1956,1

Math. Forschungsinstitut Oberwolfach

Lehrgang "Strukturfragen in der Analysis"

im Math. Forschungsinstitut Oberwolfach 9. bis 14. Juli 1956

Protokoll (geführt durch die HH. Denninger, Frey, Haas, Klemm, Kröplin, Kunz, Kurz, Müller, Schumacher u.a.)

lo.7.56 Prof. Kneser:

K ö r p e r a x i o m e.

Ein Körper ist eine Menge von mindestens zwei Elementen, in der zwei Verknüpfungen "+" und "." erklärt sind mit folgenden Eigenschaften:

a + b	a . b
kommutativ	kommutativ
assoziativ	assoziativ
distributiv	
0 neutrales Element	1 neutrales Element
zu a ex. "$-a$"	zu $a \neq 0$ ex. "a^{-1}"

Beispiele für Körper:

1) Körper der reellen Zahlen
2) Körper R der rationalen Zahlen
3) Körper der komplexen Zahlen
4) Restklassenkörper nach einer Primzahl
5) Körper der rationalen Funktionen mit reellen Koeffizienten

Durch die Körperaxiome sind die reellen Zahlen noch nicht eindeutig bestimmt. Es müssen weitere Axiome hinzugefügt werden.

Vollständige Ordnung durch die Relation $a < b$. Umschreibung der binären Relation $a < b$ auf die unäre Relation $b - a > 0$.

Axiome der Anordnung:

1. $a > 0$, $a = 0$, $-a > 0$; genau eine Relation von diesen dreien gilt.
2. $a > 0,\ b > 0 \rightarrow a + b > 0$.
3. $a > 0,\ b > 0 \rightarrow a \cdot b > 0$.

Durchsicht der Beispiele bezüglich vollständiger Ordnung:

1) und 2) sind angeordnete Körper.

3) und 4) können nicht vollständig geordnet werden.

5) Körper der rat. Funktionen lässt sich, wie folgt, vollständig ordnen:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \ldots\ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots\ldots + b_0} \qquad b_n \neq 0 \quad a_m \neq 0 \text{ oder } f(x) = 0$$

Def. $f(x) > 0$, wenn $\frac{a_m}{b_n} > 0$ (bleibt erhalten bei Erweitern des Bruches).

10.7.56 Prof. Haupt:

Umschreibung der Axiome der Anordnung

(O_1) $a \geq b$ und $b \geq a \Rightarrow a = b$

(O_2) $a \geq b$ und $b \geq c \Rightarrow a \geq c$

(O_3) a, b beliebig $\Rightarrow a \geq b$ oder $b \geq a$ (oder beides).

O_1 bis O_3 kennzeichnen die <u>vollständige</u>, O_1 und O_2 die teilweise Ordnung.

Verträglichkeit mit Addition und Multiplikation:

(O_a) $a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$

(O_m) $a \geqq b$ und $f \geq 0 \Rightarrow af \geqq bf$

Beispiel 2) und 5) zeigen, dass die Axiome noch nicht zur eindeutigen Kennzeichnung des Körpers der reellen Zahlen ausreichen.

<u>Archimedisches Axiom</u>

(A) Zu $a > 0$, $b > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n = n(a,b)$ mit der Eigenschaft $a < nb$.

Gleichwertig mit (A) ist die Einschliessungseigenschaft

(E) Jede reelle Zahl a lässt sich einschliessen zwischen zwei rationale Zahlen von beliebig kleiner Differenz.

(A) ist unabhängig von den vorhergehenden Axiomen, denn Beispiel 5) ist nicht archimedisch geordnet ($x > b_0$ für beliebiges $b_0 \varepsilon R$, x ist also unendlich gross bezgl. jeder Konstanten).

Aus (A) folgt: Die rationalen Zahlen liegen dicht im Körper der reellen Zahlen.

Aus (E) folgt: Zu jeder reellen Zahl ρ gibt es eine rationale Intervallschachtelung, durch die ρ eindeutig bestimmt wird.

Den bisherigen Axiomen genügen die Beispiele 1) und 2).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Abschliessendes Axiom:

(ISA) Intervallschachtelungsaxiom: Zu jeder Intervallschachtelung existiert genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen liegt.

11.7.56. Prof. Haupt:

Das Intervallschachtelungsaxiom lässt sich durch andere Axiome ersetzen.

(DA) Dedekindsches Axiom: Zu jedem Schnitt im Körper der rationaöen Zahlen, dessen Oberklasse keine kleinste Zahl enthält, existiert eine reelle Zahl ρ in folgendem Sinn:
$u \leq \rho < s$ für jedes u aus der Unterklasse U und jedes s aus der Oberklasse S.

(SA) Supremum-Axiom: Jede nach oben beschränkte nicht leere Menge T aus R besitzt ein Supremum in R^V (R^V:Körper der reellen Zahlen)

(MA) Monotonie-Axiom: Für $a_n \varepsilon R$, $a \varepsilon R$ und $a_n \leqq a_{n+1} \leqq a$ existiert ein $\rho \varepsilon R^V$ mit $= \sup\ (a_n, n = 1,2,3,\ldots)$

Es wurde gezeigt, dass in einem archimedisch angeordneten Körper die letzten vier Axiome gleichwertig sind. Ferner wurde gezeigt, dass das Dedekindsche Axiom nur in archimedisch geordneten Körpern erfüllbar ist.

Aus den bisherigen Axiomen lässt sich folgern:

Ein archimedisch geordneter Körper, in dem (ISA) gilt, besitzt nur sich selbst als archimedisch geordneten Oberkörper. Jeder archimedisch geordnete Körper ist isomorph zu einem Unterkörper des Körpers der reellen Zahlen.

Jeder maximale archimedisch geordnete Körper ist isomorph zu R^V: Monomorphie des Axiomensystems (+, . ? < , arch, maximal).

11.7.56 Prof. Kneser:

Bewertete Körper

Man kann R^V aus R auch mit Hilfe der "Bewertung" durch den Betrag erhalten. Bewertung ist eine Verallgemeinerung des absoluten Betrages.

Definition: Eine Bewertung ist eine Abbildung $x \dashrightarrow \|x\| \varepsilon W$ eines Körpers K in einen geordneten Körper W, den Wertekörper, mit folgenden Eigenschaften:

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$||x|| \geq 0$ für $x \varepsilon K$, $||x|| = 0$ $x = 0$

$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

$||x \cdot y|| = ||x|| \cdot ||y||$

Die trivialen Bewertungen $||x|| = 0$ für alle $x \varepsilon K$ und $||x|| = 1$ für alle $x \varepsilon K$ ausser $x = 0$ werden ausgeschlossen.

Beispiele: 1) $K = R^V$, $W = R^V$ $||x|| = |x|$

2) $K=R(i)=$ $a+bi$, $a,b \varepsilon R, W \varepsilon R^V$, $||a+bi|| =$ a^2+b^2

3) $K=R$; p Primzahl, $0 \neq a \varepsilon R$.

p-adische Bewertung: Darstellung von a als

$a = p^k \frac{m}{n}$ mit $(m,p) = (n,p) = 1$, k ganz

Man setzt: $||a|| = c^k$ für ein festes c mit $0 < c < 1$

Für $p = 2$ und $c = \frac{1}{2}$ ist zum Beispiel:

$|| \frac{1}{3} || = c^0 = 1$,

$|| \frac{1}{3} - 1|| = || - \frac{2}{3} || = c^1 = \frac{1}{2}$,

$|| \frac{1}{3} - 1 + 2|| = || \frac{4}{3} || = c^2 = \frac{1}{4}$ usw.

Daraus folgt $\frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + - \ldots$ mit Konvergenz(!) im Sinne dieser Bewertung.

Definition der konzentrierten Folge in einem bewerteten Körper:

(a_m) heisst konzentriert, wenn das Cauchysche Konvergenzkriterium

$||a_m - a_n|| \rightarrow 0$ für alle $m,n \rightarrow$ erfüllt ist.

Ein Körper K heisst vollständig, wenn jede konzentrierte Folge (a_n) $a_n \varepsilon K$ einen Grenzwert a in K hat.

Konstruktion des vollständigen Körpers zu einem bewerteten Körper K:

Für Folgen $A = (a_n)$ und $B = (b_n)$ $(a_n, b_n \varepsilon K)$ setzt man fest:

$A \pm B = (a_n \pm b_n)$

und bestätigt, dass Summe, Differenz und Produkt konzentrierter Folgen wieder konzentrierte Folgen sind.

Die reziproke Folge $A^{-1} = B$ wird in folgender Weise festgesetzt:

für $A(a_m \not\rightarrow 0)$:

$$b_n = 0, \text{ wenn } a_n = 0$$

$$b_n = a_n^{-1} \text{ sonst}$$

Mit $O = (0,0,\dots)$ und $\underline{1} = (1,1,\dots)$ bilden die Folgen A,B,C,... noch keinen Körper, da die Nullfolgen mit nicht verschwindenden Gliedern keine reziproken Folgen haben. Um einen Körper zu erhalten, führt man für konzentrierte Folgen folgende Aequivalenzrelation ein:

$$A \sim B \Leftrightarrow a_n - b_n \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Die zu einer Folge A äquivalenten Folgen B bilden die Klasse

$$\mathfrak{A}_A = \{B \mid B \sim A\}.$$

Die Klassen äquivalenter Folgen bilden einen Körper L, wenn man die Verknüpfungen wie folgt definiert:

$$\mathfrak{G} \dotplus \mathfrak{H} = \{G \dotplus H \mid G \varepsilon \mathfrak{G},\ H \varepsilon \mathfrak{H}\} = \mathfrak{K}_{G+H}$$

Die Klassen, in denen die Folgen $(a,a,\dots)$ liegen $(a \varepsilon K)$, bilden einen zu K isomorphen Unterkörper, d.h. $K \subseteq L$. Die Bewertung von K lässt sich auf L erweitern, wobei der Wertekörper W zu einem Wertekörper $\overline{W}$ erweitert werden muss.

Es wurde angedeutet, dass der Körper L vollständig ist, d.h. in L besitzt jede konzentrierte Folge einen Grenzwert.

So kommt man vom rationalen Zahlenkörper durch Betragsbewertung zum Körper der reellen Zahlen, durch p-adische Bewertung zu den p-adischen Zahlkörpern.

13.-14.7.56 Prof. Haupt.

A. Limesdefinition in s,d-Verbänden.

$\overline{\lim}\, a_n :_{\text{Def}}$ $\inf(\sup(a_k;\ k \geq n);\ n=1,2,..)$
$\underline{\lim}\, a_n :_{\text{Def}}$ $\sup(\inf(a_k;\ k \geq n);\ n=1,2,..)$
$\lim a_n :_{\text{Def}}$ der gemeinsame Wert von $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$, falls beide gleich sind.

B. Integraltheorie als Problem der Komplettierung (Vervollständigung) eines normierten Vektorverbandes von Funktionen und der entsprechenden Erweiterung eines linearen, positiven, stetigen Funktionals (M.H.Stone).

Zur Einführung: Hinweis auf die Definition des bestimmten Integrals als Unterteilungsintegral durch Konstruktion. Gegenüber dieser Konstruktion ist hier der Ausgangspunkt ein axiomatischer und das

Problem ein Erweiterungsproblem.

Es sei also gegeben

(1) ein Vektorverband v, dessen Elemente reelle (endliche) Funktionen $f|A$ sind mit einer beliebigen Menge A als gemeinsamem Definitionsbereich.

(2) ein lineares, positives, stetiges Funktional $V|v$ d.h. eine reelle endliche Funktion mit v als Definitionsbereich, die folgende Eigenschaften besitzt:

(a) für $f,g\varepsilon v$ gilt $L(f+g)=L(f)+L(g)$ und $L(af)=aL(f)$ für jede reelle Zahl a (Linearität);

(b) für $f\varepsilon v$ mit $f\geq 0$ (d.h. $f(x)\geq 0$ für jedes $x\varepsilon A$) ist $L(f)\geq 0$ (Positivität);

(c) Ist $f_n \varepsilon v$ mit $f_n \geq f_{n+1}$ und $\lim f_n=0$ (im verbandstheoretischen Sinne, d.h. $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$ und $\lim f_n(x)=0$ (punktweise Konvergenz) für jedes $x\varepsilon A$), so gilt $\lim L(f_n) =0$ (Stetigkeit).

Man setze nun $N(f)=L(|f|)$ für $f\varepsilon v$. Dann hat $N|v$ die Eigenschaften einer Quasi-Norm, oder Quasi-Bewertung $||f||=N(f)$, d.h.

(I) $N(0) = 0$, $(f) \geq 0$; $N(f) \geq 0$;

(II) $N(af)= |a|N(f)$

(III) $N(f+g)\leq N(f)+N(g)$, es gilt sogar

(III') $N(f)\leq \sum N(f_n)$, wenn $|f|\leq\sum|f_n|$ (Aus $N(f)=0$ kann aber nicht auf $f=0$ geschlossen werden). Man erweitert nun zunächst $N|v$ zu einer Quasi-Norm $N|a$ auf das System aller reellen Funktionen $h|A$, wobei $N|a$ die Eigenschaften (I)-(III') besitzt und wobei auch unendliche Werte für N zugelassen werden. Sodann komplettiert (vervollständigt) man v bezüglich N nach der im Vortrag von Prof. Kneser angegebenen Methode (Adjunktion N-konzentrierter Folgen f_n aus v, also $f_n\varepsilon v$ und $N(f_n-f_k)<e$ für $n,k>C(e)$). Dabei wird dann gezeigt, dass jede N-konzentrierte Folge gegen eine Funktion $h\varepsilon a$ im Sinne der Quasi-Norm konvergiert, d.h. dass ein $h\varepsilon a$ existiert mit $N(h-f_n) <e$ für $n>D(e)$; dazu beweist man die Existenz einer Teilfolge von f_n, die punktweise N-fast überall gegen h konvergiert. "N-fast überall" bedeutet: Ausgenommen (höchstens) in den Punkten einer Menge Q, deren charakteristische Funktion $c(x;Q)$ die Norm Null hat: $N(c(x;Q))=0$; dabei ist definiert: $c(x;Q) = 1$ oder 0, je nachdem $x\varepsilon Q$ oder $x\varepsilon A-Q$.

Im klassischen Fall, dass v etwa der Vektorverband der reellen, stetigen Funktionen f|A in dem abgeschlossenen Intervall A ist und L|v das (Cauchy)Riemannsche Integral $\int_A fdx$, führt die oben beschriebene Vervollständigung mit Hilfe der Quasi-Norm zum Lebesguesschen Integral.

Zum Schluss Hinweis auf eine Erweiterung von L|v mit verbandstheoretischen Mitteln (ohne Heranziehung einer Norm) nämlich mittels fortgesetzter Adjunktion von monoton abwechselnd steigenden und fallenden Folgen von Funktionen (beginnend mit etwa steigenden Folgen von Funktionen aus v). Diese Erweiterung führt im wesentlichen zum gleichen Ergebnis, wie die Vervollständigung mittels der Norm.

Literatur z.B. Haupt-Aumann-Pauc, Differential-und Integralrechnung, 2.Aufl. und zwar: Betr.Theorie der reellen Zahlen Bd.I.(Berlin 1948), I.und II.Abschnitt.- Betr.Theorie der Verbände (und Vektorverbände) Bd.III.(Berlin 1955), I.Abschnitt.- Betr. Theorie der linearen Funktionale Bd.III., VI.Abschnitt. Zur letzteren Theorie auch G.Aumann, Reelle Funktionen, (Berlin 1954),9.Abschnitt.