweis dieses Satzes vorgetragen. (Vergleiche: Hermitian Modular Functions III Annals of Mathematics 53, 1951, Section 3)

Braun

<u>Forme normale d'une matrice sur un corps commutatif</u> 5. 9. 51

Démonstration directe sans utiliser le th. fondamental sur les groupes abéliens ni le th. de Jordan sur les suites de composition

Soit A opérateur linéaire sur E (espace vectoriel sur corps commutatif K), $\varphi(x)$ polynome minimal de A, $\varphi = \varphi_1 \ldots . \varphi_s$ la décomposition de φ en facteurs primaires.

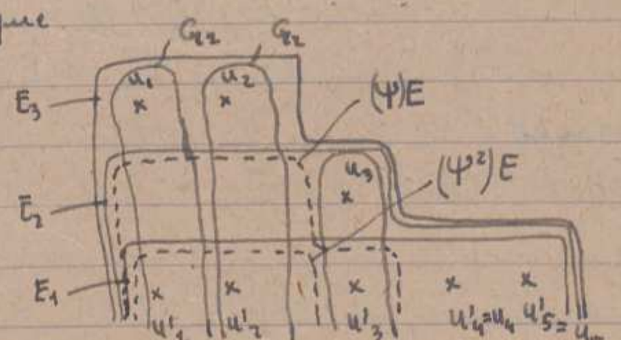
1. Les sous-espaces $E_i = (\prod_{j \neq i} \varphi_j) E$ sont stables pour A et l'on a $E = E_1 \dot{+} \cdots \dot{+} E_s$ (somme directe) - De plus l'opérateur induit dans E_i a pour polynome minimal $\varphi_i(x)$.

2 - Le théorème précédent ramène à l'étude d'un opérateur à polynome minimal primaire soit $\varphi(x) = \Psi^{\alpha}(x)$ (Ψ premier)

On considère E comme module sur $K[x]$ en posant $P(x) u = P(A) u$ $P(x) \in K(x)$, $u \in E$ - On note $E_{K[x]}$ le module obtenu

<u>Théorème</u>. $E_{K[x]}$ est décomposable en une somme directe de sous-modules monogènes formant des sous-espaces $G_i = (u_i, A u_i, A^2 u_i, \ldots)$ de dimension βP (P degré de Ψ, $\beta < \alpha$) - Le nombre n_β de sous-espaces de dimension βp est unique

Posons $E_i =$ ensemble des $u \in E$ tels que $\Psi^i u = 0$ - Considérons la suite de sous-espaces



$E_1 \cap (\Psi^{\alpha-1}) E \subset E_1 \cap (\Psi^{\alpha-2}) E \subset \cdots \subset E_1$

E_1 peut être considéré comme espace vectoriel sur $K[x]/(\Psi(x))$

Soit alors $u'_1, u'_2, \ldots$ une <u>base</u> dans E_1 telle que

$E_1 \cap \Psi^{\alpha-1} E = (u'_1)_{K[x]/(\Psi)} \dot{+} \cdots + (u'_{n_{\alpha-1}})_{K[x]/\Psi}$, $E_1 \cap \Psi^{\alpha-2} E = (u'_1)_{K[x]/\Psi} \dot{+} \cdots + (u'_{n_{\alpha-1}+n_{\alpha-2}})_{K[x]/\Psi} \ldots$

Soit u_k tel que $\Psi^r u_k = u'_k$ $(n_{\alpha-1} + \cdots + n_{\alpha-r+1}) < k \leq (n_{\alpha-1} + \cdots + n_{\alpha-r})$

On vérifie que :

$E_{K[x]} = K[x] u_1 \dot{+} K[x] u_2 \dot{+} \cdots$ c'est-à-dire :

$E = (u_1, A u_1, A^2 u_1, \ldots) \dot{+} (u_2, A u_2, A^2 u_2, \ldots) \dot{+} \ldots$

L'unicité de $n_{\alpha-1}, n_{\alpha-2}, \ldots$ résulte de $n_{\alpha-1} =$ Dim $E_1 \cap (\Psi^{\alpha-1}) E$, $n_{\alpha-1} + n_{\alpha-2} =$ Dim $E_1 \cap (\Psi^{\alpha-2}) E, \ldots$

(E_1 est toujours considéré comme espace vectoriel sur $K[x]/\Psi$) J. Charles.

3.9.51.

Factorization of Certain Determinants.

Consider the matrix

$$M = U_1 \times A_1 + \cdots + U_k \times A_k,$$

where $U_1, \ldots, U_k$ are square matrices of order n, with elements in ~~K~~ an algebraically closed field K, and $A_1, \ldots, A_k$ are square matrices of order m, whose elements are all indeterminate over K. Here $A \times B$ denotes the Kronecker product.

A systematic method was described for finding factors (if any) of $|M|$ of the form $|\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k|$. Use is made of this

Lemma: Suppose one, at least, of $U_1, \ldots, U_k$ is non-singular. There exist non-singular matrices P, Q such that

$$P U_i Q = \begin{pmatrix} a_i & u_i' \\ 0 & U_i^* \end{pmatrix}$$

if and only if the pencils of matrices $U_i - \lambda_{ij} U_j$ have a common nil-vector q, i.e. a vector such that

$$(U_i - \lambda_{ij} U_j)\, q = 0 \qquad (\text{all } i, j).$$

The application of this lemma is clear from the result:

$$(P \times E) M (Q \times E) = \sum_{i=1}^{k} (P U_i Q \times A_i) = \begin{pmatrix} \sum_i a_i A_i, & * \\ 0 & , \sum_i U_i^* \times A_i \end{pmatrix}$$

and then $|P|^{\sigma} |Q|^{\sigma} |M| = \left|\sum_i a_i A_i\right| \cdot \left|\sum_i U_i^* \times A_i\right|$.

If all matrices of the initial set, $U_1, \ldots, U_k$ are singular we make a linear transformation

$$\overline{U}_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} U_j \quad \text{where} \quad |\lambda_{ij}| \neq 0.$$

and obtain a set $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_k$, at least one of which is non-singular. Then we consider the matrix $\overline{M} = \overline{U}_1 \times A_1 + \cdots + \overline{U}_k \times A_k$.

It is easy to show that if $|M|$ has a factor $|\mu_1 A_1 + \cdots + \mu_k A_k|$ then $|\overline{M}|$ has a factor $|\overline{\mu}_1 A_1 + \cdots + \overline{\mu}_k A_k|$ and conversely. So we factorise $|\overline{M}|$ and then transform the factors into factors of $|M|$. It is always possible to find one of $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_k$ non-singular, unless the system $\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_k U_k$ is singular for all $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. In this case it can be shown that $|M|$ vanishes identically.

L. S. Goddard.

21. X.

21. X.

21. X. 51 Einfluss der Vorzeichen der Ableitungen einer ~~analytischen~~ Funktion auf ihren analytischen Charakter

Boas und Polya bewiesen 1942 den Satz: Es seien $n_1 < n_2 < \dots$ und $q_1, q_2, \dots$ positive ganze Zahlen, $f(x)$ eine in $-1 \leq x \leq +1$ unendlich oft differenzierbare Funktion; es sei $f^{(n_k)}(x)\, f^{(n_k+2q_k)}(x) \leq 0$ für $-1 \leq x \leq 1$ $(k=1,2,\dots)$; Falls dann $n_{k+1} - n_k = O(1)$, $q_k = O(1)$, so ist $f(x)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus, d.h. $|f(x)| < Ae^{B|x|}$. Der Haupthilfsatz von Boas und Polya lässt sich sehr leicht beweisen durch Anwendung der folgenden Formel (k, r ganz, positiv):

$$(1) \qquad f^{(r)}(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_\nu(r)\, h^{-r} \Delta_h^{\nu+r} f(x) + Q_k(r)\, h^k f^{(k+r)}(\xi)$$

Hier ist $\Delta_h^r f(x)$ die r-te Differenz $\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{r-\nu} \binom{r}{\nu} f(x+\nu h)$, die $Q_n(r)$ sind die Koeffizienten in $\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(r)\, x^n$, und ξ ist ein Wert in $(x, x+(k+r-1)h)$. Der Haupthilfssatz von Boas und Polya lautet: Falls p und q positive ganze Zahlen sind, $g(x)$ eine reelle Funktion auf $(-1,+1)$, falls dann $|g(x)| \leq M$, $g^{(p+2q)}(x) \leq 0$, dann ist $g^{(p)}(x) \leq A^{p+2q}(p+2q)^p M$, wo $A \leq 30e^{30e+1}$. Aus (1) folgt diese Ungleichung unmittelbar mit $A \leq 2e$. – Durch Anwendung dieses Haupthilfsatzes folgt aus den Voraussetzungen des oben erwähnten Satzes von Boas und Polya sofort eine Ungleichung $|f_k^{(n_k)}(x)| \leq A_1^{n_k}$, wo A_1 eine Konstante ist. $(k=1,2,\dots)$. Durch eine abermalige Anwendung der Formel (1) lässt sich dann die Gültigkeit der Formel $|f^{(n)}(x)| \leq A_1^n$ für $n=0,1,2,\dots$ beweisen, d.h. es ist $f(x)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus.

H. D. Kloosterman

21. X. 51 Konstruktion multiplikativer Funktionen zu Kongruenzgruppen.

Aus Teilwerten der Funktion $\vartheta_1(v,\tau)$ gewinnt man eine Klasse multiplikativer Funktionen der Hauptkongruenzgruppen $\Gamma[N]$, deren Fourierkoeffizienten mit sehr allgemeinen Partitionenfunktionen zusammenhängen. Diese entstehen aus der klassischen Partitionenfunktion durch ein Iterationsprinzip, durch Kongruenzbedingungen und Beschränkungen für die Summanden und durch Anbringung oszillierender „Gewichte". Die Ableitungen der multiplikativen Funktionen nach τ lassen sich mit Hilfe der Poincaréschen Reihen der Dimension -2 vom parabolischen Typus mit Polen in den Spitzen auf Differentiale erster Gattung reduzieren. Von diesen wird durch zweimalige Anwendung der Metrisierung gezeigt, dass sie identisch verschwinden; jene Ableitungen sind also explizit bestimmbare Linearkombinationen der genannten Poincaré-Reihen. Daraus folgt, dass jede der verallgemeinerten Partitionenfunktionen durch eine absolut konvergente Reihe nach Art der Rademacherschen Partitionenformel explizit dargestellt wird.

H. Petersson

21. X. 51

Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete.

Unter einem „Riemannschen Gebiet" wird ein 2n-dim. Analogon zur Riem. Fläche verstanden, wo nichtuniformisierbare Stellen als innere Punkte zugelassen sind. Ein Riem. Gebiet ohne nichtuniformisierbare Punkte ist eine komplexe Mannigfaltigkeit. – Ist N eine abgeschlossene Menge im Riemannschen Gebiet G^{2n}, so heisst jede Fortsetzung von $G^{2n}-N$ in N zu einem Riemannschen Gebiet ${}^*G^{2n}$ eine Modifikation von G^{2n} in N. Beispiele liefert der Hopfsche Prozess der Einsetzung von Projektivräumen ($N \equiv$ isolierter uniformisierbarer Punkt, $n=2$) sowie die entsprechenden Aufschliessungen der Räume mehrerer komplexer Veränderlichen $t_1, \dots, t_n$. Es wird bewiesen: Ist N kompakt, existiert ferner eine Umgebung $U(N)$ und eine in $U(N)$ eindeutige reguläre Funktion $F \not\equiv 0$, für die $F(N)=0$ ist, so hat jede Modifikation ${}^*G^{2n}$ von G^{2n} in N die Eigenschaft, dass $N^* = {}^*G^{2n} - (G^{2n} - N)$ ein abgeschlossenes analytisches Gebilde in ${}^*G^{2n}$ ist. Folgerung: Jede kompakte Modifikation einer kompl. Mannigfaltigkeit M^4 in einem Punkte P entsteht durch Einsetzung endl. vieler geschlossener irreduzibler Flächen f_ν in P. H. Hopf hat bewiesen, dass die f_ν sämtlich Projektivräume sind.

K. Stein

22. X. 51.

Die Jensen-sche Formel in beliebigen Gebieten bei mehreren Veränderlichen und die Charakteristik meromorpher Flächen

Die Jensensche Formel wird für meromorphe Funktionen $f \not\equiv 0$ auf komplexe, 2n dimensionale Mannigfaltigkeiten M^{2n}

ausgesprochen. Ist $H \subset \mathfrak{M}^{2n}$ offen, $\bar{H}$ kompakt, und hat $Rd\, H = S$ eine äussere Normale, so beweist man für jedes φ mit in $\bar{H}$ stetigen Ableitungen

(1) $\int_S \log|f|\, \partial^\perp\varphi\, \partial x^{2n-2} = \int_H \partial \log|f|\, \partial^\perp \varphi\, \partial x^{2n-2} + \int_H \log|f|\, \partial\partial^\perp\varphi\, \partial x^{2n-2}$

(2) $\int_S \varphi\, \partial^\perp \log|f|\, \partial x^{2n-2} = \int_H \partial\varphi\, \partial^\perp \log|f|\, \partial x^{2n-2} - 2\pi \int_{\mathfrak{N} \cap H} \nu\, \varphi\, \partial x^{2n-2}$

Dabei ist $\mathfrak{N}$ die Fläche der Pol- und Nullstellen von f und ν ihre Vielfachheit. Die alternierenden Differentiale bedeuten:

$\partial\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} (\varphi_{z_\nu}\partial z_\nu + \varphi_{\bar z_\nu}\partial \bar z_\nu)$, $\partial^\perp\varphi = i\sum_{\nu=1}^{n}(\varphi_{z_\nu}\partial z_\nu - \varphi_{\bar z_\nu}\partial\bar z_\nu)$

$\partial x^{2n-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu\neq\nu}}^{n} a_{\mu\nu}\, \partial\bar z_\mu \partial z_\nu\, \partial z_1 \partial\bar z_1 \cdots \hat{\mu} \cdots \hat{\nu} \cdots \partial z_n \partial \bar z_n + \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}\, \partial z_1 \partial \bar z_1 \cdots \hat{\mu} \cdots \partial z_n \partial\bar z_n$

wobei $\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu z_\mu} = 0$ und $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} v_\mu \bar v_\nu$ eine positiv definite Hermitesche Metrik ist. ∂x^{2n-2} gibt jeder analytischen Fläche der Dimension $2n-2$ eine positive Massenbelegung. Wählt man $H = G - \bar g$ "ringförmig", wobei G, g offen, $\bar G, \bar g$ kompakt, $G \supset \bar g$ ist, und $Rd\, G = \Gamma$, $Rd\, g = \gamma$ eine äussere Normale bzgl. G bzw. g haben, bestimmt man φ als Lösung der Randwertaufgabe

$\partial\partial^\perp\varphi\, \partial x^{2n-2} = 0$ in H, $\varphi(P) = \begin{cases} 0 & P \notin G \\ 1 & P \in \bar g \end{cases}$ und wendet man (1) auf H, (2) auf G an, so ergibt sich eine Verallgemeinerung der Jensenschen Formel

(3) $\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log|f|\, \partial^\perp\varphi\, \partial x^{2n-2} - \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \log|f|\, \partial^\perp\varphi\, \partial x^{2n-2} = \int_{\mathfrak{N}} \nu\varphi\, \partial x^{2n-2}$.

Eine meromorphe Fläche ist eine meromorphe Abbildung $\mathfrak{W}(P)$ vom $\mathfrak{M}^{2n}$ in den projektiven Vektorraum der Dimension $2m-2$. Multipliziert man (3) mit R, wobei $R^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \partial^\perp\varphi\, \partial x^{2n-2}$ ist, bildet man das innere Produkt von $\mathfrak{W}$ mit dem Vektor $\vec\alpha$: $(\mathfrak{W}(P), \vec\alpha) = \sum_{\mu=1}^{m} w_\mu(P)\alpha_\mu$, setzt man $f(P) = \frac{(\mathfrak{W}, \vec\alpha)}{(\mathfrak{W}, \vec\beta)}$ in (3) ein, so erhält man, wie bei $n=1$, den 1. Hauptsatz: $T(G) = N(G, \vec\alpha) + m(\Gamma, \vec\alpha) - m_0(\gamma, \vec\alpha) =$ dasselbe in $\vec\beta$.

Für die Charakteristik $T(G)$ kann man unter anderem auch folgende Integraldarstellung angeben:

$$T(G) = \frac{1}{\pi}\int_G \psi\, \partial\omega_2(\mathfrak{W})\, \partial x^{2n-2} \quad \text{mit } \psi = R\cdot\varphi$$

und
$$\partial\omega_2(\mathfrak{W}) = \frac{i}{2}\sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{1}{|\mathfrak{W}|^4} \begin{vmatrix} (\mathfrak{W}_{z_\mu}|\mathfrak{W}_{z_\nu}), (\mathfrak{W}_{z_\mu}|\mathfrak{W}) \\ (\mathfrak{W}|\mathfrak{W}_{z_\nu}), (\mathfrak{W}|\mathfrak{W}) \end{vmatrix} \partial z_\mu \partial \bar z_\nu$$

Insgesamt zeigt sich, dass der 1. Hauptsatz für analytische Kurven, wie er von H. und J. Weyl in "Meromorphic functions and analytic curves (1943) dargestellt wurde, und der 1. Hauptsatz für meromorphe Funktionen im Vektorraum nach H. Kneser J. D.M.V. 48 auf meromorphe Flächen auf komplexen

Mannigfaltigkeiten übertragen werden kann, wobei die Beweise allerdings etwas kompliziertere Integralumformungen verlangen.

W. Stoll

Über gewisse Verallgemeinerungen des Blochschen Satzes.

Sei $E_\eta^{(z)}$ für $\eta = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ +1 \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} \text{die Kreisscheibe } |z|<1 \\ \text{die offene Ebene} \\ \text{die Riemannsche Zahlenkugel} \end{cases}$ und $\varrho_\eta(z_1,z_2) = \left|\frac{z_1-z_2}{1+\eta \bar{z}_1 z_2}\right|$ der „η-Abstand" zweier Punkte aus $E_\eta^{(z)}$ im Sinne der „η-Metrik". Es gelte für die Riemannschen Flächen F, G: $G \subset F \subset E_\eta^{(w)}$ (d.h. G liege verzweigt überlagert in F, usw.) Für jedes $n \geq 2$, od. $= \infty$ werde $\mathfrak{P}_n(G \to F)$ erklärt als die Menge aller Punkte $\underline{w}$ aus F, über denen wenigstens ein Nichtverzweigungspunkt von G oder ein Verzweigungspunkt von G mit weniger als n Blättern liegt. (F habe keine Verzweigungspunkte mit weniger als n Blättern). Unter dem Randabstand des Punktes $\underline{w} \in \mathfrak{P}_n(G \to F)$, $\varrho_{\eta,n} = \varrho_{\eta,n,F}(\underline{w})$, verstehen wir die obere Grenze der Radien (im Sinne der η-Metrik) aller Kreisscheiben mit $\underline{w}$ als Mittelpunkt, die zu $\mathfrak{P}_n(G \to F)$ gehören. Sodann werde für den „verallgemeinerten Inkreisradius" von G gesetzt: $\varrho_n = \varrho_{\eta,n,F}\{G\} = \underset{\underline{w} \in \mathfrak{P}_n(G \to F)}{\text{ob.Gr.}} \varrho_{\eta,n,F}(\underline{w})$. $G(\eta, \alpha, n)$ sei die Menge aller Riemannschen Flächen G mit der Eigenschaft: $G \subset E_\eta^{(w)}$ enthalte keine Verzweigungspunkte mit weniger als n Blättern und entstehe aus $E_{-1}^{(z)}$ durch eine (für $\eta = \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{matrix}$) bzw. $\left.\begin{matrix} \text{reguläre u. beschränkte} \\ \text{reguläre} \\ \text{meromorphe} \end{matrix}\right\}$ Funktion $w = w(z)$; wobei noch $\alpha = \frac{|w'(0)|}{1+\eta|w(0)|^2}$ ist ($\alpha < 1$ für $\eta = -1$) Die verallgemeinerte Blochsche Konstante werde erklärt durch: $\underline{B}(\eta, \alpha, m, n) = \underset{\substack{G \in G(\eta,\alpha,n) \\ F \text{ bel.}}}{\text{unt.Gr.}} \varrho_{\eta,m,F}\{G\}$

dann wird der <u>Satz</u> bewiesen:

Es gilt (für $n \geq m$)

$$B(\eta, \alpha, 2, n) \geq B(\eta, \alpha, m, 2) \geq \frac{\alpha\sqrt{m^2-1}}{m\sqrt{1+\eta\alpha^2} + \sqrt{m^2+\eta\alpha^2}} \qquad (\equiv f_\eta(\alpha, m))$$

Hieraus folgt z.B. für $\eta = +1$, $\alpha \to \infty$:

$$B(+1, \infty, 2, m) \geq B(+1, \infty, m, 2) \geq \sqrt{\frac{m-1}{m+1}}$$

d.h. insbesondere: „Eine einfach zush.gde Riemannsche Fläche vom parabolischen Typus, die über der Riemannschen Zahlenkugel (eventuell verzweigt) ausgebreitet ist und keine Verzweigungspunkte mit weniger als m Blättern besitzt überdeckt schlicht eine Kreisscheibe vom Radius (der (+1)-Metrik): $\varrho_{+1} = \sqrt{\frac{m-1}{m+1}} - \varepsilon$ (wobei zu jedem positiven beliebig kleinen ε eine solche Kreisscheibe gefunden werden kann)". $m \to \infty$ liefert den <u>Satz</u>: Jede einfach zusammenhängende Riemannsche

sche Fläche vom parabolischen Typus, die der Riemannschen Zahlenkugel unverzweigt überlagert ist, überdeckt schlicht zu jedem pos. bel. kleinen ε eine Kreisscheibe, deren Radius sich von dem der Halbkugel um weniger als ε unterscheidet. ($\eta = 0$, $m = 2, \infty$ liefert die Resultate von Ahlfors: Blochsche Konstante $B \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$, Landausche Konstante $L \geq \frac{1}{2}$) Hauptmittel des Beweises ist die auf $\mathfrak{F}_m$ $(G \to F)$ definierte Metrik $ds = \mu \frac{|dw|}{1+\eta w\bar{w}}$ mit $\mu = \frac{A(1+\eta\varrho^2)}{m\varrho^{1-\frac{1}{m}}(A^2 - \varrho^{\frac{2}{m}})}$ mit $\varrho = \varrho_{\eta, m}(w)$ und geeignet zu wählender Konstante A, sowie eine Methode von Ahlfors, die sich in der Arbeit: „An Extension of Schwarz' Lemma. Transact. Am. Math. Soc. (1938), p 359–364" findet und hierzu wieder vor allem eine von Ahlfors stammende Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas (s. sein dortiges Haupttheorem A2) Die Konstruktion der dazu nötigen Stützmetrik verlangt einige ausführlichen Überlegungen vor allem für $\eta = \pm 1$.

Ernst Peschl. 22. 10. 51.

Konstruktion ganzer Funktionen endlicher Ordnung zu gegebenen Nullstellen bei mehreren unabhängigen Veränderlichen.

Eine Verallgemeinerung der Jensen-Poisson-schen Formel auf n Veränderliche gestattet es, zu jeder Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$, deren Grenzexponent ϱ in $q \leq \varrho \leq q+1$ (q ganz) liegt. ($\varrho = \underline{\text{fin}}$ aller μ mit $\int_{\mathfrak{N}} \frac{|\nu|}{|\mathfrak{z}|^{\mu}} \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) < \infty$, q Divergenzexponent, $q+1$ Konvergenzexponent), ein meromorphes $h(\mathfrak{y}) \neq 0$ anzugeben, das auf $\mathfrak{N}$ mit vorgeschriebener Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z}) \gtreqless 0$ verschwindet bzw unendlich wird, (dies besagt schon der zum Beweis benutzte Satz von Cousin) und für die

$$(1) \qquad \log h(\mathfrak{y}) = \frac{(n-1)!}{\pi^{n-1}} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z})\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z})$$

in jeder Kugel $K = [|\mathfrak{y}| \leq r_0]$ gilt, in der $K \cap \mathfrak{N}$ leer ist. Dabei ist $\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z})$ das projektive Oberflächenelement von $\mathfrak{N}$, $(\mathfrak{y}|\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \bar{z}_\nu$ und

$$e(x,q) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ x^{n-1} \log\left[(1-x) e^{\sum_{\nu=1}^{q} \frac{x^\nu}{\nu}}\right] \right\}$$

Ist $h(y)$ kanonisch, d.h. gilt (1) mit $\nu(z) \geq 0$, so ist
$\mathrm{Ord}\, h = \mathrm{Ord}\, N(r,0) = \varrho$, Kl., Typ h = Kl., Typ $N(r,0)$

Der Beweis von H. Kneser für $n=2$ lässt sich nicht auf $n>2$ übertragen. Er gelingt für $n \geq 2$ mit zwei Hilfssätzen

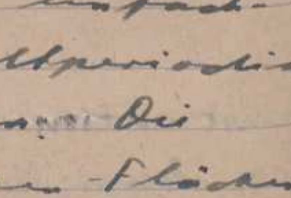
1. $F(y) \equiv (n-1)\int_0^1 \log|h(\tau y)|(1-\tau)^{n-2}\,d\tau \leq \frac{(n-1)!}{2\pi^n}\int\limits_{|\alpha|=1} \log|h(|y|\alpha)|\,d\omega$
   wobei für $|y| \leq r_0$ das Gleichheitszeichen gilt.
2. Wenn $M(r) = \max\limits_{|y|\leq r}|h(y)|$, $H(r) = \max\limits_{|y|\leq r} F(y)$ ist, so gilt
   $$\log M(\tfrac{r}{4}) \leq 8^n\,[H(r) + N(r,0) + n(r,0)] .$$

Weiter erhält man dieselben Aussagen über Ordnung, Klasse, Typ für meromorphes $f(z)$ – und allgemeiner für meromorphe Flächen $w(z)$ – wie bei $n=1$. (1) kann mit veränderlichem q auf $\mathfrak{R}$ mit $\varrho = \infty$ übertragen werden.

W. Stoll.

Gegenstand der Untersuchung bilden die Flächen, deren Streckenkomplexe sich durch endlich viele einfach-periodische und doppeltperiodische Enden darstellen lassen. Die vorgegebenen Riemannschen Flächen werden nach zweckmäßiger Zerschneidung partiell uniformisiert. Die so erhaltenen Flächenstücke werden vermittels quasikonf. Abbildungen zu einer schlichten Ebene $|S| < \infty$ verheftet. Für die Werteverteilung der erwähnten Flächenklasse ist zu bemerken, dass keine defekten Werte auftreten können.

Die Uniformisierung der nebenstehenden Fläche zeigt weiter, dass eine Verschiebung der Grundpunkte eine Ordnungserhöhung erzeugt.



29. 10. 1951

Hans Kü[illegible]

 Okt. 23, 1951

Kapazität von Strahlungsfeldern.

Im 3-dim. Eukl. Raume sei ein beschränktes Innengebiet von einem zusammenhängenden Aussengebiet W durch glatte Oberflächen Ω getrennt. Solche Lösungen u der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ $(k > 0)$ in W gelten als zulässig, die der "Ausstrahlungsbedingung" genügen. Gesucht sind zulässige Lösungen in W mit vorgegebenen Randwerten $f(s)$ auf Ω. Es gilt der Eindeutigkeitssatz (Magnus-Rellich). Der übliche Ansatz: "Potential" einer Doppelbelegung $\mu(s)$, (der sich hier auf die Grundlösung e^{-ikr}/r statt $1/r$ stützen muss) führt auf eine Fredholmsche Integralgleichung $(E+K)\mu = f$ mit einem Kern $K(ss')$, dessen Argumente auf Ω variieren. Dieser Ansatz bedarf der Ergänzung, wenn die transponierte homogene Gleichung $\eta(E+K) = 0$ nicht-triviale Lösungen η hat. In der eigentlichen Potentialtheorie $(k = 0)$ wird man dieser Schwierigkeit Herr, indem man das "Konduktorenpotential" einer geeigneten solchen einfachen Belegung η hinzufügt. Aber das dort gebrauchte Argument, daß das Dirichlet-Integral positiv-definit ist, versagt hier. Man muss von der Mannigfaltigkeit Φ der Eigenfunktionen φ, Lösungen von $(E+K)\varphi = 0$, übergehen zu der Mannigfaltigkeit Φ_l der "charakteristischen Funktionen", Lösungen von $(E+K)^l \varphi = 0$ mit genügend hohem Exponenten l. Die entsprechenden Bezeichnungen für den transponierten Kern seien η, H, H_l; und H_l' bestehe aus den Elementen $\eta' = \eta(E+K)$, $\eta \in H_l$. Man kombiniere nun die allgemeine Tatsache, dass $(\eta\varphi) = \int_\Omega \eta(s)\varphi(s)\,ds$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform von $\eta \in H_l$, $\varphi \in \Phi_l$ ist, mit der Bemerkung dass $\varphi(s) = \int Q(ss')\eta(s')\,ds'$ eine Abbildung M, $\eta \to \varphi = M\eta$, von H_l auf Φ_l bewirkt, die sich auf Grund des Eindeutigkeitssatzes als nicht-ausgeartet herausstellt. Die Koeffizienten der symmetrischen bil. Form $(\eta, M\eta^*)$ sind das Analogon der Kapazitäts-Koeffizienten. Man kann hier entweder η und η^* je einer

Basis von H_l durchlaufen lassen (grosse Kapazitätsmatrix), oder aber für y eine Basis von H, für y^* eine Basis von H_l mod. H_l' einsetzen (kleine Kapazitätsmatrix). Die Beweise stützen sich auf eine einfache Formel, die auch das Verhältnis dieser beiden Verfahren vollständig ~~auf~~klärt.

Hermann Weyl

Lückenreihen und Transzendente Zahlen.

Man kennt drei große Klassen (S, T, U) transzendenter Zahlen (= TZ) die von Mahler (Crelle 167, 1932) und Koksma (Monatshefte 48 (1939)) auf verschiedenen, aber im Erfolge gleichwertigen Wegen herausgeschält wurden. Das Verfahren ruht auf den Approximationseigenschaften; wir verweisen dazu auf die Einleitung des Vortrags vom 19.8.51 von Th. Schneider (in diesem Bande). Die klassische Theorie der tr. Z. von Hermite bis auf Siegel (und Gelfond) behandelt Transzendenzeigenschaften für den Wertvorrat tr. Funktionen $w(z)$, die als Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen II. Ordnung erscheinen (oder mit solchen eng zusammenhängen, wie e^z, $\log z$, $J_0(z)$ ...); setzt man für z eine algebraische Zahl ein, so wird $w(z)$ eine S- oder T-Zahl. – Liouvilles erste Konstruktion tr. Zahlen (1851) erlaubte es, eine Klasse nicht fortsetzbarer Potenzreihen $w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\nu_k} z^{\nu_k}$ herauszuheben, deren Wertvorrat an das andere Ende der Mahler-Koksmaschen Klassifikation führt, nämlich zu U-Zahlen – denen die Klasse A der alg. Zahlen in gewisser Weise hinzuzufügen ist. Die Klasse U spaltet auf in abzählbar viele Klassen U_g $(g = 1, 2, \ldots)$, wo g derjenige Grad ist, für den zuerst $\omega(g) = \infty$ wird (vgl. oben b. Schneider), während $\omega(1) = \ldots = \omega(g-1) < \infty$ bleiben. Umfasst A_g alle alg. Zahlen vom Grade g, so sind alle U_g-Zahlen aus A_g heraus von jeder Ordnung N in bezug auf die Höhe H approximierbar. – Unsere Reihenklasse zeige ganz rat. Koeff. c_ν, $\neq 0$ nur für $\nu = \nu_k$, Konvergenz in $|z| < 1$, und die Lückenbedingung

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \; \nu_{k+1} : \nu_k = \infty .$$

Ein solches $w(z)$ ist dann über $|z| < 1$ hinaus nicht fortsetzbar (Carlson MZ 9, 1921). Unser Ergebnis ist dann: Setzt man eine alg. Zahl $\xi = \xi_g$ v. Grade g (aus $|z| < 1$) ein, so wird $w(\xi)$ eine Zahl aus U_g oder A_g; dabei muß einbezogen werden die Zugehörigkeit von $w(\xi)$ zu Klassen U_d oder A_d mit d/g, insbesondere U_1, $A_1 = K(1)$. — Dagegen ist unmöglich, daß $w(\xi)$ eine S- oder T-Zahl wird, oder bei ξ_g vom Grade g, daß $w(\xi_g)$ einem U_μ angehört mit $\mu > g$ oder überhaupt $\mu \nmid g$.

Zudem ergibt sich folgende Körpereigenschaft – über die Einsichten bei Mahler Koksma hinaus: Ein Körper g-ten Grades K_g, erzeugt durch Approximation von U_g-Zahlen allein durch Elemente aus K_g wieder einen Körper tr. Z. aus U_g. U_g spaltet auf in Körper, die die Körper K_g wiederspiegeln. Eine verwandte Aussage solcher Art ist zuerst von Beppo Levi im Falle der U_1-Zahlen = Liouville-Zahlen gemacht worden.

Näheres: Anz. Akad. Wiss. Wien 1957 und demnächst in der MZ.

Egon Ullrich.

Über den Gauss-Bonnetschen Satz.

Ahlfors hat im J. 1937 den Gauss-Bonnetschen Satz benutzt um die Hauptsätze der Wertverteilungslehre zu begründen und zu interpretieren. Dieser Satz scheint auch auf einer allgemeinen Riemannschen Fläche eine Grundlage zu bilden für die Entwicklung einer Theorie der Abelschen Integrale, ~~?~~ vor allem derjenigen der 2. u. 3. Gattung u. der „rationalen" Funktion, und eine Möglichkeit zu eröffnen für eine natürliche Abgrenzung dieser Begriffe, die notwendig ist, wenn man eine Theorie aufbauen will, bei der die charakteristischen Züge der klassischen Theorie (Fall einer kompakten Fläche) beibehalten wird. — Falls $G + \Gamma$ ein kompakter Teil (Γ analytischer Rand von G) einer Riemannschen Fläche R ist, so führe man eine ~~B~~ invariante Metrik $u(z)\,|dz| = d\sigma$ ein $(0 \leq u \leq \infty)$, wobei u an den Nullstellen α und den Polstellen β eine Entwicklung

$$u = |z-\alpha|^{\mu} \cdot u_1 \quad , \quad v = |z-\beta|^{-\nu} \cdot u_2 \qquad (\mu, \nu > 0)$$

hat und ~~u, und~~ $\log u_1$, $\log u_2$ an jenen Stellen genügend regulär sind.

Man hat dann die Gauss-Bonnetsche Formel:

$$2\pi\chi + K = 2\pi \sum_G (\mu - \nu) - \int_\Gamma d\tau$$

wo χ die Eulersche Charakteristik von G ist, ~~$\int_\Gamma d\tau$~~ K die Curvatura integra von G und $\int_\Gamma d\tau$ die geodätische Krümmung von Γ

bezeichnet.

Für die Anwendung betrachtet man ein geschlitztes Gebiet $G - G_0$ und auf dessen Fläche die analytische ~~Potential~~funktion $z = x + iy$, bei der der Realteil x eindeutig ist und durch die Randwerte $x = 0$ auf der Begrenzung Γ_0 von G_0, $x = \bar{X}$ ($=$ const) auf Γ festgelegt wird, wobei $\bar{x}$ so fixiert wird, dass

$$\int_{x = \text{const}} dy = 2\pi .$$

Setzt man die Gauss-Bonnet'sche Formel an ein Gebiet G_λ ($0 \leq x \leq \lambda < \bar{X}$), so ergibt sich

$$2\pi \int_0^\lambda \chi(x)\,dx + \int_0^\lambda K(x)\,dx = 2\pi \int_0^\lambda (\mu(x) - \nu(x))\,dx + \int_\Gamma \log u \cdot dy$$

wo das Argument (x) angibt, dass die betreffenden Grössen auf das Gebiet G_x bezogen werden sollen.

Für die Theorie der Abelschen Differentiale sind folgende Fälle wichtig.

1) $u = |f|$, wo $f\,dz$ ein Abelsches Differential ist.

2) $u = \sqrt{|f|^2 + |\varphi|^2}$, wo $f\,dz$ ein beliebiges Abelsches Differential ist, $\varphi\,dz$ ein Differential $\underline{\underline{1}}$. Gattung ist.

3) $u = \sqrt{|f|^2 + \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|^2}$, wo

$$\left|\frac{d\sigma}{ds}\right|^2 = \sum |\varphi_\nu|^2$$

die Bergmansche Form ist.

Eine natürliche Begrenzung der Abelschen Integrale 2. und 3. Gattung auf einer nullberandeten Fläche R besteht dann in der Forderung, dass (in den obigen Fällen 1–3)), die Curvatur integrale $K(x)$ nicht von höherer Wachstumsordnung ist als die Charakteristik $\chi(x)$. – Daraus folgt speziell die entsprechende Eigenschaft für die Anzahlfunktionen ν und μ, relativ zu χ.

Rolf Nevanlinna

Über das Anwachsen der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Für lineare Differentialgl. (1) $w^{(m)} + a_{m-1}(z)\, w^{(m-1)} + \dots + a_1(z)\, w' + a_0(z)\, w = 0$, $a_j(z)$ Polynome, werden folgende Aussagen gemacht: Hat (1) genau $(m-1)$ Polynomlösungen (lin. unabh.), so hat jede transzendente Lösung $w(z)$ von (1) die Ordnung $\lambda = m + \alpha_0$, wobei α_0 der Grad von $a_0(z)$ ist. Ist jede Lösung v. (1) transzendent, so gilt, für jedes Fundamentalsystem $w_1(z), \dots, w_m(z)$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m \geq m$, wobei λ_j die Ordnung von $w_j(z)$ ist. Gleichheit tritt dann und nur dann ein, wenn eine Dgl. mit konstanten Koeffizienten vorliegt. Läßt man in (1) rationale Koeff. zu, so hat jede in $|z| < \infty$ eindeutige analytische [illegible] Lösung folgende Eigenschaften: Der Defekt $\delta(c)$ ist $= 0$ für alle $c \neq 0, \infty$. Es gilt weiter $N_1(r) + m(r,0) + m(r,\infty) = 2T(r,w) + O(\log r)$, gültig für alle r mit $N_1(r) = N(r, \frac{1}{w'}) + 2N(r,w) - N(r,w')$. Alle diese Aussagen gewinnt man ohne Integrationstheorie.

In der Riccatischen Dgl. (2) $w' = a(z) + b(z)\, w + w^2$ seien $a(z)$, $b(z)$ Polynome. Jede Lösung von (2) ist in $|z| < \infty$ eind. analytisch und hat, sofern sie nicht rational ist, sämtlich nur einfache Pole. Die Ordnung von $w = w(z)$ ist endlich. Ist $D(z) = a(z) + c \cdot b(z) + c^2$, so erhält man folgendes Verhalten

(I) $D(z) \not\equiv 0$. $\delta(c) = 0$ für alle c und $\varepsilon(c) = 0$.

(II) $D(z) \equiv 0$ führt auf die Dgl.

a) $w' = (w - c_1)(w - c_2)$ b) $w' = (w - c)^2$ c) $w' = (w - c)(w + c + b(z))$.

Für a) bzw. c) gilt $\delta(c_1) = \delta(c_2) = 1$ bzw. $\delta(c) = 1$ und $\varepsilon(c) = 0$ für alle c.

Auch für diese Lösungen gilt: $N_1(r) + m(r, c_1) + m(r, c_2) = 2T(r,w) + O(\log r)$.

Setzt $\phi_c = \lim_{r \to \infty} \frac{N(r, \frac{1}{w'})}{T(r,w)} = \lim_{r \to \infty} \frac{N_1(r)}{T(r,w)}$ (gilt für alle $w(z)$, die (2) lösen)

erhält man die genaue Defektrel. $\phi_c + \sum \delta(a_\mu) = 2$. Damit gilt für (I) $\phi_c = 2$, für (II a) $\phi_c = 0$, $\delta(c_1) = \delta(c_2) = 1$, für (II c) $\phi_c = 1$, $\delta(c) = 1$.

Der Fall b) führt auf lineare Funktion.

Hans Wittich.

Die Singularitäten analytischer Funktionen (Bericht)

Durch die weithin unbekannte Arbeit von K. Oka: Sur les fonctions de plusieurs variables complexes VI, Tôhoku Math. Journal 1942 wurde zum ersten Male ein Beweis für die von E E Levi 1911 in den Annali di matematica ausgesprochene Vermutung erbracht: ~~So~~ „Jedes pseudokonvexe Gebiet im Raum von 2 kompl. Veränderlichen ist ein Regularitätsgebiet (Existenzgebiet einer Funktion $f(w,z)$)". Da ein sehr grosser Teil der Untersuchungen in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen ~~mit~~ dieser Frage eng zusammenhängt oder gar sie selbst betrifft, so gibt ein Bericht über die Entwicklung ~~dieser~~ in der Behandlung dieser Frage Einblick in den Aufbau der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen während der letzten 4 Jahrzehnte.

Zum Verständnis der Levischen Untersuchungen wird mit den Arbeiten von F. Hartogs 1905–1908 begonnen. Die logarithmische Konvexität und der Kontinuitätssatz (in seiner speziellen Fassung) werden erklärt. Es folgt die Behandlung der Ränder der Hyperkugel und dann erst ein Bericht über die beiden Arbeiten von E E Levi über natürliche Grenzen bei Funktion $f(w,z)$. Die Bedingung von E E Levi ist notwendig und im Kleinen hinreichend. Ist sie es im Grossen? O. Blumenthal bezweifelt es in der Weber Festschrift 1912. Zum Vergleich wird von der Planarkonvexität im Kleinen und Grossen gesprochen. Es folgt der Kontinuitätssatz und der Nachweis, dass die Vermutung richtig ist für Hartogssche und Kreiskörper. Ein wesentlich neuer Schritt ist die Einführung der Regulärkonvexität durch Cartan und Thullen. Die Regularitätshüllen werden definiert und ihre Eigenschaften besprochen. Dann wird der Konvergenzsatz für Regularitätsgebiete und seine Konsequenzen ~~besprochen~~ behandelt. Es folgen die Polyedergebiete und die Entwicklung der in ihnen regulären Funktionen. Dann wird der Okasche Beweis angedeutet und nur noch ausführlich die Konsequenzen besprochen, die

sich aus der Entdeckung von Ohe ergeben.
— Siehe H. Behnke und K. Stein, Nieuw Archief voor Wiskunde 1951.

H. Behnke

Bemerkungen zur Theorie der harmonischen Differentiale auf offenen Riemann'schen Flächen.

Die auf einer offenen Riemann'schen Fläche quadratisch integrierbaren harmonischen Differentiale ω bilden einen Hilbert Raum Ω, wenn die Metrik $(\omega_1,\omega_2)=\iint(p_1p_2+q_1q_2)\,dx\,dy$, $\omega=p\,dx+q\,dy$, eingeführt wird. Es werden 3 Teilräume Ω_{ab}, Ω_c, Ω_e bestimmt, die paarweise orthogonal sind und nach denen sich jedes $\omega\in\Omega$ eindeutig in Komponenten zerlegen läßt, $\omega=\omega_{ab}+\omega_c+\omega_e$. Es ist $(\omega_{ab})^*\in\Omega_{ab}$, $(\omega_c)^*\in\Omega_e$ und $(\omega_e)^*=\cancel{(\omega_c)^*}\,\omega_c'+\omega_e$. Es ergeben sich einige Konsequenzen für die Riemann'schen Flächen, die zu O_{AD} aber nicht zu O_{HD} gehören, ferner für die eindeutigen harm. Fkt. mit endlichem Dirichlet-Integral. Den unmittelbaren Anlass zu diesen Bemerkungen gab die Arbeit von Virtanen über eine Integraldarstellung quadrat. integr. barer Differentiale in den Ann. Acad. Sci. Fenn. 1950.

A. Pfluger.

Bemerkungen über die regulären Automorphismen des offenen R^{2n}.

Unter einem regulären Automorphismus des offenen R^{2n} werde eine reguläre u. topologische Abbildung des R^{2n} auf sich verstanden. Diese heiße ein achsentreuer regulärer Automorphismus (a.r.A.) des R^{2n} wenn für jedes $\nu=1\dots n$ die Achse $x_\nu=0$ in $y_\nu=0$ übergeht. Für $n=2$ läßt sich zu jedem r.a.A. des R^4 und jedem $\varrho>0$ eine endliche Menge von speziellen [illegible] Automorphismen A_j^*, $j=1,\dots k(\varrho)$ der Gestalt:

$$A^*:\ y_1=x_1e^{-\beta f(u)},\ y_2=x_2e^{\alpha f(u)},\ u=x^\alpha y^\beta,\ \alpha\beta\ \text{ganz}\ \geq 0,\ f(u)\ \text{ganze Fkt.}$$

finden, sodaß für den r.a.A.: $B=A^*_{k(\varrho)}\cdots A^*_1A$ gilt

$y_1 = x_1 e^{x_2 G_1(x_1,x_2)}$, $y_2 = x_2 e^{x_1 G_2(x_1,x_2)}$ mit $G_2(x_1,x_2) = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} b_{\mu\nu} x_1^{\mu} x_2^{\nu}$ und

$b_{\mu\nu} = 0$ für alle $\mu+\nu \leq g$.

Gilt $G_2(x_1,x_2) \equiv 0$, so folgt $\frac{\partial G_1}{\partial x_1} = 0$ und B ist dann auch von der speziellen Art A^*. Für alle r.a. A'n der speziellen Art A^* und beliebigen Zusammensetzungen aus endlichvielen solchen gilt: $\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} \equiv 1$.

Bezeichnen wir zur Abkürzung für irgendeinen r.a. A. „A": $y_\nu = f_\nu(x_1 \ldots x_n)$

$$D\{A\} \equiv \frac{\prod x_\nu}{\prod y_\nu} \frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}$$

so wird durch die obigen Überlegungen (und entsprechende allgemeine Untersuchungen für den R^{2n}) die folgende Vermutung nahegelegt:

„Für jeden r.a.A. des offenen R^{2n} gilt: $D\{A\} \equiv 1$."

Jedoch fehlt bis jetzt hierfür ein Beweis. Beweisen läßt sich jedoch

Satz 1: Für den r.a A. „A" des offenen R^{2n} sei die folgende Bedingung B_1 erfüllt: es gebe eine unendliche Folge von Vektoren $\mathfrak{r}_\nu = (\varrho_{\nu 1}, \ldots \varrho_{\nu n})$, $\nu = 1, \ldots$ und eine Folge m_ν, mit $\lim_{\nu\to\infty} m_\nu = \infty$, sodaß für alle Punkte $(x_1 \ldots x_n)$ mit $|x_j| = \varrho_{\nu j}$ gilt: $|f_j(x_1 \ldots x_n)| \geq m_\nu$, dann gilt: $D\{A\} \equiv 1$

und ebenso Satz 2: Für den r.a. A. „A" des offenen R^{2n} sei die Bedingung B_2 erfüllt: Es gebe eine Folge von Vektoren $\sigma_\nu = (\sigma_{\nu 1}, \ldots \sigma_{\nu n})$, $\nu = 1, 2, \ldots$ mit $\lim_{\nu\to\infty} \sigma_{\nu j} = \infty$, $j = 1, \ldots n$, und eine positive Konstante M mit:

$|D\{A\}| \leq M$ für alle Punkte $|x_j| = \sigma_{\nu j}$ $\nu = 1, 2, \ldots$, dann gilt: $D\{A\}$

Jedem r.a.A. des offenen R^4 läßt sich eindeutig ein Tripel von ganzen Funktionen einer komplexen Variablen zuordnen: $h_1(t) = f_1(t,1)$, $h_2(t) = f_2(t,1)$, $h_3(t) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=0}$, sodaß für je zwei verschiedene Automorphismen die zugeordneten Tripel auch voneinander verschieden sind. Darauf läßt sich eine Metrik aufbauen.

Ernst Peschl.

Funktionenklassen und ihre Integrale auf geschlossenen Riemannschen Flächen.

Angestrebt wird die Erweiterung der klassischen Theorie der algebraischen Fktn. auf gewisse Transzendente. F sei die gg. geschlossene R'sche Fläche, $\{A(z)\}$ der auf ihr definierte Fktnkörper, $J(z)$ ein Abelsches Integral von F. Die Klasse k ist die Mannigfaltigkeit $\{A(z) \exp J(z)\} \,/\, A(z) \in \{A(z)\} /$. Die komplementäre Klasse $\check{k}$ ist definiert durch $-J(z)$. In z sei mit t als spezieller Ortsuniformisierenden:

$f(z) = -\sum_{\lambda=1}^{\delta_\mathfrak{z}-1} \frac{c_{\lambda+1}(\mathfrak{z})}{\lambda} t^{-\lambda} + c_1(\mathfrak{z}) \ln t + \mathfrak{P}(t)$, $c_1(\mathfrak{z}) \equiv q(\mathfrak{z})$ (1), $0 \le R(c_1(\mathfrak{z})) < 1$. Mit Hilfe der lokalen Charakterisierungsfktn $f_\mathfrak{z}(t) = -\sum_{\lambda=1}^{\delta_\mathfrak{z}-1} \frac{c_{\lambda+1}}{\lambda} t^{-\lambda} + c_1(\mathfrak{z}) \ln t$ erfolgt die Festlegung der Ordnungszahl eines Pkts $\mathfrak{z}$. Die Fktn $\in k$ sind von der Gesamtordnung $-p_r = -\sum c_1(\mathfrak{z})$, p_r = Relativgeschlecht. Die Ordnungszahl des Differentials wird durch $f_\mathfrak{z}(t)$ bestimmt. Ist $\mathfrak{z}_t$ der Verzweigungsdivisor von f, $\mathfrak{z}_r = \prod \mathfrak{p}^{c_1(\mathfrak{z}) + \bar{c}_1(\mathfrak{z})}$ der relativen Verzweigungsdivisor, so ist dz formal der Differentialdivisor $\mathfrak{W} = \mathfrak{z}_r \mathfrak{z}_t \prod \mathfrak{z}_{\infty\mu}^{-2}$, $\mathfrak{z}_{\infty\mu}$ liegt über $z = \infty$, zugeordnet. Es gelten eine Reihe von Aussagen der klassischen Theorie, u. a. der Residuensatz $\sum_{\text{Res.}} y\,d\omega = 0$ / $y \in k, d\omega \in k$ /. Mit $p = p_r + p_t$, p_t = Geschlecht von f, gilt der Riemann-Roch'sche Satz

$$U(\mathfrak{g}) - V(\mathfrak{g}^{-1}) = -\omega(\mathfrak{g}) - p + 1 \quad , \quad \omega(\mathfrak{g}) = \text{Ordnung von } \mathfrak{g}.$$

k heißt elementar $\Leftrightarrow U(1) = \varrho = 1 \Leftrightarrow \check{V}(1) = \check{\sigma} = p$.

Definition des Weierstraßpunktes $\mathfrak{g}_W$: $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_W \Leftrightarrow \exists\, y \in k$: $y \not M(1)$, $y\,M(\mathfrak{z}^{-\kappa})$, $1 < \kappa < p + \varrho$, wobei $y\,M(\mathfrak{g})$ bedeutet: y ist Multiplum von $\mathfrak{g}$. Es treten nur endlich viele $\mathfrak{g}_W$ auf, für $p_t = 0$ bzw. $p \le 1$ keine, sonst aber stets mindestens einer. I. A. existieren wenigstens $\frac{(p-1)^2}{p_t}$ $\mathfrak{g}_W$. Es sind in jedem Pkt genau p Lückenzahlen vorhanden, die $\le p + p_t - 1$ sind.

Die Elementardivisoren: $\mathfrak{M}$ / $\omega(\mathfrak{M}) = \sigma$ / u. $\mathfrak{N}$ / $\omega(\mathfrak{N}) = \varrho$ / seien ganz u. so bestimmt, daß: $y\,M(\mathfrak{M}^{-1}) \to y\,M(1)$ und $d\omega\,M(\mathfrak{N}^{-1}) \to d\omega\,M(\mathfrak{N})$. Mit diesen Divisoren erfolgt die Festlegung der Elementarfktn u. -differentiale einer u. zweier Variablen. Es gilt der sog. Ableitungssatz. Der Entwicklungssatz für $E^{(1)}(z,x)\frac{dx}{dt}$, $dF^{(1)}(x,z)$ liefert zusammen mit der Cauchyschen Integralformel sofort die allgemeine Theorie der Faberschen Entwicklungen auf geschlossenen R'flächen. Von den Entwicklungstheoremen gelangt man zu den Vertauschungs- u. Reduktionstheoremen im R. König'schen Sinne. $\mathfrak{z}_1 \sim \mathfrak{z}_2$ bedeutet, daß $\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2$ die Ableitung einer Klassenfktn ist. In diesem Sinne lassen sich Fktn aus k_0 bzw. $k_\mathfrak{F}$ auf N_0 bzw. $N_\mathfrak{F} = N_0 + \{\mathfrak{F}\}$ Elemente reduzieren. Aus den Vertauschungstheoremen ergibt sich die Definition der Elemente 1., 2. u. 3. Gattung.

Das Mehrdeutigkeitsverhalten der Integrale läßt sich durch Perioden u. Halbperioden erklären, wobei „Segmentialwege" und einfache Schleifen eingeführt werden; die ersteren beginnen u. münden in Pkten $\mathfrak{z}$ mit $\delta_\mathfrak{z} > 1$. Die Periodenmatrix kann als nichtsingulär nachgewiesen werden; dabei wird für die Periodenbildung geschlossener Wege zugrunde gelegt, für die eine $N_\mathfrak{F}$-gliedrige Basis existiert. Die Weierstraß'schen Periodenrelationen lassen sich ohne weiteres übertragen.

Es gelten die Sätze: $\int_\mathfrak{L} d\omega = 0$ für alle $\mathfrak{L}$ geschlossen $\to d\omega \sim 0$

$\mathfrak{L}$ " " $d\omega \in k \to \mathfrak{L} \sim 0$

der Satz von Vertauschung von Parameter u. Argument gilt ebenfalls mit einer Reihe bekannter Sätze. Speziell übersieht man die Abhängigkeit zwischen Perioden von den Unstetigkeitsstellen des Integranden. Weiter lassen sich die Primfunktionen sofort übertragen, wobei sich ein prinzipieller Unterschied zwischen $p_r = 0$ und $p_r > 0$ zeigt: eine Klassenfunktion lässt sich bis auf eine Konstante durch ein endliches Produkt von Primfunktionen genau der Pole u. Nullstellen erhalten. Abschließend wird der Problemkreis des Abelschen Theorems auf die betrachteten Transzendenten erweitert.

Helmut Röhrl

Über die Verschmelzung von Randstellen Riemannscher Flächen.

Der Vortrag gibt einen Beitrag zur Erkenntnis des Zusammenhanges zwischen der geometrischen Struktur einer Riemannschen Fläche und der Werteverteilung der sie erzeugenden meromorphen Funktion. Schiebt man die algebraischen Windungspunkte in der von $\cos\sqrt{z}$ erzeugten Fläche aus den Koordinaten ± 1 heraus über andere Koordinaten $p_\nu > 0$, $n_\nu < 0$, die sich gegen ∞ häufen, so verschmilzt der ursprünglich über ∞ gelegene logarithmische Windungspunkt mit sich selbst zu einer komplizierteren unmittelbaren Randstelle. Möglicherweise tritt hierbei eine Erniedrigung der Wachstumsordnung für die Funktion $w(z)$ auf, die die deformierte Fläche $\mathfrak{W}$ erzeugt. Ist die Konvergenz der p_ν, n_ν gegen ∞ stark genug, so tritt die Ordnungserniedrigung wirklich ein, und sie ist berechenbar, wenn die Konvergenz regelmäßig genug ist. Zur Abschätzung der Ordnung von $w(z)$ wird $\mathfrak{W}$ geeignet geschnitten und durch einen Zweig der nunmehr auf $\mathfrak{W}$ eindeutigen Funktion $\zeta(w)$, der Umkehrung der Modulfunktion mit den kritischen Punkten $\pm 1, \infty$, uniformisiert. Durch geeignete Normierung erhält man als Bild von $\mathfrak{W}$ ein unendlichvielseitiges Orthokreispolygon zur reellen Achse, das außerdem noch ~~längs~~ auf Parallelen zur imaginären Achse Einschnitte trägt; wir nennen sie Gräten. Ist * $\lambda(q) \cdot q$ die Länge der Kreisbogenstücke vom Radius q, das symmetrisch zur imaginären Achse ist und ganz innerhalb Q liegt, so wird die Wachstumsordnung ω von $w(z)$ unter gewissen Voraussetzungen über die Regelmässigkeit der Konvergenz von p_ν, n_ν durch die Formel

$$\omega = \overline{\lim} \frac{\log(\varrho \cdot \sin \lambda(\varrho))}{\int^{\varrho} \frac{2}{\lambda(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho}}$$ gegeben,

der Wachstumstypus durch das Verhalten von $\overline{\lim} \frac{\varrho \sin\lambda(\varrho)}{e^{\omega \cdot \int^{\varrho} \frac{2}{\lambda} \frac{d\varrho}{\varrho}}}$ gegeben. Wesentliche Stütze der Abschätzung ist Teichmüller's Modulsatz.

Beispiele für Flächen der betrachteten Klasse bilden die von $E_\alpha(z) = \sum z^n/\Gamma(1+\alpha n)$ erzeugten Flächen für $\alpha \geq 2$. Durch geeignete Wahl der Verzweigten Sorten p_ν, n_ν kann man ferner Funktionen $w(z)$ konstruieren, die für abzählbar viele Werte a_k positive Indizes der algebraischen Verzweigtheit haben, die nur durch die Bedingungen $\vartheta(a_k) \leq 1/2$, $\sum \vartheta(a_k) \leq 1$ eingeschränkt sind, im besonderen also auch nicht rational zu sein brauchen.

In ähnlicher Weise lässt sich die Γ-Funktion untersuchen; man kann auf diese Weise allein aus der geometrischen Struktur der von $\Gamma(z)$ erzeugten Fläche schliessen: $\Gamma(z)$ hat die Wachstumsordnung 1 vom Maximaltypus.

Schiebt man umgekehrt die Windungspunkte der Fläche von $\cos\sqrt{z}$ über Koordinaten p_ν, n_ν, die sich gegen Null häufen, so entsteht eine mittelbare Randstelle über Null, die bei genügender Stärke Anlass zur Erhöhung der Wachstumsordnung gibt.

Friedrich Huckemann.

Das Zentrumproblem.

Wegen der Problemstellung bitte ich den Leser, meinen Vortragsbericht vom 7. IV. 49 (in diesem Vortragsbuch, Seite 9) nachzulesen.

Der Vortrag gibt eine Übersicht über den gegenwärtigen Stand des Zentrumproblems.

Das von C. L. Siegel 1942 bewiesene Hauptresultat kann so formuliert werden: Der Fixpunkt ζ der analytischen Funktion $f(z) = \zeta + \alpha_1(z-\zeta) + \alpha_2(z-\zeta)^2 + \dots$ ist ein „Zentrum", wenn

$\alpha_1 = e^{2\pi i \xi}$, ξ reell und keine Liouvillesche Transzendente ist, d.h. wenn es zwei positive Zahlen $\lambda > 0$, $\mu > 0$ gibt, derart, daß für alle natürlichen Zahlen m und n

$$\left| \xi - \frac{m}{n} \right| > \frac{\lambda}{n^{\mu}} \qquad \text{gilt.}$$

(Der hochinteressante, mehrere geniale Beweisgedanken meisterhaft kombinierende Beweis findet sich in den Annals of Mathematics, 43 (1942), S. 607–612).

Es ist aber z. Zt. noch unbekannt, ~~daß~~ ob es zu jeder Liouvilleschen Zahl ξ eine Funktion $f(z) = \alpha_1 z + \dots$ $(\alpha_1 = e^{2\pi i \xi})$ gibt, für die der Nullpunkt kein Zentrum ist. Andererseits gibt es zu allen ξ, die genügend gut durch rationale Zahlen approximiert werden, nämlich so, daß $\liminf\limits_{n=1,2,\dots} |\alpha_1^n - 1|^{\frac{1}{n}} = 0$ gilt, sogar ganze Funktionen $f(z) = \alpha_1 z + \dots$ jeder Ordnung und jedes Typus, für die der Nullpunkt kein Zentrum ist. Wenn überdies

$$\liminf_{n=1,2,\dots} \left| \sqrt[n]{\alpha_1^n - 1} \right| < 1$$ gilt, und $f(z)$ eine rationale Funktion

s-ten Grades bedeutet, ~~ist $f(z) = \alpha_1 z +$~~ kann der zugehörige Fixpunkt kein Zentrum sein. Ferner liegt kein Zentrum vor, wenn $g(z)$ eine ganze Funktion ist und der zugehörige Multiplikator α_1 der Bedingung

$$\liminf_{n=1,2,\dots} |\alpha_1^n - 1| \, M_n(r)^{\log r} = 0$$

genügt, wobei $M_n(r) = \max\limits_{|z| \le r} |g_n(z)|$ ist.

Die den genannten Bedingungen genügenden ξ sind Liouvillesche Transzendente, die „ungewöhnlich gut" (d.h. weit besser, als es unter Liouvilleschen Zahlen definitionsgemäß sowieso schon der Fall ist) durch rationale Zahlen ~~der Fall ist~~ approximiert werden.

Als ein interessantes, auch vom Standpunkt der Lehre von den transzendenten Zahlen amüsantes Problem ergibt sich also das der

Klassifizierung der transzendenten Zahlen vom „[illegible]standpunkt" aus, d.h. nach funktionentheoretischen Gesichtspunkten.

Hubert Cremer

Bemerkung zur mechanischen Quadratur.

Es wurde gezeigt, daß für jede Quadraturformel – bei symmetrisch zur Intervallmitte gelegenen Abszissen – ein Analogon zur Booleschen und Euler-Maclaurinschen Summenformel existiert.

25 – 10 – 57 H. Bilharz

24.10.61. Über die Integraldarstellungen regulärer Funktionen im Raum von n komplexen Veränderlichen

Variable und Differentiale mögen zu Vektoren zusammengefaßt werden: $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$, $d\zeta = \begin{pmatrix} d\zeta_1 \\ \vdots \\ d\zeta_n \end{pmatrix}$. In einem Gebiet D im Raum $R^{2n}(z_1,\dots,z_n)$ seien m reguläre Funktionen $X_i(z)$, $i = 1,2,\dots,m$ gegeben. Jedes der X_i sei in der X_i-Ebene auf ein abgeschlossenes Gebiet D_i mit stückweise analytischem Rand C_i beschränkt. Die Punktmenge im z-Raum, die den Beziehungen $X_i(z) \in X_i$, $i = 1,2,\dots,m$ genügt, möge ein kompaktes Gebiet Δ in D gehören. Sodann seien $\sigma_i = \Delta \cap (X_i \in C_i)$ die zu Δ gehörenden Randhyperflächen. Δ sei orientiert und die Orientierung der σ_i sei durch Δ induziert. Ferner seien $\sigma_{i_1 \dots i_k} = \sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_k}$ die orientierten $(2n-k)$-dimensionalen Kanten von Δ; ihre Orientierung sei durch die Reihenfolge der σ_{i_ν} festgelegt, und zwei Kanten mit gleichen, aber permutierten Indizes mögen sich durch das Vorzeichen der Permutation unterscheiden. Für die Funktionen X_i gilt die Darstellung

$$X_i(z) - X_i(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - \zeta_\nu) P_{i\nu}(z,\zeta), \quad i = 1,2,\dots,m.$$

Setzen wir $\mathfrak{P}_i = \begin{pmatrix} P_{i1} \\ \vdots \\ P_{in} \end{pmatrix}$ und $q_i = \dfrac{\mathfrak{P}_i}{X_i(z) - X_i(\zeta)}$, so lautet die Integralformel von A. Weil

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 < \dots < i_n} \int_{\sigma_{i_1 \dots i_n}} f(\zeta) \cdot D(q_{i_1} \dots q_{i_n})\, d\zeta_1 \dots d\zeta_n,$$

wobei über alle n-dimensionalen analytischen Kanten integriert wird. Mittels der Determinantenidentität

$$D(\eta_{j_1}\cdots\eta_{j_{n-k}}\, d\bar\zeta^*\, d\bar\zeta\ldots d\bar\zeta) = \sum_{s=1}^{n-k}(-1)^{s+n-k} D(\eta_{j_1}\ldots[\eta_{j_s}]\ldots\eta_{j_{n-k}}, \frac{\bar\zeta-\bar z}{N^{k+1}}, d\bar\zeta,\ldots, d\bar\zeta),$$

[dabei sei $d\bar\zeta^* = \frac{d\bar\zeta}{N^k} - \frac{k(\zeta - z, d\bar\zeta)}{N^{k+1}}(\bar\zeta-\bar z)$, $N = \sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha - z_\alpha)(\bar\zeta_\alpha - \bar z_\alpha)$]

läßt sich das Weilsche Integral umformen in die Serie der Integrale

$$f(z) = \frac{(-1)^{\frac{k(2n-k-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\sum_{j_1<\cdots<j_{n-k}}\int_{\sigma_{j_1\ldots j_{n-k}}} f(\zeta)\, D(\eta_{j_1}\cdots\eta_{j_{n-k}}\, d\bar\zeta^*\, d\bar\zeta\ldots d\bar\zeta)\, d\zeta_1\ldots d\zeta_n .$$

Setzt man $k=n-1$, so folgt unter Verwendung der obigen Identität die Martinellische Integralformel in der Gestalt

$$f(z) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\int_\sigma f(\zeta)\, D\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{N^n}, d\bar\zeta,\ldots, d\bar\zeta\right) d\zeta_1\ldots d\zeta_n .$$

Damit ist die Martinellische Formel auf die Weilsche zurückgeführt und gleichzeitig eine Serie von Zwischenformeln gewonnen, die jeweils über die $(2n-k)$-dimensionalen Kanten von Δ zu erstrecken sind.

F. Sommer

Flächenbau u. Werteverteilung einiger Funktionen, die aus dem harmonischen Maß entspringen.

Gegenstand der Untersuchung ist die inverse Funktion des durch die konjugierte Funktion ergänzten harmonischen Maßes. Im einfachsten Fall (das Bezugsgebiet ist eine Halbebene) handelt es sich um periodische Algebroiden, deren Defektsumme die Defektschranke erreicht. Bei einigen anderen einfach-zusammenhängenden Gebieten (Ellipse, Rechteck) erhält man unendlich vieldeutige Funktionen, die aber (wie die Algebroiden) im Endlichen bis auf algebraische Windungspunkte regulär sind u. deren Werteverteilung zu derjenigen der Algebroiden in gewisser Hinsicht analog ist.

P. Seibert

Kontraktion der Regularitätshüllen von „Tuben" und „Halbtuben".

1. Jedes Gebiet $\mathfrak{G}$ im R_{2n} besitzt eine Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$. Über die explizite Gestalt ist im allgemeinen wenig bekannt. Für spezielle Gebietsklassen läßt sich $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ angeben. 1.) Ein Gebiet T im R_{2n} heißt Tube (engl. „tube"), falls $T = \{(x_1,\ldots,x_n)\in B, |y_j|<\infty$ für $j=1\ldots n\}$ ($z_j = x_j+iy_j$, B ein Gebiet in der $x_1\ldots x_n$-Hyperebene). Satz: Die Regularitätshülle einer Tube T ist die elementargeometrisch konvexe Hülle von T. Zuerst beweisen wir in einigen einfachen Spezialfällen

von K. Stein. Mit Hilfe des folgenden Kontinuitätssatzes läßt sich ein einfacher Beweis führen. Im Gegensatz zum gewöhnlichen Kontinuitätssatz (Hartogs-Kneser, Behnke-Sommer) handelt es sich bei diesem um kontinuierliche Approximation einer Grenzfläche: $f(w,z)$ sei für $t > t_0$ in den Gebieten $\mathfrak{V}(t) \subset \mathfrak{E}(t) = \{aw+bz+c(t)\}$ regulär. $\mathfrak{V}(t)$ konvergiere stetig gegen $\mathfrak{V}(t_0) \subset \mathfrak{E}(t_0)$. Ist $f(w,z)$ dann in einem Punkte von $\mathfrak{V}(t_0)$ regulär, so in allen. (Dieser Kont.satz folgt aus einem Hilfssatz über subharmonische Funktionen). — 2) Ein Gebiet $\mathfrak{T}$ im R_4 heißt „Halbtube", falls $\mathfrak{T} = \{z_1, x_2 \in \mathfrak{G}, |y_2| < \infty\}$. Dabei ist $\mathfrak{G}$, die „Basis" ein beliebiges Gebiet im (z_1, x_2) Raum (dem direkten Produkt der z_1 Ebene mit der reellen x_2-Achse). Mit Hilfe des obigen Kont.satzes wird gezeigt, daß sich jede in $\mathfrak{T}$ reguläre Funktion in eine (verallgemeinerte) Halbtube $\mathfrak{T}^*$ der Gestalt $\mathfrak{T}^* = \{P_1 \in \mathfrak{O}, \varphi_1(P_1) < x_2 < \varphi_2(P_1), |y_2| < \infty\}$ fortsetzen läßt. Dabei ist $\mathfrak{O}$ eine offene Riem. Fläche ohne Verzweigungspunkte im Innern über der z_1-Ebene, P_1 (laufende) Punkte in $\mathfrak{O}$ und $\varphi_1(P_1)$ u. $\varphi_2(P_1)$ sind in $\mathfrak{O}$ eindeutige reelle Funktionen. Dieser Schritt der Hüllenbildung ist konstruktiv. Die Regularitätshülle von $\mathfrak{T}^*$ schließlich ist $\mathfrak{T}^{**} = \{P_1 \in \mathfrak{O}, \phi_1(P_1) < x_2 < \phi_2(P_1)\}$, wo $\phi_1(P_1)$ die größte subharmonische Minorante von φ_1 ist und ϕ_2 die kleinste superharmonische Majorante von φ_2. Der Beweis dieser letzten Aussage erfordert größere Hilfsmittel.

H. J. Bremermann

Natürliche Gleichungen einer Hyperfläche

26.3.52

Es wird der Begriff der natürlichen Gleichungen einer ebenen Kurve auf Hyperflächen ausgedehnt und der folgende Satz bewiesen:

„Ist Γ ein analytischer Streifen $\{\mathfrak{r}(r^\ell), \mathfrak{n}(r^\ell)\}$ und $f(p^\alpha)$ eine analytische Funktion, so gibt es in der Umgebung von $p^\alpha = 0$ im allgemeinen eine und nur eine Hyperfläche $\mathfrak{x}(p^\alpha)$, welche folgenden Bedingungen genügt: $(1 \le \alpha \le n)$ 2.

a) $\mathfrak{x}(p^\alpha)$ ist in $p^\alpha = 0$ analytisch

b) $\{p^\alpha\}$ sind geodätische Parallelkoordinaten auf der Fläche

c) $\dfrac{a_1 D_1(p^\alpha) + \dots + a_n D_n(p^\alpha)}{b_1 D_1(p^\alpha) + \dots + b_n D_n(p^\alpha)} = f(p^\alpha)$ (a_i u. b_i = const. die D_i sind die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen der Hyperfläche)

d) die Hyperfläche geht für $p^\ell = r^\ell$; $p^n = 0$ durch Γ $(1 \le \ell \le n-1)$."

Der Beweis dieses Satzes wird durch Zurückführung auf den BONNET-schen Satz über die Bestimmung einer Hyperfläche durch ihre erste und zweite

Grundform erbracht. Es läßt sich nämlich das sich für die Koeffizienten dieser Grundformen ergebende System partieller Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung nach dem Satz von S. KOWALEWSKI eindeutig und in analytischer Weise auflösen. Nach einigen Folgerungen und Ergänzungen dieses Satzes werden anschließend noch abschließende Resultate über natürliche Gleichungen einer Fläche ($n=2$) referiert.

K. Leichtweiß

26. 3. 52

Zur Integralgeometrie.

Die für Polyeder bekannten kinematischen Hauptformeln

1) $\int V_{01}\, dg_1 = 8\pi^2 V_0 V_1$, 2) $\int A_{01}\, dg_1 = 8\pi^2 (V_0 A_1 + A_0 V_1)$.

3) $\int M_{01}\, dg_1 = 8\pi^2 (M_0 V_1 + \frac{\pi}{2} A_0 A_1 + V_0 M_1)$, 4) $\int C_{01}\, dg_1 = 8\pi^2 (V_0 C_1 + M_0 A_1 + A_0 M_1 + C_0 V_1)$

wurden bewiesen für Gebiete, die von stetig gekrümmten Flächen begrenzt sind. Dabei sind V_0, A_0, M_0, C_0 Volumen, Oberfläche, Integral der mittl. Krümmung, Integral der Gaußschen Krümmung für das feste Gebiet G_0. Entsprechende sind V_1, A_1, M_1, C_1 für das bewegte Gebiet G_1 erklärt, dessen kinematische Dichte dg_1 ist. $V_{01}, A_{01}, M_{01}, C_{01}$ beziehen sich auf den Durchschnitt. Für die Schnittkurve ist bei M_{01} das Linienintegral des halben „Kantenwinkels", bei C_{01} auf beiden Flächen das L.-Integral der geodätischen Krümmung mitzurechnen.

H. Barthel.

Zur projektiven Kinematik in binären Gebilden.

Zwei Doppelverhältnisscharen auf einer von rationalen Kurven erzeugten Fläche definieren eine „projektive Bewegung" eines binären Gebildes in sich. Analytisch stellt sich die zweite Doppelverhältnisschar bezogen auf die erste durch eine RICCATI'sche Differentialgleichung dar.

Deutet man das binäre Gebiet als die Punkte eines Kegelschnittes einer Hilfsebene (HESSE'sches Korrespondenzprinzip), so führt die Bewegung des Kegelschnittes in sich auf die hyperbolische Kinematik in der Hilfsebene. Man gewinnt damit so eine geometrische Interpretation der betrachteten Figuren Doppelverhältnisscharen – oft wird solche invariant mit der einparametrigen Schar rationaler Kurven verbunden, wie z. B. auf einer Regelfläche die Asymptotenkurven und die Projektivkurven. Für diesen Fall wurde das „hyperbolische Bild" von G. BOL in der Theorie der Regelflächen schon angegeben und zur Erzielung geometrischer Aussagen ausgenützt. – Allgemein gelangt man so zur Deutung der invarianten RICCATI'schen Differentialgleichung.

26. 3. 1952.

Martin Barner

Über den Satz von M. REISS.

Schneidet man eine ebene algebraische C_n mit einer Geraden G und sind $1:R_i$ die Krümmungen in den Schnittpunkten und τ_i die Schnittwinkel, so ist nach Reiss 1837

$$\sum \frac{1}{R_i \sin^3 \tau_i} = 0. \qquad (1)$$

S. Lie hat 1882 angegeben, daß man die algebraischen Kurven durch diese Beziehung kennzeichnen kann und F. Engel hat (Deutsche Math 4, 1939) Beweise dazu gegeben. Sind x_i, y_i die Schnittpunkte der C_n mit G ~~so fol~~ ... $y = tx + b$, und sind die

$$S_i = \sum x_i^n, \qquad (2)$$

so findet man aus (1) nach J. Teixidor 1952

$$\frac{d^2}{db^2} S_1 + \frac{t}{1} \frac{d^3}{db^3} S_2 + \frac{t^2}{2} \frac{d^4}{db^4} S_3 + \dots = 0 \qquad (3)$$

für alle t. Somit ist S_k ein Polynom k-ten Grades in y. Dann folgert man mittels Newtons Formeln*), daß auch die symmetrischen Grundfunktionen der x_i Polynome Y_k k-ten Grades sind. Daraus folgt

$$x^n + Y_1 x^{n-1} + \dots + Y_n = 0, \qquad (4)$$

w. z. b. w.

26/3/52 W. BLASCHKE

vgl. auch B. SEGRE, Annali di mat. 1947 (?)

Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform.

Mit Hilfe der HERGLOTZ-schen Integralformel:

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{S} P\,do = -2 \iint \{H - H^*\} do - \oint A^{ik} n_k (\ldots) ds$$

wurden einige Sätze über Kongruenz isometrischer Flächenstücke mit Rändern (die gewisse Eigenschaften haben) bewiesen. In der vorstehenden

---

*) $S_1 + Y_1 = 0,\ S_2 + Y_1 S_1 + 2 Y_2 = 0,\ S_3 + Y_1 S_2 + Y_2 S_1 + 3 Y_3 = 0, \ldots$

Integralformel ist A_{ik} die Differenz der beiden Haupttensoren der beiden isometrischen Flächen. Weiter ist $\underline{A}^{ik} = \varepsilon^{i\lambda}\varepsilon^{k\rho}A_{\lambda\rho}$ und ε^{ik} ist der sog. Diskriminantentensor der Flächen. n_k heißt intrinseker Normalenvektor: $n_k = \varepsilon_{\ell k}\dot{u}^{\ell}$

Es sind z.B. zwei isometrisch aufeinander abgebildete Flächen mit Rändern, die in inneren Flächenpunkten positive GAUSS-sche Krümmung haben, kongruent oder symmetrisch, wenn die Randstreifen kongruent oder symmetrisch sind.
Aber auch isometrische Flächen sind kongruent oder symmetrisch, wenn die Randstreifen gewissen schwächeren Forderungen genügen als der Kongruenz. Fordern wir nur (bei $\{K > 0\}$ in inneren Punkten)
$a = 0$; $c = 0$; oder $a = 0$; $b = \text{const}$ längs den Rändern, so folgt wieder die Identität der Flächenstücke modulo der orthogonalen Gruppe. ($a = B_{ik}\dot{u}^i n^k$ = geod. Torsion und $b = -B_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k$ = Normalkrümmung des Streifens)
Neben dem HERGLOTZ-schen Integralsatz wurde noch der folgende „vektorielle" Integralsatz benutzt:

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,\xi\,dO = -\oint \underline{A}^{ik}\, n_i\, \mathfrak{x}_k\,ds .$$

27. III. 52 K.P. Grotemeyer (Göttingen)

Eine Bemerkung über die Flächen mit fester mittlerer Krümmung.

Ist wieder $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor und ξ der Normalenvektor eines Flächenstückes fester mittlerer Krümmung, so gilt die Formel:

$$\iint \{H^2 - K\}(\mathfrak{x}\xi)\,dO = \frac{1}{2}\oint [\xi\mathfrak{x}]\cdot\{H\dot{\mathfrak{x}} + \dot{\xi}\}\,ds$$

Nun ist $H^2 - K$ stets ≥ 0. Da man für Flächen vom Geschlecht Null, die festes H haben, $(\mathfrak{x}\xi) \geq 0$ nachweisen kann, hat man einen einfachen Beweis des Satzes, daß unter allen geschlossenen Flächen mit $H = \text{const}$ die Kugeln die einzigen sind. Ferner ergibt sich der Satz, daß in einem Gebiet, welches von einer sphärischen Kurve auf einer Fläche mit $H = \text{const}$ berandet wird, nur Nabelpunkte liegen. Die Methode läßt sich auch in die affine Flächentheorie übertragen.

27. III. 52 K.P. Grotemeyer (Göttingen)

27.3.52. Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$.

In einem n-dimensionalen Finslerraum mit der Metrik $ds = F(x^i, \dot{x}^i)\,dt$ sei in der Bezeichnung nach E. CARTAN $g_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k}$, $A_{ikl} = \frac{1}{2} F \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^l}$. Es wird gezeigt, daß bei den speziellen Finslerschen Räumen mit $A_i = A_{ik}{}^{k} \equiv 0$ die Indikatrix $F=1$ der Maßbestimmung in jedem Punkt eine Affinsphäre ist. Nach einem Satz der affinen Differentialgeom. (W. BLASCHKE, Diff. Geom. II, §74), der auf n Dimensionen verallgemeinert wird, sind die einzigen affinsphärischen Eiflächen die Ellipsoide. Es läßt sich weiter zeigen, daß jede geschlossene Affinsphäre konvex ist, also ein Ellipsoid. Folglich sind die in der Literatur öfters erwähnten speziellen FINSLER-Räume mit $A_i \equiv 0$ mit den Riemannschen Räumen identisch, falls man die Indikatrix als geschlossen voraussetzt ($F > 0$ für jede Richtung).

Arno Deicke

28.3.52.

Es wurde der Satz bewiesen, daß die [illegible] die einzige ebene Verzerrung ist, welche gegenüber Änderung des Augenabstands unempfindlich (innerhalb eines gewissen Bereiches) ist.

Beier.

28.3.52 Singularitätenkurven auf Flächen, deren Asymptotenlinien zu einem Stern linearer Komplexe gehören.

Man fasst die Komplexflächen als projektive Schiebflächen auf. In einer zu einer Komplexfläche gehörigen projektiven Bewegung gehörigen gibt es immer auch Komplexflächen mit einfachen und doppelten Singularitätenkurven; man kann diese eingesetzt und als Bahnkurve einer Komplexkurve bis zur Anzahl vier vorschreiben. Die Komplexflächen mit einer vierfachen Singularitätenkurve sind für die Kurventheorie wichtig, es gilt: zu einer Raumkurve gibt es eine eindeutig bestimmte Komplexfläche mit ~~der~~ Raumkurve als vierfachen Singularitätenkurve. Die zugehörige Komplexkurve hat die gleichen Invarianten a und c der BOL'schen Theorie ($b = 0$ kennzeichnet die Komplexkurven). (vgl. 7.8.51.).

Martin Barner

28.3.52 Mit der Hilfe eines halbinvarianten Kalküls für alternierende Formen (vgl. 26.11.50) werden Formeln angegeben zur Behandlung der Figur zweier verschränkter Kongruenzen (T-Figur nach S. FINIKOFF) und der Satz bewiesen: Zu 3 paarweise nach BIANCHI vertauschbaren Kongruenztransformierten einer Fläche gibt es immer eine gemeinsame Kongruenztransformierte 3ter Ordnung. Man hat dann ein von 2 Parametern abhängiges
Möbiussches Tetraederpaar, bei dem jede Ecke eine 10.
Fläche beschreibt, die von der hindurchgehenden Ebene des anderen Tetraeders berührt wird. Verallgemeinerung auf die Konfiguration $(2^n)_{n+1}$.

L. BIANCHI, Rend. Circ. Mat. Palermo 25 (1908) 291–325

S. FINIKOFF, Annali Pisa 61 2, 59–88

G. Bol

8.4.52. Funktionalgleichungen in Booleschen Algebren.

Eine Boolesche Algebra ist bekanntlich ein komplementärer distributiver Verband bzg. $\cdot$ (join), $\cup$ (meet); x' = Komplement von x, ein Ring B bzg. $+$ $a+b = ab' \cup a'b$. Jede Boolesche Funktion hat die Gestalt

$$f(x) = ax \cup bx' = ax + bx' = cx + b \qquad (c = a+b).$$

Durch geschickte Verwendung der verfügbaren Formen läßt sich die Behandlung bekannter Fragen vereinfachen und ergänzen. Es wurden besprochen:

1) die Distanzfunktion $x+y$ und die durch ihre Invarianz, d.h. $f(x) + f(y) = x+y$ definierten Bewegungen. (Vgl. Ellis, Canadian Journ. 3, 1951, 87–93; 145–147.)

2) die Homomorphiebedingungen

(I) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$

(II) $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$

(III) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(I) und (II) führen auf $f(0) = b \subseteq a = f(1)$ und auf die

Monotonie $f(x) \leq f(y)$ wenn $x \leq y$, (III) auf $b=0$, also $f(x) = c\infty$.
(Vgl. McKinsey Transact. Am. Math. Soc. 40, 1936, 343 - 362.)

3) Auswahl eines Repräsentanten aus jeder Restklasse von B/n (n: Ideal), sodass mit den Repräsentanten an Stelle der Restklassen gerechnet werden kann. Die von v. Neumann und Stone Fund. Math. 25, 1935, 353 - 378 angegebene hinreichende Bedingung, dass n Hauptideal ist, erweist sich im Falle Boolescher Funktionen als notwendig.

H. Gericke.

10. 4. 52 In der Spieltheorie (J. v. Neumann - O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior (1942)) beruht der einfachere Teil, die Theorie der ausgeglichenen Zwei-Personen-Spiele (zero-sum-two-person games) auf zwei Sätzen. Setzt man

$$A = \sup_{x \in K} \inf_{y \in L} f(x,y), \quad B = \inf_{y \in L} \sup_{x \in K} f(x,y),$$

so gilt der elementare Satz

$$\text{I.} \quad A \leqq B$$

bei ganz beliebigen Veränderlichkeitsbereichen K für x und L für y und beliebigen (reellen) Funktionen $f(x,y)$. Die notwendige Ergänzung

$$\text{II.} \quad A = B$$

wurde 1928 von J. v. Neumann aufgestellt und bewiesen für den Fall, der den Spielen mit endlich vielen (reinen) „Strategien" (d.h. Entschlussmöglichkeiten für die beiden Spieler) entspricht, nämlich den Fall, daß

1. K das Einheitssimplex ($x_\mu \geq 0$, $\sum x_\mu = 1$) des $(x_1, \cdots, x_m)$-Raumes und L das Einheitssimplex des $(y_1, \cdots, y_n)$-Raumes ist,
und 2. $f(x,y) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$ ist.

Bei Spielen mit (abzählbar-, kontinuum- oder sonstwie) unendlich vielen reinen Strategien gilt II. nicht allgemein; Voraussetzungen, unter denen II. gilt, sind von J. Ville, A. Wald, S. Karlin (s. u.a. „Contributions to the theory of games, Princeton 195) angegeben worden. Es wird ein Beweis von II. vorgetragen, der auch in dem einfachen Fall der Voraussetzungen 1. und 2. als natürlich erscheint (jedenfalls dem Vortragenden), zugleich aber unter den folgenden Voraussetzungen gilt:

1.' K und L sind konvexe Mengen in irgendwelchen Vektorräumen (über dem Körper der reellen Zahlen);

2.' $f(x,y)$ ist bilinear, d.h. $f(\rho x+\sigma x', y) = \rho f(x,y)+\sigma f(x',y)$, $f(x, \rho y+\sigma y') = \rho f(x,y)+\sigma f(x,y')$ gilt für $x\in K$, $x'\in K$ (und daher $\rho x+\sigma x'\in K$), $y\in L$, $y'\in L$ (also $\rho y+\sigma y'\in L$); $\rho\geq 0, \sigma\geq 0, \rho+\sigma=1$,

3.' K trägt eine Topologie, in der alle Funktionen $f(x,y)$ (bei festem $y\in L$) stetig sind, und ist <u>kompakt</u> bezüglich dieser Topologie.

Ein Teil der früheren Ergebnisse ist hierin enthalten; bei den andren ist es noch nicht festgestellt.

H. Kneser.

11. 4. 52. Groupes abéliens à torsion — Soit G un groupe abélien ayant un **anneau** d'opérateurs R vérifiant les conditions: 1) $R \supset 1$ et $1u=u$, $u\in G$ 2) R est commutatif 3) Tout idéal de R est principal 4) Tout élément $u\in G$ a un annulateur de la forme (p^n), où p est un élément premier fixe de R et où n dépend de u.

Soit R' l'anneau des endomorphismes de R ($\theta\in R'$ si $\theta(u+v)=\theta u+\theta v$, $\theta a u = a\theta u$ $a\in R, u\in G$). Soit S le groupe additif des applications de G dans G; on peut munir S de la structure uniforme de la convergence simple qui est définie par le système fondamental de voisinages de 0 (0 = application nulle : $0u=0$ $u\in G$):

$$W_{u_1\dots u_n} = \{\sigma\in S \mid \sigma u_1=0, \dots \sigma u_n=0\}$$

R' est fermé dans S et si on désigne par $\overline{R}$ la fermeture de R on a $R\subset\overline{R}\subset R'$

<u>Théorème.</u> $\overline{R}=R'$ est équivalent à « G est du type p^n ou du type p^∞ »

(G est du type p^n si $G\cong R/p^n$ et G est du type p^∞ si $G=\bigcup_n G_n$ où $G_n\cong R/p^n$ et $p\,G_{n+1}=G_n$)

Démonstration. 1) R et $\overline{R}$ laissent invariant les <u>mêmes</u> sous-groupe de G 2) Soit $P=\{u\in G \mid pu=0\}$

l'annulateur de P est (p) ce qui permet de considérer P comme espace vectoriel sur $R/(p)$. On a $\mathrm{Dim}\, P = 1 \rightleftarrows$ G est du type p^n ou du type p^∞. 3) Si $\mathrm{Dim}\, P > 1$ on peut trouver $\theta \in R'$ qui ne laisse pas invariant un sous-groupe de G invariant pour R, donc $\theta \notin \bar{R}$.

B. Charles

22.4.52. Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Es wird eine Begründung des W-Begriffs und der bisher für die W.-Rechnung grundlegenden Sätze (Add.- u. Mult.-satz) angegeben, die [illegible] frei von dem Problem der subjektiven Wahrscheinlichkeit ist und die sich aus einer Analyse der physikalischen Experimente ergibt. Durch kritischen Vergleich der bestehenden Theorien wird die These abgeleitet, daß jede W-Theorie eine implizite unerfüllbare Annahme über zwei Grundbegriffe [illegible]: Begriff der Freiheit der Wiederholung eines Versuches und Begriff der physikalischen Abgeschlossenheit. Mit W. Aussage werden die (ausführbaren) Versuche die physikalischen Vorschriften. Anstelle der W wird dabei zunächst eine Belegung durch ein System von Erwartungskoeffizienten EK axiomatisiert, bei dem Additions- und Multiplikationssätze durch zwei unbekannte Funktionen f und φ mit nicht voll definierten abgeschwächten Definitionsbereichen ($\overline{W}$ ... $\overline{Z}$) ersetzt sind. Außer der Stetigkeit wird bei f noch eine Monotonie am Rande und bei φ die Nullteilerfreiheit vorausgesetzt. Die W-Rechnung wird damit zu einem Spezialfall der angegebenen EK-Rechnung.
Es läßt sich ferner zeigen (was im Vortrag nicht ausgeführt wurde), daß man jedes System von EK eineindeutig in ein anderes EK-System transformieren kann, bei dem f und φ resp. die Addition und die Multiplikation vermitteln und bei dem die Menge aller vorkommenden EK-Werte dicht in $[0,1]$ liegt. Damit erscheint die in der W.-Rechnung übliche Wahl für f und φ als begründet.

H. Richter.

31.5.52 Die Lehre vom Urteilsquadrat und von den „unmittelbaren Schlüssen" im Lichte der Identitäts- und Widerspruchsstruktur der kategorischen Urteile.

Die folgende Symbolik gibt die in den vier Arten des kategorischen Urteils ausgedrückten Identitäts- und Widerspruchsverhältnisse wieder. / oder \ zwischen zwei Buchstaben, die ihrerseits Seinheiten, also Begriffe im weitesten Sinne des Wortes bezeichnen, bedeutet Identität, die durch Verschiedenheit in der Weise ergänzt sein kann, dass im unten stehenden Begriff noch etwas mitgemeint sein darf, was im oberen es nicht ist. ⟷ zwischen zwei Buchstaben bedeutet Verschiedenheit im stärkeren Sinne, d.h. jeder der Begriffe meint etwas im Anderen nicht Mitgemeintes. (!), (") oder ein ähnliches Zeichen am unteren Ende mindestens eines Identitätsstriches bedeutet ein Merkmal, auf das hingewiesen wird, ohne dass es genau bekannt und benannt wird. In dieser Schreibweise verlangen die Urteile folgende „Begriffslagen“:

„Alle S sind P“: $\begin{array}{cc} & P \\ / & \\ S & \end{array}$ „Alle S sind nicht P“: $S \longleftrightarrow P$

„Einige S sind P“: $\begin{array}{ccc} S & & P \\ \backslash & & / \\ & (!) & \end{array}$ „Einige S sind nicht P“: $\begin{array}{cc} S & \\ \backslash & \\ & (!) \longleftrightarrow P \end{array}$

Das „dictum de omni et nullo“ zerfällt in folgende symbolische Regeln:

1) Statt $\begin{array}{ccc} & & C \\ & B & / \\ / & & \\ A & & \end{array}$ darf $\begin{array}{cc} & C \\ / & \\ A & \end{array}$ geschrieben werden

2) Statt $\begin{array}{cc} & B \longleftrightarrow C \\ / & \\ A & \end{array}$ darf $A \longleftrightarrow C$ geschrieben werden.

Mit diesen Schreibungen und Regeln kann das System der Syllogismen übersichtlich hergeleitet werden (siehe Philos. f. phil. Forschg. IV S. 235 ff).

Unter Benutzung eines Zeichens für Identität mit gefordertem Widerspruch der Art zur Gattung $\begin{array}{cc} & B \\ \swarrow & \\ A & \end{array}$ (A ist <u>echte</u> Unterart von B) wird ein Beweis für die in der klassischen Logik gelehrten Verhältnisse der kategorischen Urteile im „Unterlogquadrat“ geführt, der nur die in den Urteilen angesetzten Identitäts- und Widerspruchsverhältnisse benutzt.

Das System aller „unmittelbaren“ Schlüsse aus kategorischen Urteilen, welche die klassische Logik lehrt, wird übersehbar, wenn man obige Schemata der Urteile durch Hinzufügung der Negatbegriffe von S und P erweitert und die Negateigenschaft durch eine weitere Operationsregel benutzt, welche dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten entspricht. Führt man noch eine weitere Operationsregel ein, die eine spezielle Form des Satzes der Identität ist, so wird, über die im Zeichen (!) liegende Fortlassungsregel, auch die conversio per accidens möglich, und sie gestattet, ein einziges Schema allen „unmittelbaren“ Schlüssen zugrundezulegen. Zugleich wird klar, dass alle diese Schlüsse – bis auf die in der Symbolik selbst aufgenommene conversio simplex. — Enthymeme besonderer Art sind: solche, wo denen eines der Grundprinzipien der Logik als verschwiegene jeweils Prämisse benützt wird. Sie sind also keineswegs „unmittelbar". Und die Symbolik zeigt, welches Prinzip jeweils mitgespielt hat.

B. Baron v. Freytag Löringhoff.

1. VI. 52. Das Polygonmass in der elementaren axiomatischen Planimetrie.

Von Hilbert wurde darauf hingewiesen, dass der Grössencharakter der Polygonflächen in der Planimetrie nicht selbstverständlich ist. Insbesondere hat er ein Modell der Planimetrie aufgestellt, in welchem ein echtes Teilrechteck eines Rechtecks diesem ergänzungsgleich ist. Freilich ist dieses Modell in zweifacher Hinsicht anormal: 1. das System der Strecken ist nicht-archimedisch (auch das der Winkel), 2. das Dreiecks-Kongruenzaxiom gilt nur für gleichsinnig zugeordnete Dreiecke.

Hieran wird die Frage geknüpft, welchen Effekt die axiomatische Einführung der Annahme hat, dass die Polygoninhalte ein (nicht notwendig archimedisches) Grössensystem bilden, derart dass gleichsinnig kongruenten Dreiecken die gleiche Grösse zukommt und dass bei der Zusammensetzung der Polygone sich die ihnen zukommenden Grössen addieren. F (müsste r.)

2. 6. 52. Die Explikation der Implikation.

Für einen beliebigen Kalkül $\mathfrak{K}$ (Aussagen $p, q, \dots$) wird eine Regel R $p_1 \wedge \dots \wedge p_n \to p$ "ableitbar" genannt, wenn p ableitbar nach $\mathfrak{K}$ ist bei Hinzufügung von $p_1, \dots, p_n$ als Axiomen zu $\mathfrak{K}$. Eine Regel 2. Stufe $R_1 \wedge \dots \wedge R_m \to R$ heißt "Konsequenz" von $\mathfrak{K}$, wenn R ableitbar nach $\mathfrak{K}$ ist bei Hinzufügung von $R_1, \dots, R_n$ als Regeln zu $\mathfrak{K}$. Die Konsequenzen von $\mathfrak{K}$ bilden einen Kalkül, dessen Konsequenzen betrachtet werden können. Beliebige Iterationen dieses Prozesses führt auf ~~alten~~ einen freien implikativen Halbverband. Ist A entscheidbar, so entsteht durch Hinzunahme von "eliminierbaren" Regeln ein Boolescher Verband.

P. Lorenzen.

[Es wird gezeigt, dass bei Hinzufügung dieser Annahme zu einem Axiomensystem, in welchem das Dreiecks-Kongruenzaxiom nur für gleichsinnig bezogene Dreiecke aufgestellt ist, der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck beweisbar wird. Bei der Beweisführung spielt der Satz vom Gnomon eine erhebliche Rolle.

P. Bernays

3.6.52 Es wird auf die Bedeutung des Schliessungssatzes (A) hingewiesen, der in der Hilbertschen Streckenrechnung über eine affine Ebene das algebraische Äquivalent des multiplikativen Assoziativgesetzes ist. Es gilt: (1) (A) folgt nicht aus ~~den Schliessungssätzen, die~~ den übrigen Schliessungssätzen, die einem Schiefkörperaxiom entsprechen. (2) (A) ist äquivalent zum Satz von Desargues (D). (3) (A) folgt aus dem Satz von Pappus-Pascal (P) durch dreimalige Anwendung von (P) zwischen festen Trägergeraden. (4) (A) ist äquivalent zur Konfiguration $(16_3, 12_4)$, die man durch ebenen Schnitt der räumlichen Reye-Konfiguration erhält.

Wegen (2) kann man die affine Ebene über Schiefkörpern auch durch den Satz (A) kennzeichnen, der dem multiplikativen Assoziativgesetz entspricht, ebenso wie dies für die affine Ebene über Körpern durch den Satz (P) möglich ist, der dem multiplikativen Kommutativgesetz entspricht. Aus (2) und (3) ergibt sich ein neuer Beweis des Hessenbergschen Satzes, dass (D) aus (P) folgt. Dabei gestattet der Schluss von (P) auf den zu (D) äquivalenten Satz (A) eine unmittelbare algebraische Interpretation. Die Dualisierung der Beziehung (2) und geeignete affine Spezialisierungen liefern weitere Figuren, die äquivalent sind zu (D).

W. Klingenberg

3. Juni 52. Genetisch-konstruktive Grundlegung des Fundamentalsystems der projektiven Geometrie: Das Referat nimmt das Thema vom 29.9.49 mit veränderten Methoden auf. Ziel ist, ein Satzsystem aufzustellen, das die Aufgaben eines Axiomensystems erfüllen kann. Ohne Anleihen bei der Anschauung und ~~anderen~~ irgendwelchen math. Disziplinen, aber mit Hilfe von logischen Mitteln wird Satz für Satz in Kraft gesetzt.

Grundbegriffe sind: Gedankendinge (Element) und Beziehung zwischen Gedankendingen (hier: zweistellige, symmetrische Verknüpfung). Es werden „Benennungsaussagen", „Verknüpfungsaussagen" und „Existenzaussagen" inhaltlich erklärt. Als treibende Kraft für die Aufstellung des Fundamentalsystems wird die Leitforderung aufgestellt. Dazu wird zunächst unterschieden, ob Wahrheitswert einer Aussage „zeitabhängig" oder „beständig" beigelegt werden kann. Die Leitforderung verlangt, nur solche Aussagen in dem aufzubauenden System zuzulassen, die beständige Wahrheitswerte haben. Zur Festlegung der Lösung der damit gestellten Aufgabe werden formuliert: 1.) Die absoluten Ex.forderungen 2.) Das Prinzip, die Lösung durch allgemeine Sätze über Element durchzuführen 3.) Das Optimalprinzip, welches eine durch eine Maximaleigenschaft ausgezeichnete Lösung verlangt. Dazu ist eine ~~Gliederung~~ Rangordnung der Ex.aussagen notwendig, die nach den Begriffen „knüpfig" und „zählig" gegeben wird.

In der rangmäßigen Reihenfolge werden die Exaussagen einzeln daraufhin untersucht, ob bzw. wie ihnen beständige Wahrheitswerte zugeteilt werden können. Um bis zu dem Fundamentalsystem zu kommen, muss man 6-mal

die Überprüfung ansetzen:
1.) mit einer Elementart 2.) mit einer 2. Elt.-art 3.) mit einer 3. Elementart 4.) mit einer verfeinerten Unterteilung 5.) mit Einführung eines zweikürzig-zweizähligen Verbots; man erhält ein System, das in den 3 Elt.-arten symmetrisch ist 6.) Übergang zu dem unsymmetrischen System (Dualität) der Proj. Geometrie.

Das fertige Fundamentalsystem ist widerspruchsfrei, weil es so schrittweise aufgebaut worden ist. Es ~~ist~~ enthält 120 Sätze, aus denen sich ein ~~reduziertes~~ ausgezeichnetes System unabhängiger Sätze ausscheiden läßt. Es ist vollständig, indem das Entwicklungsverfahren aus sich heraus abbricht.

Wenn es als hinreichend nachgewiesen angesehen wird, daß die Entscheidungen für die einzelnen Sätze jeweils die logische Auswahlakten getroffen wird, die stets eine logisch ausgezeichnete Möglichkeit wählen, so kann gesagt werden, daß im Ergebnis das System der proj. Geom. der Verknüpfung dann als ein durch reine logische Eigenschaften ausgezeichnetes System gekennzeichnet worden ist.

H. von Kaven

4 Juni 1952 – Geometrische Bedeutung der Laguerre-Forsyth Kanonische Form einer linearen homogenen Differentialgleichung.

A differential equation of order n represents a set of projectively equivalent curves in S_{n-1}. A choice of a proportionality factor and of a parameter for the coordinates of a point of the curve C amounts to the determination of two curves C_1, C_2 each belonging to the developable surface of the preceding one.

Such determination can be accomplished intrinsecally. A Laplace sequence, closed on both sides on C, each surface of which has equal invariants and a quadratic form of constant curvature, is also determined by C.

Enrico Bompiani

3. Juni 1952. Vollständige Vierecke mit kollinearen Diagonalpunkten.

Vorausgesetzt sei eine projektive Ebene, d.h. eine Menge (Elemente: Punkte) versehen mit einer Menge von Teilmengen (= Geraden), so daß gilt: 1. Zwei verschiedene Punkte liegen in genau einer Geraden; 2. zwei Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam; 3. es gibt vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. ~~Dann gelten die gilt.~~ Gilt dann auch der Satz vom vollständigen Vierseit, so hat jedes vollständige Viereck (Eckpunkte A, B, C, D) kollineare Diagonalpunkte ($AB \cap CD$, $AC \cap BD$, $AD \cap BC$), falls dies für ein vollst. Viereck zutrifft. Macht man durch Herausnahme einer Geraden samt ihrer Punkte die projektive Ebene zu einer affinen und setzt den affinen kleinen Satz von Desargues ( ) voraus, so hat jedes Parallelogramm parallele Diagonalen, falls dies für ein Parallelogramm zutrifft.

G. Pickert.

4. Juni 1952. Ein Axiomensystem der n-dimensionalen analytischen Geometrie:
(verwendet in Tübinger Anfängervorlesungen).

Vorausgesetzt sind die reellen Zahlen. Die können in I – VI, wodurch die affine Geometrie beschrieben wird, ersetzt werden durch die Elemente eines beliebigen Schiefkörpers, der bei Hinzunahme von VII – X (metrische Geometrie) als angeordneter pythagoreischer Körper vorausgesetzt werden muß.

I. Ein Vektor ordnet einem Punkt wieder einen Punkt zu.

II. Zu Punkten A, B gibt es genau einen Vektor, der dem Punkt A den Punkt B zuordnet.

III. Hintereinanderausführung von Vektoren gibt wieder einen Vektor (Addition von Vektoren).

IV. Vektoraddition ist kommutativ.

V. Ist einem Vektor a und einer reellen Zahl r ein Vektor $a \cdot r$ zugeordnet, so daß für alle Vektoren a, b und alle reellen Zahlen r, s die Gleichungen

$$a \cdot 1 = a$$
$$a \cdot (r+s) = a \cdot r + a \cdot s$$
$$a \cdot (rs) = (a \cdot r) \cdot s$$
$$(a+b) \cdot r = a \cdot r + b \cdot r$$

gelten.

[Beschränkt man sich auf die rationalen Zahlen, so genügt es, statt V die Forderung zu ersetzen: Zu jedem Vektor a und jeder natürlichen Zahl k gibt es genau einen Vektor z, der k-mal als Summand gesetzt a ergibt.]

VI. Es gibt Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ so, daß jeder Vektor z auf genau eine Weise in der Form $z = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$ darstellbar ist.

VII. Jedem Vektor a ist eine reelle Zahl $|a|$ als Betrag so zugeordnet, daß $|a| > 0$ für $a \neq 0$ *) und $|a \cdot r| = |a||r|$ gilt.

VIII. Zwischen den Vektoren ist eine Relation $\perp$ mit den folgenden Eigenschaften erklärt: $a \perp b \rightarrow b \perp a$; $a \perp a \rightarrow a = 0$; $a \perp z,\ a \perp y \rightarrow a \perp z + y$; $a \perp z \rightarrow a \perp z \cdot r$.

IX. Zu einem Vektor $a \neq 0$ gibt es ~~n~~ linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_{n-1}$ mit $a \perp a_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$.

X. $|a| = |b|,\ a \cdot r + b \cdot s \perp a \rightarrow b \cdot r + a \cdot s \perp b$

*) Der Nullvektor 0 ist als derjenige Vektor definiert, der einen Summanden (und damit jeden, wie aus I–IV folgt) in sich überführt.

G. [illegible].

4. Juni 1952 Auswahlaxiom und verallgemeinerte Kontinuumshypothese. Bericht über einen Satz von Lindenbaum und Tarski (C.R. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III. 19, 299–330 (1926), S. 314), wonach das Auswahlaxiom aus der verallgemeinerten Kontinuumshypothese folgt. Hinweis auf eine mögliche Verschärfung auf Grund des folgenden Satzes (beweisbar ohne Auswahlaxiom): Ist m eine Mächtigkeit ≥ 5, so ist m^2 nicht grösser-gleich 2^m.

E. Specker

5. Juni 1952. Über die Definition von Ordinalzahlen und Kardinalzahlen in der konstruktiven Mengenlehre.

Im Anschluß an das konstruktive Modell, welches Lorenzen für die Analysis liefert (Math. Z. 54, S. 1–24 (1951)), stellt sich die Frage nach der Existenz eines ebensolchen Modells für die Mengenlehre. Definiert man im Bereich der Sprachschichten endlicher Höhe „relative" Wohlordnungen:

$$\underset{\gamma''}{a} \in \gamma' \leftrightarrow \ 1)\ a \text{ Paarmenge } \in \gamma'$$

[$\in$ soviel wie „darstellbar in"]

$$2)\ \bigwedge_{k_1, k_2} (k_1, k_2) \in a \wedge (k_2, k_1) \in a \rightarrow k_1 = k_2$$

$$3)\ \gamma^{*} \bigwedge_{\substack{n \\ \cap \in n \subset \underline{a}}} \bigvee_{k_0 \in n} \bigwedge_{k \in n} (k_0, k) \in a$$

[k Variable für endliche Kardinalzahlen, n für Mengen von solchen, $\underline{a}$ bedeutet das Feld von a.]

dann ergeben sich bereits viele der bekannten Sätze über Unterwohlordnungen und Abschnitte. Solange man kein Modell für Ordinalzahlen $\geq \omega_1$ anstrebt, können die relativen Wohlordnungen $a \underset{S_\omega}{\in} S_\omega = \cup_k S_k$ für die Modellierung Cantors I. und II. Zahlklasse zugrundegelegt werden. — Um die Relativität der bisherigen Wohlordnungsdefinition, d.h. die begrenzte Sicherstellung der Existenz „a-kleinster" Elemente aufzuheben, um also zu „absoluten" Wohlordnungen überzugehen, gehe ich in Anlehnung an Cantors ursprüngliche Erzeugungsprinzipien vor:

1) $M_{k_1,k_2}\; k_1 \leq k_2 < k$ sei Wohlordnung (für jedes k).

2) $M_{k_1,k_2}\; k_1 \leq k_2$ sei Wohlordnung.

3) Ist $a^* \in S_\varkappa$ eine Paarmengenfolge, ist $b \in S_\varkappa$ eine Paarmenge, sind $a^{(l)}$ Wohlordnungen für alle l, ist b Wohlordnung, dann sei die in $S_\varkappa$ darstellbare Paarmenge

$$\Sigma_l^b\, a^{(l)} \rightleftharpoons M_{k_1,k_2}\, V_l \left(T_{l_1}\, \pi(l, l_1; k_1),\ T_{l_2}\, \pi(l, l_2; k_2)\right) \in a^{(l)} \cdot \vee \underset{(l_1,l_2) \in b \,\wedge\, (l_2,l_1) \notin b}{V_{l_1,l_2}} T_l\, \pi(l_1, l; k_1) \cdot \in \underline{a^{(l_1)}} \wedge T_l\, \pi(l_2, l; k_2) \cdot \in \underline{a^{(l_2)}}$$

eine Wohlordnung. [π Abzählungsrelator für Paare endlicher Kardinalzahlen.]

4) Ist $a \in S_\varkappa$ eine Wohlordnung und U mit $\underline{U} \supset \underline{a}$ eine in $S_\varkappa$ darstellbare Zuordnung (umkehrbare Abbildung), dann sei

$$a^U = M_{k_1,k_2} \underset{(l_1,l_2) \in a}{V_{l_1,l_2}}\; k_1 = l_1^U \wedge k_2 = l_2^U$$

eine in $S_\varkappa$ darstellbare Wohlordn[ung].

Setzen wir $(k_1,k_2) \in a \leftrightarrow k_1 \underset{a}{\leq} k_2$, so kann für Wohlordnungen a mit Hilfe des Induktionsprinzips

$$k_1 \underset{a}{\leq} k_2 \wedge k_2 \underset{a}{\leq} k_1 \rightarrow k_1 = k_2 \quad \text{und} \quad \underset{\wedge \in n \subset \underline{a}}{{}^{S_\lambda}\Lambda_n}\ \underset{l_0 \in n}{V_{l_0}}\ \underset{l \in n}{\Lambda_l}\ l_0 \underset{a}{\leq} l$$

(für jede konstruierte Schicht $S_\lambda \supset S_\varkappa$, $\lambda \geq$ …) bewiesen werden. Nach Übergang von den Wohlordnungen $a \in S_\omega$ zu den Ordinalzahlen $\alpha \in S_\omega$ können wir die Schichtkonstruktion ausdehnen: $S_\alpha = S_0 \cup \bigcup_{\beta < \alpha} \hat{S}_\beta$, $\alpha \in T_\omega = R_1$ (1. Region), $\hat{S}$ bedeutet den Aussagenbereich über dem Individuenbereich. Mit Hilfe der Schichten aus $R_2 = \bigcup_{\alpha \in R_1} S_\alpha$ ergeben sich neue Wohlordnungen und Ordinalzahlen, mit diesen wieder neue Schichten i[n] … Wir gehen bis zu R_ω und modellieren hierin die Ordinal- und Kardinalzahltheorie bis zur Ordinalzahl $\omega_{\omega_{\omega_{\cdots}}}$, indem wir $\omega_\alpha = \underline{T}^{\leq}_\beta\, \beta \in S_{\omega\cdot\alpha+1} - S_{\omega\cdot\alpha} \cdot \rightleftharpoons \left| \Sigma_k\, T_a\, \varrho'_{\omega\cdot\alpha}(a,k) \right|$ ansetzen; dabei ist $\varrho'_{\omega\cdot\alpha}$ Abzählungsrelator für die Wohlordnungsvertreterschaften aus $S_{\omega\cdot\alpha}$. Damit die Fundamentalfolgen von Ordinalzahlen die üblichen Anfangszahleigenschaften erhalten, muß man zu einer Begriffsmodifikation greifen, die von der Umgangssprache her, d.h. bei Nichtunterscheidung der Sprachschichten, unauffindbar ist, — analog müßte man in der Analysis zu „Quasifunktionen" übergehen. Mit Hilfe der Anfangszahlen kann definiert werden, was Kardinalzahl einer Ordinalzahl ist. Um die Kardinalzahl einer Ordinalzahlmenge zu erklären, wird vorher der Typus durch natürliche Wohlordnung der Ordinalzahlmenge ermittelt. — Innerhalb der konstruktiven Mengenlehre kann man verschiedene Analysismodelle angeben: Lorenzens Modell bezieht sich auf S_ω, es hindert uns aber nichts, die Analysis auf $S_{\omega\cdot\alpha}$ zu beziehen. Durch Zuordnung von Ordinalzahlen und reellen Zahlen aus $S_{\varkappa+1} - S_\varkappa$ eröffnet sich die Möglichkeit, Kardinalzahlen für Mengen reeller Zahlen zu definieren. Der Menge „aller" reellen Zahlen im auf $S_{\omega\cdot\alpha}$ bezogenen Analysismodell kommt bei dieser „Kontinuumsabzählung" (vgl. Hilberts bekanntes Beweisprogramm) die Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ zu. Nicht nur die Kontinuumshypothese scheint von den Sätzen der Analysis und der Mengenlehre unabhängig zu sein, sondern auch Königs „Satz" über Kardinalzahlprodukte scheint bloß eine widerspruchsfreie, aber wahr zu sein, denn die auf $\aleph_{\omega\cdot\omega}$ bezogene Analysis würde $\aleph = \aleph_\omega$ liefern, während aus Königs Satz $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$ folgt

Wette

Eduard Wette.

Beweis des Zorn'schen Satzes von J. Dieudonné. (Deutsche Übersetzung)

L e m m a. E sei eine teilgeordnete Menge, a ein Element von E, f eine Abbildung von E in E, welche für jedes $x \in E$, $f(x) \geq x$ erfüllt. $\mathfrak{F}$ sei das System aller Teilmengen X von E mit folgenden Eigenschaften:

1. $a \in X$;
2. $x \in X$ hat $f(x) \in X$ zur Folge,
3. wenn eine nicht leere Teilmenge Y von X eine obere Grenze in E besitzt, so gehört diese obere Grenze zu X.

Unter diesen Voraussetzungen wird behauptet:

1. $\mathfrak{F}$ ist nicht leer.
2. Der Durchschnitt A aller Mengen $X \in \mathfrak{F}$ gehört zu $\mathfrak{F}$.
3. Für zwei beliebige Elemente x, y aus A ist entweder $y \leq x$ oder $y \geq f(x)$.

B e w e i s. Das System $\mathfrak{F}$ ist nicht leer, denn die Menge aller Elemente $x \geq a$ aus E gehört zu $\mathfrak{F}$. Man prüft leicht nach, dass A zu $\mathfrak{F}$ gehört. a ist kleinstes Element von A. Die Teilmenge B von A bestehe aus allen Elementen $x \in A$, welche folgende Eigenschaft besitzen:

(P) Die Relationen $y \in A$ und $y \leq x$ haben $y = x$ oder $f(y) \leq x$ zur Folge.

Die Menge B ist nicht leer, denn es ist $a \in B$. Wir zeigen, dass sich aus $x \in B$ und $y \in A$ ~~ergibt:~~

(Q) $y \leq x$ oder $y \geq f(x)$. ergibt.

Zum Beweis wählen wir aus B ein beliebiges Element x aus und bilden die Teilmenge C von A aus allen Elementen $y \in A$, welche (Q) genügen. Wir zeigen, dass $C \in \mathfrak{F}$; wegen $C \subset A$ ergibt dann die Definition von A, dass $C = A$ ist. Weil $a \leq x$ ist, hat man $a \in C$; aus $y \in C$ und $y \geq f(x)$ folgt $f(y) \geq y \geq f(x)$, also $f(y) \in C$ nach Definition; wenn $y \in C$ und $y \leq x$ ist, folgt aus (P), dass $y = x$ oder $f(y) \leq x$ ist; $y = x$ bedeutet: $f(y) = f(x)$; in jedem Falle ist also $f(y) \in C$.

Sei endlich Y Teilmenge von C mit einer oberen Grenze b in E, so ist $b \in A$ wegen $A \in \mathfrak{F}$; wenn $y \leq x$ für jedes $y \in Y$ gilt, so folgt $b \leq x$; andernfalls existiert ein $y \in Y$, sodass $y \geq f(x)$, ~~und es ist~~ also $b \geq f(x)$ ist. Wir haben ~~also~~ somit gefunden, dass $C \in \mathfrak{F}$, also $C = A$ ist.

Das Lemma ist bewiesen, wenn wir $B = A$ ableiten können. Hierfür genügt es zu zeigen, dass $B \in \mathfrak{F}$ ist. Zunächst ist $a \in B$. Aus $x \in B$ folgt $f(x) \in B$; denn ist $y \in A$ und $y < f(x)$, so folgt nach Eigenschaft (Q) $y \leq x$; $y = x$ hat $f(y) = f(x)$ zur Folge, $y < x$ liefert nach (P) dagegen: $f(y) \leq x \leq f(x)$, womit $f(x) \in B$ bewiesen ist. Nun soll Y eine Teilmenge von B mit einer oberen Grenze b in E sein, welche natürlich zu A gehört; $y \in A$ erfülle $y < b$; wäre $y \geq f(x) \geq x$ oder $y = x$ für jedes $x \in Y$,

so würde $y \geq b$ folgen, was der Annahme widerspricht; also existiert nach (Q) ein $x \in Y$ mit $y < x$; woraus wir mit Hilfe von (P) die Beziehung $f(y) \leq x \leq b$ folgern; also ist $b \in B$ und somit $B = A$.

C o r o l l a r. Wenn A eine obere Grenze b in E besitzt, so ist $b \in A$ und $f(b) = b$.

Ist E eine induktiv teilgeordnete Menge, so gibt es nach dem Auswahlaxiom eine Funktion f mit $f(x) > x$, wenn x nicht maximal ist, und $f(x) = x$ für jedes maximale x. Aus dem Corollar folgt also, dass jede induktiv teilgeordnete Menge ein maximales Element besitzt und dies ist die Behauptung des Zorn'schen Satzes.

Aspect pris par la théorie des èq^{ns} D.P.
quand on souhaite l'approx^{n} effective des solutions.

Même souci ⟶ èq^{ns} D.O.

$\frac{dM}{dt} = \vec{f}\,(t,M)$ $\qquad \left|\vec{f}\,(t,P) - \vec{f}(t,Q)\right| < K\,|PQ|$

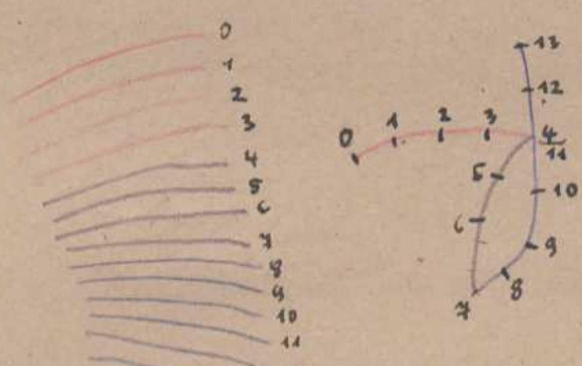
$\overrightarrow{ON}$ intég^{le} à ε près si $\left|\frac{dN}{dt} - \vec{f}\,(t,N)\right| < \varepsilon$

en prenant
a) une intég. exacte issue de M_o sur l'intervalle
b) .... à ε près .... M_1 $t_1 - t_o$.

on a $\max |MN| < e^{K(t_1 - t_o)} \left[|M_oM_1| + \varepsilon(t_1 - t_o) \right]$

ce qui, pour l'intégrale issue de M_o établit son UNICITE
sa CONTINUITE $/M_o$

Critique de la théorie de $f(x,y,z,p,q) = 0$ sous forme classique.
Méth. de Lagrange (ou de l'intég.complète)
à des èq^{ns} formées par élimin^{n}, on applique le critère de dèpendance tablant sur l'annul^{n} du jacobien. L'applic^{n} effective comporte l'intég^{n} à ε près d'une èq^{n} aux D.T.
Méth.de Cauchy, engendrant l'intèg-^{le} par les caractéristiques



~~$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$~~

$Pdx + Qdy + Rdz = 0$

Pour intègrer une èq. D.T.
on cherche les intersections des surf^{ces} intèg^{les} avec les $V(x,y,z) = c^{te}$ en prenant V de manière que les directions de $\overrightarrow{grad\,V}$ et $\overrightarrow{(P,Q,R)}$ soient partout distinctes.- Dèf^{n} d'une intég. à ε près.

Rèsol^{n} approchèe d'un syst.

$f(x,y,z,p,q) = 0$ où g = intèg. 1ère
$g(x,y,z,p,q) = \lambda$ syst.caract^{que}.

REV.SCIENT N° 3291, 15 fév.1948, p.230

d'où l'espoir d'une intég^{le} compl.approchée espoir très fugitif: prendre l'èq^{n} de CLAIRAUT.

D'abord, dans le plan: en affinant l'ens.des pts d'une courbe

$$y = f(x)$$
$$p = \varphi(\omega)$$

on accroit l'incertitude sur la famille des tg. en affinant l'ens. des tg. écrites $x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0$, on accroit l'incertitude sur la famille des pts de contact.

Dans l'espace si l'on prend la famille de plans

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta - p(\theta, \varphi) = 0$$

les enveloppes de familles à 1 param. extraites de cette famille sont malaisées à obtenir.

La méth. de Lagrange sort des méthodes vraiment utilisables.

Caractéristiques (Lagr.^{iennes})-Partant de la famille

$$z = [\varphi(x) + a][\psi(y) + b] \quad \Big| \quad \frac{p}{z} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) + a} \quad \Big| \quad \frac{q}{z} = \frac{\psi'(y)}{\psi(y) + b}$$

$$\frac{pq}{z^2} = \frac{\varphi'(x)\,\psi'(y)}{z} \quad \Big| \quad pq = z\,\varphi'(x)\,\psi'(y)$$

il y a des Caract. L, pas de caract. C, si φ', ψ' sont non dérivables (cône étèment^{re} 2^{e} ordre, mais allure singul^{re} courbe élémentaire)

caract.

$$z = [\varphi(x) + a][\psi(y) + b]$$
$$c \quad [\varphi(x) + a] + \psi(y) + b = 0$$
$$p = \varphi'(x) \cdot [\psi(y) + b]$$
$$q = \psi'(y) \cdot [\varphi(x) + a]$$

dp, dq n'existent pas

Les remarques concernant le critère de dépend^{ce} déduit du JACOBIEN montrent l'impossibilité éventuelle d'une élim^{n} effective même générale.

1. Partant de $z = V(x,y,u,\lambda)$ d'où $\left| \begin{array}{l} p = V_z\ (x,y,u,\lambda) \\ q = V_y\ (x,y,u,\lambda) \end{array} \right.$

si on élimine λ entre $\begin{array}{l} z = V \\ p = V_x \end{array}$, puis entre $\left| \begin{array}{l} z = V \\ q = V_y \end{array} \right.$ on obtient un syst.

$$f(x,y,p,q,z,u) = 0$$
$$g(x,y,p,q,z,u) = 0$$

Si l'on satisfait à ce syst. en prenant $z = V(x,y,u,\lambda)$ / $u = u$

la recherche de fonctions $\begin{array}{l} z\ (x,y) \\ \lambda\ (x,y) \\ u\ (x,y) \end{array}$ telles qu'on ait $\boxed{z = V,\ p = V_x, q = V_y}$

donne un prob. èquiv[t] à la rèsol[n] du syst. $f = g = 0$.

Même marche que dans le cas classique où u est lui-même éliminé

Ex.: le syst. $\begin{array}{l} \varphi(u) - x + p\ (u - z) = 0 \\ \psi(u) - y + q\ (u - z) = 0 \end{array}$

conduisant à des sol[ns] partic. $S_{u\lambda}$ qui sont des sph.

centre $[\ \varphi(u),\ \psi(u), u\ ]$ astreint à dècrire une courbe assignèe.

ray λ.

2. Soit une fam. de surf. S_{uv} : $z = V(x,y,u,v)$ $\begin{array}{l} p = V_x\ \ (x,y,u,v) \\ q = V_y\ \ (x,y,u,v) \end{array}$

Si l'élim[n] de u,v ne gaze pas, on reste attachè au probl.Lagr[ien]:

rech des fonct. $u(x,y), v(x,y)$, $z(x,y)$ telles que $z = V$, $p = V_x$, $q = V_y$

Ex: cas des sph.

(1) $(x-u)^2+(y-v)^2+ [z - \varphi(u,v)]^2 = [p(u,v)]^2$

(2) $x-u + p\ (z - \varphi) = 0$

(3) $y-v + q\ (z- \varphi) = 0$

d'où un syst.(1),(2),(3) ayant des èquiv[ts] sans que s'achève la rèduction. On ne peut donner que rèp.indir[te] à la question.

Ecrire une èq[n] $F(x,y,z,p,q)= 0$ ayant pour intèg[le] une famille q c q sphères 2 paramètres.

Le cas n° 1 (ou cas intermed[re]) induit vers la paramètris[n] quant à p,q d'une èq[n] $F\ (x,y,z,p,q) = 0$

d'où

$$p = A\ (x,y,z,u)$$
$$q = B\ (x,y,z,u)$$

en cherchant u telle que $A(x,y,z,u)\ d\ x + B\ (x,y,z,u)dy$

soit une diffèrent[le] totale.

D'où la cond^{n}(1) $A_y + B\,A_z + A_u(u_y + Bu_z) = B_x + A\,B_z + B_u(u_x + A\,u_z)$
èq.lin^{re} en u_x, u_y, u_z et donnant u. Une fois u trouvée, il rest à intégrer

$$d\,z = A\,(x,y,z,u)\,d\,x + B\,(x,y,z,u)\,d\,y\ .$$

Caract^{ques} de (1)

$$\frac{dx}{B_u} = \frac{dy}{-A_u} = \frac{dz}{AB_u - BA_u} = \frac{du}{B_x - A_y + AB_z - BA_z}$$

= courbes de l'esp.(x,y,z,u) le long desquelles les pentes p,q, se déduisent des relations $p = A$, $q = B$.
Ainsi définies dans l'esp^{ce}(x,y,z,u), les caract^{ques} vont se projeter sur l'esp^{ce} (x,y,z) suivant celles de $F = 0$.

Notions de <u>paratingent</u>, d'intég ptg^{te}

<u>Exemple</u> de l'èq^{n} $\dfrac{(Ap + Bq - C)^2}{1 + p^2 + q^2} = m^2\,(A^2 + B^2 + C^2)$
qui, pour $m = \sin\alpha$ tendant vers 1, se décompose à la limite en 2 éq^{ns} indép^{tes} $\quad p\,C + A = 0 \qquad q\,C + B = 0$
dont l'ens^{ble} équivaut à $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$.
Pour une ligne L non orthog^{le} au vect. $(\overrightarrow{A,B,C})$ la tg. en ch.pt.va tendre à être intér^{re} au cône élém^{re}. On Supposera donc orthog^{le} en ch.pt.au vect.$(\overrightarrow{A,B,C})$

Soit aussi bien $(p + y)^2 + q^2 = \varepsilon^2\,f(y,z,p,q)$
qui pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, s'approche indéf^{t} de $dz + y\,dx = 0$.

L'axe des x est bien une ligne intég^{le}. La rech.d'une surf^{ce} passant par l'axe des x donne

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \varepsilon^2\,f\,\left(y,z,0,\frac{dz}{dy}\right)$$

<u>Avantages de la méthode de Cauchy</u>

On engendre la Surf^{ce} intég^{le} par des multip^{les} caract^{ques} s'appuyant sur la courbe support (élaborée en bande de départ).

Stabilité, du pt.devue général.

Stabilité des bandes précédentes dans l'esp.(x,y,z,p,q), déduite des propr. des syst.diff^{ls} & inég^{les} diff^{les}. Cela ramène aux éq. D.P.^{elles} .... Ce qui va être indiqué.

Sol^{ns} de $p^2 + q^2 = 1$ fournies par la PCD d'un pt. à un ens. plan (pt. $\in$ plan de l'ens.). On obtient une int^{le} ctg^{te} de $p^2 + q^2 = 1$

Intég

$\underline{\text{Intég}^{les}\ \text{ctg}^{tes}\ \text{de l'éq}^{n}\ \text{d'Hamilton-Jacobi}}$ obtenue de même en remplacant la PCD euclidienne par une autre PCD quant à l'intég^{le} $\int f(x,y,dx,dy)$ (le ctg. gardant les mêmes caractères spécifiques)

$\underline{\text{Général}^{n}}$: idées de champs de cônes convexes
de courbes dont la tg., le ctg. le ptg. est partout intér. au cône du champ, (cela géométrise l'$\text{inég}^{té}$ differ^{le})
ou les syst. d'inég:

Emmission d'un point
d'un ensemble.

Frontière d'une émission, fournissant(MARCHAUD) une intég^{le} ctg. de l'éq^{n} D.P. engendrée par le champ de cônes.

Retour à (S) $\left(\begin{array}{l} p = A\,(x,y,z,u) \\ q = B\,(x,y,z,u). \end{array}\right.$ à $dz = p\,dx + q\,dy$ et à (1).

Une hypersurf. sol^{n} de (1) une fois obtenue, il faut chercher surf^{ce} σ située sur cette hyp., ou une surf^{ce} $\tilde{\omega}$ proj^{n} de σ sur $u = 0$ et vérifiant

$$dz = A \quad x,y,z,u(x,y,z) \qquad dx + B\,(x,y,z,u(x,y,z))dy$$

Etudions (S) autour d'un (x_0, y_0, z_0, u_0) où le vect. A_u, B_u est $\neq 0$.

On peut alors passer de (S) à une éq. $f = 0$, P.ex. si $A_u \neq 0$.

$f = 0$ s'écrit $\quad q = B\,[\,x,y,z,\,\mathcal{V}(x,y,z,p)]$ $\mathcal{V}$ dériv^{ble}(1) en x,y,z.

Partons d'une surf^{ce} $\tilde{\omega}$ intég^{le} de $f = 0$. En ch. pt. de $\tilde{\omega}$, les 2 éq^{ns}

$$p = A \ldots\ldots$$
$$q = B \ldots\ldots$$

ont une sol^{n} commune en u. De $\tilde{\omega}$ on déduit une surf^{ce} σ sur l'hypers^{ce} de $0,x,y,z,u$ par laquelle σ passe en général une intég^{le} bien déterminée (1), soit p.ex. l'hypers^{ce}(h).(elle est engendrée par les caract^{ques} de (1), elle aura peut-être des pl.tg // Ou. Soit (ω) la varieté ou cela se produit. L'une des surf^{ces} σ sillonnant (h) pourra² couper (ω) suivant une courbe γ. La proj^{r} $\tilde{\omega}$ de cette σ a dès lors une arête de rebrouss^{t}, qui est elle-même la proj^{n} de γ sur $u = 0$.

Posons le probl. Cauchy pour $f = 0$ et une courbe C.

Soit $\tilde{\omega}$ une surf^{ce} sol^{n}: elle est la proj^{n} sur $u = 0$ d'… surf^{ce} σ qui est sol^{n} d'un autre probl. Cauchy pour (S) et une courbe Γ projetée sur $u = 0$ suivant C, et le long de laquelle u s'obtient, une fois p,q trouvés par le processus classique, à partir de (S) . Partant de Γ, on peut retrouver la surf^{ce} $\tilde{\omega}$, e… recourant à (h), intég^{le} de (1) qui contient Γ: il y a sur (h) un… surf^{ce} σ contenant aussi Γ et projetée suivant $\tilde{\omega}$.

Cela explique les cas d'indéterm^{n} - Si Γ est une caract^{que} de (1) (S) associe à Γ (le long de laquelle x,y,z,u sont fonct^{ns} d'un certain param.) une courbe de l'esp^{ce} x,y,z, le long de laqu… en vertu de (S) x,y,z,p,q sont aussi fonct^{ns} de ce param. Ainsi s'introduisent les bandes d'él^{ts} de contact. D'où une introd^{n} naturelle à une étude didactique de $f(x,y,z,p,q) = 0$.

Il suffit maintenant, dans la méth. précédente, d'introd^{r} des cond^{ns} suppl^{res} peu restrictives pour pouvoir établir que (h) = intég^{le} ptg^{te} de (1). L'intég^{le} au sens de Cauchy est alors proj^{n} d'une intég^{le} ptg^{le} dans σ x y z u.

Aspect pris par la théorie des èq^{ns} D.P. quand on souhaite l'approx^{n} effective des solutions.

Même souci $\longrightarrow$ èq^{ns} D.O.

$\frac{dM}{dt} = \vec{f}(t, M)$ $\quad |\vec{f}(t,P) - \vec{f}(t,Q)| < k\,|PQ|$

ON intég^{le} à ε près si $\left|\frac{dN}{dt} - \vec{f}(t,N)\right| < \varepsilon$

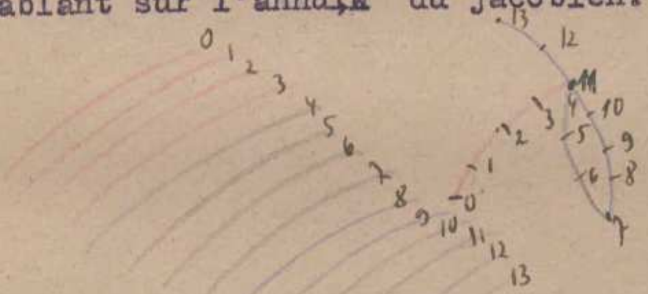
en prenant
a) une intég. exacte issue de M_0
b) ...... à ε près .... M_1
sur l'intervalle $t_1 - t_0$

on a max $|MN| \leq e^{k(t_1-t_0)} \left[|M_0M_1| + \varepsilon(t_1 - t_0) \right]$

ce qui, pour l'intègrale issue de M_0 ètablit $\left\{ \begin{array}{l} \text{son UNICITE} \\ \text{SA CONTINUITE}/M_0 \end{array} \right.$

Critique de la théorie de f (x,y,z,p,q) = 0 sous forme classique.

Méth. de Lagrange (ou de l'intég.complète)
à des èq^{ns} formées par élimin^{n}, on applique le critère de dèpendance tablant sur l'annul^{n} du jacobien. L'applic^{n} effective comporte l'intég^{n} à ε près d'une èq^{n} aux D.T.



Méth.de Cauchy, engendrant l'intèg^{le} par les caractéristiques

P dx + Q dy + R dz = 0

Pour intègrer une èq.D.T. on cherche les intersections des surf^{ces} intégles avec les $\mathcal{M}$ (x,y,z) = c^{te} en prenant $\mathcal{M}$ de manière que les directions de grad $\mathcal{M}$ et $(\vec{P,Q,R})$ soient partout distinctes.- Dèf^{n} d'une intég. à ε près.

Rèsol^{n} approchèe d'un syst.
f (x,y,z,p,q) = 0
g (x,y,z,p,q) = a

où g = intèg. 1ère syst.caract^{que}.

Rev.Scient N° 3291,15 fév.1948, p.230

d'où l'espoir d'une intég$^{\text{le}}$ compl. approchée
espoir très fugitif: prendre l'èq$^{\text{n}}$ de CLAIRAUT
D'abord, dans le plan: en affinant l'ens.des pts d'une courbe

$$y = f(x)$$
$$p = \varphi(\omega)$$

on accroit l'incertitude sur la famille des tg. en affinant l'ens. des tg. écrites $x \cos\theta + y \sin\theta - p(\theta) = 0$, on accroit l'incertitude sur la famille des pts de contact.

Dans l'espace si l'on prend la famille de plans

$$x \sin\theta \cos\varphi + y \sin\theta \sin\varphi + z \cos\theta - p(\theta, \varphi) = 0$$

les enveloppes de familles à 1 param. extraites de cette famille sont malaisées à obtenir.
La méth. de Lagrange sort des méthodes vraiment utilisables.
Caractéristiques (Lagr.$^{\text{iennes}}$) - Partant de la famille

$$z = [\varphi(x) + a][\psi(y) + b] \qquad \frac{p}{z} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)+a} \qquad \frac{q}{z} = \frac{\psi'(y)}{\psi(y)+b}$$

$$\frac{pq}{z^2} = \frac{\varphi'(x)\,\psi'(y)}{z} \quad / \quad pq = z\,\varphi'(x)\,\psi'(y)$$

il y a des Caract. L, pas de caract. C, si φ', ψ' sont non dérivables (cône étement$^{\text{re}}$ 2$^{\text{e}}$ ordre, mais allure singul$^{\text{re}}$ courbe élémentaire)

$$z = [\varphi(x) + a][\psi(y) + b]$$

carac. L

$$c[\varphi(x) + a] + \psi(y) + b = 0$$
$$p = \varphi'(x) \cdot [\psi(y) + b]$$
$$q = \psi'(y) \cdot [\varphi(x) + a]$$

dp, dq n'existent p

Les remarques concernant le critère de dépend$^{\text{ce}}$ déduit du JACOBIEN montrent l'impossibilité éventuelle d'une élim$^{\text{n}}$ effective. même générale

1. Partant de $z = V(x,y,u,\lambda)$ d'où $\left| \begin{array}{l} p = V_z\ (x,y,u,\lambda) \\ q = V_y\ (x,y,u,\lambda) \end{array} \right.$

si on élimine λ entre $\begin{array}{l} z = V \\ p = V_x \end{array}$, puis entre $\left| \begin{array}{l} z = V \\ q = V_y \end{array} \right.$ on obtient un syst.

$$f(x,y,p,q,z,u) = 0$$
$$g(x,y,p,q,z,u) = 0$$

Si l'on satisfait à syst. en prenant $z = V(x,y,\mu,\lambda) / u = \mu$

la recherche de fonctions $\begin{array}{l} z\ (x,y) \\ \lambda\ (x,y) \\ u\ (x,y) \end{array}$ telles qu'on ait $z = V, p=V_x, q=V_y$

donne un prob. équiv^t à la rèsol^n du syst. $f = g = 0$.

Même marche que dans le cas classique où u est lui-même èliminé

Ex.: le syst.
$$\varphi(u) - x + p\ (u - z) = 0$$
$$\psi(u) - y + q\ (u - z) = 0$$

conduisant à des sol^{ns} partic. $S_{u\lambda}$ qui sont des sph. centre $[\varphi(u), \psi(u), u]$ astreint à dècrire une courbe assignèe; ray λ.

2. Soit une fam. de surf. S_{uv} : $z = V(x,y,u,v)$ $\begin{array}{l} p = V_x\ (x,y,u,v) \\ q = V_y\ (x,y,u,v) \end{array}$

Si l'élim^n de u,v ne gaze pas, on reste attachè au probl.Lagr^{ien}: rech des fonct. $u(x,y), v(x,y)\ z(x,y)$ telles que $z = V$, $p = V_x, q=V_y$

Ex: cas des sph.
$$(1)\quad (x-u)^2 + (y-v)^2 + [z - \varphi(u,v)]^2 = [p(u,v)]^2$$
$$(2)\quad x-u + p\ (z - \varphi) = 0$$
$$(3)\quad y-v + q\ (z - \varphi) = 0$$

d'où un syst.(1),(2),(3) ayant des equiv^{ts} sans que s'achève la redrection. On ne peut donner que rèp.indir^{te} à la question.

Ecrire une èq^n $F(x,y,z,p,q) = 0$ ayant pour intèg^{le} une famille q c q sphères 2 paramètres.

Le cas n^o 1 (ou cas intermed^{re}) induit vers la paramètris^n quant à p,q d'une èq^n $F\ (x,y,z,p,q) = 0$

d'où
$$p = A\ (x,y,z,u)$$
$$q = B\ (x,y,z,u)$$

en cherchant u telle que $A(x,y,z,u)\ dx + B\ (x,y,z,u)\ dy$ soit une diffèrent^{le} totale.

D'où la cond^{n} (1) $A_y + B A_z + A_u(u_y + Bu_z) = B_x + A B_z + B_u(u_x + A u_z)$
èq.lin^{re} en u_x, u_y, u_z et donnant u. Une fois u trouvée, il reste à intégrer

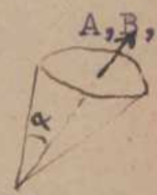
$$dz = A\,(x,y,z,u)\,dx + B\,(x,y,z,u)\,dy$$

Caract^{ques} de (1)

$$\frac{dx}{B_u} = \frac{dy}{-A_u} = \frac{dz}{AB_u - BA_u} = \frac{du}{B_x - A_y + AB_z - BA_z}$$

= courbes de l'esp. (x,y,z,u) le long desquelles les pentes p,q se déduisent des relations p = A, q = B.
Ainsi définies dans l'esp^{ce} (x,y,z,u), les caract^{ques} vont se projeter sur l'esp^{ce} (x,y,z) suivant celles de F = 0.

Notions de <u>paratingent</u>, d' <u>intég^{le}</u> ptg^{te}



<u>Exemple</u> de l'èq^{n} $\frac{(Ap + Bq - C)^2}{1 + p^2 + q^2} = m^2\,(A^2 + B^2 + C^2)$

qui, pour $m = \sin\alpha$ tendant vers 1, se décompose à la limite en 2 éq^{ns} indép^{tes} $pC + A = 0$ $qC + B = 0$

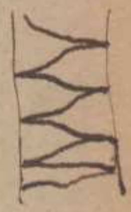
dont l'ens^{ble} équivaut à $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$.
Pour une ligne L non orthog^{le} au vect. $(\overrightarrow{A,B,C})$ la tg. en ch.pt. va tendre à être intér^{re} au cône élém^{re}. On supposera donc L orthog^{le} en ch.pt.au vect.(A,B,C)

Soit aussi bien $(p + y)^2 + q^2 = \varepsilon^2\, f(y,z,p,q)$

qui pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, s'approche indéf^{t} de $dz + y\,dx = 0$.

L'axe des x est bien une ligne intég^{le}. La rech.d'une surf^{ce} passant par l'axe des x donne

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \varepsilon^2\, f(y,z,0,\frac{dz}{dy})$$



<u>Avantages de la méthode de Cauchy</u>

On engendre la Surf^{ce} intég^{le} par des multip^{les} caract^{ques} s'appuyant sur la courbe support (élaborée en bande de départ).

Stabilité, du pt.devue général.

Stabilité des bandes précédentes dans l'esp.(x,y,z,p,q), déduite des propr. des syst.diff^{ls} & inég^{les} diff^{les}. Cela ramène aux éq. D.P^{elles} .... Ce qui va être indiqué.

Sol^{ns} de $p^2 + q^2 = 1$ fournies par la PCD d'un pt. à un ens.plan (pt. $\in$ plan de l'ens.). On obtient une int^{le} ctg^{te} de $p^2 + q^2 = 1$

Intég^{les} ctg^{tes} de l'éq^{n} d'Hamilton-Jacobi obtenue de même en remplaçant la PCD euclidienne par une autre PCD quant à l'intég^{le} $\int f(x,y,dx,dy)$ (le ctg. gardant les mêmes caractères spécifiques)

Général^{n} : idées de $\left\{\right.$ champs de cônes convexes
de courbes dont la tg., le ctg. le ptg.
est partout intér.au cône du champ,
(cela géométrise l'inég^{té} differ^{le})
ou les syst. d'inég. :

Emission d'un point
d'un ensemble.

Frontière d'une émission, fournissant (MARCHAUD) une intég^{le} ctg. de l'éq,^{n} D.P. engendrée par le champ de cônes.

Retour à (S) $\left\{\begin{array}{l} p = A\ (x,y,z,u) \\ q = B\ (x,y,z,u)\ . \end{array}\right.$ à $dz = p\ dx + q\ dy$ et à (1).

Une hypersurf. sol^{n} de (1) une fois obtenue, il faut chercher une surf^{ce} σ située sur cette hyp., ou une surf^{ce} $\tilde{\omega}$ proj^{n} de σ sur $u = 0$ et vérifiant

$$dz = A\ [x,y,z,u(x,y,z)]\ dx + B(x,y,z,u(x,y,z))dy$$

Etudions (S) autour d'un (x_o,y_o,z_o,u_o) où le vect. A_u,B_u est $\neq 0$,

On peut alors passer de (S) à une éq. $f = 0$, P.ex. si $A_u \neq 0$,

$f = 0$ s'écrit $q = B\ [x,y,z,\ V(x,y,z,p)]$ V dériv^{ble}(1) en x,y,z,

Partons d'une surf^{ce} $\tilde{\omega}$ intég^{le} de $f = 0$. En ch.pt. de $\tilde{\omega}$, les 2 éq^{ns}

$p = A$ ....

$q = B$ ....

ont une sol^{n} commune en u. De $\tilde{\omega}$ on déduit une surf^{ce} σ sur l'hypers^{ce} de O, x, y, z, u par la quelle σ passe en général une intég^{le} bien déterminée (1), soit p.ex. l'hypers^{ce}(h).(elle est engendrée par les caract^{ques} de (1), elle aura peut-être des pl. tg // Ou. Soit(ω) la varieté ou cela se produit. L'une des surf^{ces} σ sillonnant (h) pourra^2 couper (ω) suivant une courbe γ . La proj^{n} $\tilde{\omega}$ de cette σ a dès lors une arête de rebrouss^{t}, qui est elle-même la proj^{n} de γ sur $u = 0$.

Posons le probl.Cauchy pour $f = 0$ et une courbe C.

Soit $\tilde{\omega}$ une surf^{ce} sol^{n} : elle est la proj^{n} sur u = 0 d'une surf^{ce} $\mathcal{G}$ qui est sol^{n} d'un autre probl. Cauchy pour S et une courbe Γ projetée sur u = 0 suivant C, et le long de laquelle u s'obtient, une fois p,q trouvés par le processus classique, à partir de S . Partant de Γ , on peut retrouver la surf^{ce} $\tilde{\omega}$, en recourant à (h), intég^{le} de (1) qui contient Γ : il y a sur (h) une surf^{ce} G contenant aussi Γ et projetée suivant $\tilde{\omega}$.

Cela explique les cas d'indéterm^{n}- Si Γ est une caract^{que} de (1) S associe à Γ (le long de laquelle x,y,z,u sont fonct^{ns} d'un certain param.) une courbe de l'esp^{ce} x,y,z, le long de laquelle, en vertu de S x,y,z,p,q sont aussi fonct^{ns} de ce param. Ainsi s'introduisent les bandes d'él^{ts} de contact. D'où une introd^{n} naturelle à une étude didactique de f(x,y,z,p,q) = 0.

Il suffit maintenant, dans la méth. précédente, d'introd^{re} des cond^{ns} suppl^{res} peu restrictives pour pouvoir établir que (h) = intég^{le} ptg^{le} de (1). L'integ^{le} au sens de Cauchy est alors proj^{n} d'une intèg^{le} ptg^{le} dans σ x y z u.