Bericht über das Kolloquium "Spezielle Funktionen" in Oberwolfach 6.-10.4. 1959

Unter dem Begriff "Spezielle Funktionen" verstand man früher alle Funktionen, die in der mathematischen Physik eine Rolle spielen, insbesondere diejenigen, die aus Lösungen der Wellengleichung entspringen. Heute werden damit alle Funktionen bezeichnet, die außerhalb der eigentlichen Funktionentheorie, einem Zweig der reinen Mathematik, eine Rolle spielen und deren Untersuchung und Aufklärung ihrer individuellen Eigenschaften von Interesse ist. Es handelt sich demnach vor allem um Funktionen, die in der Physik, in der Technik und allen Arten von Naturwissenschaften, aber auch in gewissen Gebieten der reinen Mathematik, z.B. der Zahlentheorie, auftreten. Die Aufgabe, die der Fachrichtung "Spezielle Funktionen" innerhalb der Mathematik zufällt, besteht demnach vor allem darin, für die Funktionen, die ihr aus den Anwendungen an Hand von Differentialgleichungen, Differenzengleichungen oder Funktionalgleichungen gegeben sind, a) analytische Darstellungen in Form von Reihen, Integralen etc. zu liefern, die eine Tabellierung dieser Funktionen mit Hilfe von Rechenautomaten ermöglichen, Näherungsausdrücke anzugeben, mit deren Hilfe sich Nullstellen, Eigenwerte etc. bestimmen lassen und c) nach Möglichkeiten zu suchen, die Gesamtheit der speziellen Funktionen aus einer möglichst geringen Anzahl von ihnen in einheitlicher Weise zu bestimmen. Letzteres läuft also auf die Aufstellungeines möglichst großen Relationensystems zwischen speziellen Funktionen hinaus. Gerade zur Erreichung des letzten Zieles lassen sich beträchtliche Fortschritte erkennen gegenüber den bisherigen Resultaten. Daneben werden auch Funktionen behandelt, die bisher nur für die Zahlentheorie von Interesse waren und unter anderem gezeigt, daß man die Methoden, die für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik entwickelt worden sind, auch dort mit Erfolg anwenden kann.

Das Fachgebiet der "Speziellen Funktionen" hat daher eine ausgesprochene Mittlerstellung zwischen der reinen Mathematik und den Anwendungsgebieten und ihre Arbeitsmethode besteht darin, die Sätze der reinen Mathematik nutzbar zu machen, eine Aufgabe, die in zunehmenden Maße an Bedeutung gewinnt, da die Anwendungen immer mehr auch die Erkenntnisse, die für die reine Mathematik neu sind, für ihre immer komplizierter werdenden Probleme benötigt.

Der Verlauf dieses Kolloquiums über spezielle Funktionen, das von Prof. M e i x n e r (Aachen) vorbereitet und geleitet wurde, stand denn schon rein äußerlich ganz im Zeichen der Zusammenarbeit von reiner Ma-

thematik und Bedürfnissen der Industrie, was dadurch zum Ausdruck kam, daß sowohl Industriemathematiker (die Herren R o b i n, ~~P o i n c e l o t~~ und S i p s) als auch Angehörige von Hochschulen anwesend waren. Im Vordergrund dieser Tagung stand das Bestreben, die weite Klasse der speziellen Funktionen durch übergeordnete Funktionensysteme einheitlich aufzubauen und für die Vielzahl der bestehenden Relationen und deren Herleitung ein einheitliches Prinzip anzugeben.

Der gegenüber großen Tagungen kleine Teilnehmerkreis war dem oben genannten Tagungsziel sehr förderlich, konnte doch ~~durch~~ die nur in einem solchen Rahmen mögliche ausgiebige Diskussion dazu verhelfen, eine Vereinheitlichung und Vereinfachung der Methoden zu erzielen. Besonders die ruhige und stille Atmosphäre des Lorenzenhofes, die anschließenden Gesprächen zwischen den Teilnehmern sehr dienlich ist, war dazu angetan, neue Anregungen zu vermitteln und die Tagung für alle Teilnehmer befruchtend werden zu lassen.

Bericht über die Vorträge

In einem ersten Teil wurden die hypergeometrische Funktion und gewisse, aus der hypergeometrischen Differentialgleichung durch Modifizierung der Parameter entspringende orthogonale Polynome behandelt.

Herr M e i x n e r (Aachen) brachte eine neue Charakterisierung der speziellen Funktionen vom hypergeometrischen Typ. Diese Funktionen genügen bekanntlich einer aufsteigenden Funktionalgleichung

(1) $dF(z,\alpha)/dz = F(z,\alpha+1) \qquad (\alpha = \alpha_0, \alpha_0+1, \ldots)$.

Hierdurch sind sie abernicht eindeutig charakterisiert. Es wird deshalb folgendes Funktionalgleichungsproblem betrachtet: Gesucht sind zwei linear unabhängige Funktionen $y_i(z,\alpha)$, die einer aufsteigenden Funktionalgleichung (1) genügen; man bestimme $\phi(z,\alpha)$ und eine Transformation $\xi = \xi(z)$ so, daß $Y_i(\xi,\alpha) = \phi(z(\xi),\alpha)\, y_i(z(\xi),\alpha)$ einer absteigenden Funktionalgleichung

(2) $dF(\xi,\alpha)/d\xi = F(\xi,\alpha-1)$

genügen. Der Vortragende gewinnt daraus die hypergeometrische Differentialgleichung mit der einen Lösung $F(a+\alpha, b+\alpha; c+\alpha; z)$ und hat dadurch eine eindeutige Charakterisierung.

Herr M e u l e n b e l d (Delft,Holland) berichtete über einige neue Eigenschaften der von Herrn K u i p e r s und ihm eingeführten verallgemeinerten Legendreschen Polynome $P_k^{m,n}(z)$ und zeigte unter anderem, daß sie sich in eine endliche Summe von hypergeometrischen Funktionen quadratischen Arguments aufspalten lassen. Herr K u i p e r s (Delft, Holland) behandelte eine Arbeit von Bateman über eine andere Verallgemeinerung der Legendreschen Polynome. Man gehe aus von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_4^2} = 0$$

Durch einen geeigneten Transformationsschritt und separierten Ansatz findet man für einen sepearierten Teil eine hypergeometrische Differentialgleichung mit der einen Lösung $W = F((n+m+k+2)/2, (-n-m-k)/2; k+1; t)$. Nach einer Multiplikation mit einem Polynom in t gewinnt man hieraus die von Bateman betrachtete Verallgemeinerung der Legendreschen Polynome, die in zusammenhang mit den oben genannten $P_k^{m,n}(z)$ gebracht wird.

Herr S c h o t t l ä n d e r (Hannover) bewies einen Satz über Reihenentwicklungen nach Laguerreschen Polynomen. Es sei f(z) in z = 0 eine eindeutige und reguläre Funktion; α eine komplexe Größe mit Re α -1 und $\tau > 0$. Ferner sei definiert

$$\varphi_\alpha(z) = \exp(-z^2/2)\ z^{\alpha+1/2}\ f(z^2)\ ;$$

$\varphi_\alpha(z)$ sei regulär für $z \neq 0$, $x \geq 0$, $-\tau < y < \tau$, mit ev. Ausnahme einer Umgebung des Nullpumktes $|z| < \delta < \tau$. Fernergebe es für jedes β mit $0 \leq \beta < \tau$ eine endliche positive Schranke B_β mit

$$|\varphi_\alpha(z)| \leq B_\beta\ e^{-x\sqrt{\beta^2 - y^2}}\ .$$

Dann konvergiert die Entwicklung von f(z) nach Laguerreschen Polynomen undstellt nach einem Satz von Carleman f(z) dar, Re $\sqrt{-z} < \tau$

Herr C a m p b e l l (Caen, Frankreich) leitete Formeln für die Berechnung der Cesároschen Mittel für gewisse klassen von Orthogonalpolynomen her, die man der bekannten Fejerschen Formel an die Seite stellen kann. Als Spezialfälle sind darin die Hermiteschen, Tschebyscheffschen und Laguerreschen Polynome enthalten.

Herr R o b i n (Paris) untersuchte die Legendreschen Funktionen $P_n^m(z)$ in Abhängigkeit vom Parameterpaar m,n und leitete insbesondere asymptotische Entwicklungen für große Werte von m,n her. In einem weiteren Vortrag, den er an Stelle des verhinderetn Herrn P o i n c e l o t (Paris) hielt, wurde die Anwendung von Besselfunktionen auf Einschaltvorgänge bei elektrischen Netzwerken besprochen und gezeigt, wie man schlecht konvergente Reihen nach Besselfunktionen so transformieren kann, daß sie numerisch mit Rechenmaschinen gut behandelt werden können.

Herr L e i t n e r (z.Zt. Aachen) berichtete über eine Verallgemeinerung der Sphäroidfunktionen.Man gehe von einer verallgemeinerten Wellengleichung $\Delta^2 u + \phi(x,y,z,)u = 0$ aus. ϕ sei durch die Annahme beschränkt, daß diese Gleichung in zwei (oder mehreren) orthogonalen Koordinatensystemen simultan separierbar ist; daraus lassen sich viele Relationen zwischen speziellen Funktionen durch ein einheitliches Prinzip herleiten.

Herr M a i e r (Jena) leitete aus einem Additionssatz zweiter Stufe für die Riemannsche ζ-Funktion ein quadratisches Mittel her, das eine

Verallgemeinerung einer von Hardy-Littlewood angegebenen Mittelbildung ist und zeigte den Weg zur Berechnung höherer Mittelbildungen. Herr K n o b l o c h (München) modifizierte die Riemann-Siegelsche Methode zur asymptotischen Darstellung der ζ-Funktion, um das dort in der asymptotischen Entwicklung auftretende Hauptglied $\sum_{\nu=1}^{h(t)} \nu^{-s}$ durch eine andere Summe $\sum_{\nu=1}^{h(t)} (G(\varrho\nu, s))$ zu ersetzen, wobei G eine Lösung der Differentialgleichung $-y'' + xy' + sy = 0$ ist, die durch eine elementare Transformation aus der Hermiteschen Differentialgleichung hervorgeht.
Herr K o s c h m i e d e r (Tübingen) gab als Verallgemeinerung einer Integralformel von Ragab für die hypergeometrische Funktion, die sich als transzendentes Additionstheorem bezüglich der Parameter a,b,c, deuten läßt, eine ähnliche Formel und Abwandlungen für die allgemeineren Lauceraschen Reihen an, die die Ergebnisse von Ragab für spezielle Parameterwahl wieder enthalten.
Herr K i y e k (Würzburg) zeigte, daß durch Summation über ein Viertel- oder Halbgitter (statt wie bei den elliptischen Funktionen über das Vollgitter der Ebene) Funktionen entstehen, die als Verallgemeinerung der φ- und Γ-Funktion aufgefaßt werden können und gab Integraldarstellungen, asymptotische Entwicklungen und ein Analogon des Satzes von Hermite an.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft