1961,3

Bericht über die Tagung "Grundlagen der Geometrie" in Oberwolfach vom 13. bis 2o. April 1961.

~~Teil I~~

An der Tagung "Grundlagen der Geometrie" im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach vom 13. bis 2o. April 1961 nahmen 35 Mathematiker ~~Professoren, Assistenten und Promovenden~~, davon 24 als Referenten, teil. Unter den Teilnehmern befanden sich neun Ausländer aus sechs Staaten: Frau Dr. Smielew, Warschau; Prof. Szabó und Dr. Strommer, Budapest; Prof. Springer und Dr. Veldkamp, Utrecht; Prof. Neerup, Birkerød bei Kopenhagen; Prof. Lombardo-Radice, Rom; Dr. Barlotti, Florenz; Mr. Jonsson, Manitoba. Erfreulicherweise war auch die Humboldt-Universität Berlin durch Dr. Schwabhäuser und Herrn Bothe vertreten.

Unter der Leitung von Prof. Bachmann, Kiel, + Prof. Sperner verlief die Tagung in bester wissenschaftlicher Atmosphäre. ~~Die vielen Referate gaben häufig Anregungen zu privaten Diskussionen mit dem Vortragenden.~~ Durch die ~~vergleichsweise~~ starke Beteiligung von Ausländern wurde besonders den jüngeren Teilnehmern ein Einblick in den internationalen Stand der geometrischen Grundlagenforschung vermittelt. Die Fülle des behandelten Stoffes gab zahlreichen Teilnehmern wertvolle Anregungen und Hinweise für ihre eigene Forschungstätigkeit.

~~Teil II~~

Zum ersten Mal kam im Rahmen ~~dieser~~ einer solchen Tagung mit Prof. Szabó ein Mathematik-Historiker zu Wort. Stärker als sonst war auch die mathematische Logik durch Prof. Lorenzen, Frau Dr. Smielew und Dr. Schwabhäuser vertreten. ~~wobei besonders der Vortrag von Prof. Lorenzen, in dem er eine protophysikalische Begründung der euklidischen Geometrie skizzierte, eine lebhafte Diskussion auslöste.~~

~~Erwartungsgemäß war kein Vertreter der algebraischen Geometrie anwesend, auch der analytische Teil der Geometrie kam nur durch das topologische Mittel verwendende Referat von Herrn Bothe zu Wort. Kein Referent behandelte Fragen der Kreisgeometrie direkt, und nur Prof. Lombardo-Radice trug über endliche Geometrien vor.~~

~~Unter den drei Vorträgen über Spiegelungsgeometrie~~ fande

legte Prof. ~~Neerup im Anschluß an Hjelmslev ein Axiomensystem~~ vor, das zu Geometrien über pythagoreischen lokalen Ringen führt. Prof. Lenz entwickelte eine Alternative zu Bachmanns Axiomensystem, und Dr. Scherf lieferte eine Begründung der räumlichen hyperbolischen Geometrie. Als Abrundung einer Dehnschen Arbeit gab ~~Dr.~~ Pejas eine elliptische Geometrie an, in der die Winkelsumme im Dreieck je nach Anordnung des Koordinatenkörpers einmal größer und einmal kleiner als 180° ist. Dr. Strommer referierte über Konstruktionsmöglichkeiten in der ~~hyperbolischen Geometrie~~.

Einen breiten Rahmen ~~Raum~~ nahmen die Betrachtungen verallgemeinerter Inzidenz- und Anordnungsstrukturen mit etwa sechs Referaten ein, an denen die Sperner-Schüle~~r~~ stark beteiligt waren. Zu diesen traten noch zwei Arbeiten über Gruppenräume von Dr. Karzel und Dr. Ellers. neben 3 Referaten über Spiegelungsgeometrie

Auf viel Interesse stießen die Vorträge über klassische (orthogonale und andere) Gruppen. Behandelt wurden u.a. ~~Dr. Lingenberg gab einige Beispiele~~ nicht einbettbare~~r~~ Bewegungsgruppen, ~~Dr. Wolff gab ein Verfahren an, aus abstrakt gegebenen den zugehörigen Vektorraum zurückzugewinnen. Prof.~~ ~~orthogonalen Gruppen~~. ~~Springer und Dr. Klingenberg untersuchten Liesche Gruppen, und zwar gab Dr. Klingenberg die Lage der~~ Normalteiler in Lieschen Gruppen über lokalen Ringen ~~an, wogegen Prof. Springer gewisse~~ und Liesche Ausnahmegruppen ~~mit Hilfe der Moufang-Ebenen über Oktavkörpern deutete~~.

~~Teil III~~

~~Kurze Besprechung~~ Die Vorträge im einzelnen:

Vornamen !! (abgekürzt !)

~~Prof.~~ Lorenzen (Kiel): Das Begründungsproblem der Geometrie.

Der Referent ~~Prof. Lorenzen~~ betrachtet die Geometrie als eine protophysikalische Theorie, die empirisch nicht widerlegbar ist, da sie die Begriffe, mit denen man räumliche Erfahrungen macht, erst bereitstellt. Er begründet diese protophysikalische Geometrie aus Homogenitätsprinzipien, die die Einführung geometrischer Grundbegriffe und die Ableitung klassischer Orthogonalitäts- und Parallelenaxiome gestatten. ~~Nimmt man die unter diesem Aspekt unproblematischen Existenz-~~, Inzidenz- und Anordnungsaxiome sowie das archimedische Axiom hinzu, so erhält man als gültige Geometrie die räumliche euklidische Geometrie ~~über einem reellen Zahlkörper~~.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

~~Dr.~~ Karzel (Hamburg): Gruppenräume und Inzidenzgruppen.

~~Dr. Karzel~~ verallgemeinert Der ~~den~~ Begriff des Gruppenraumes wird zu dem der Inzidenzgruppe, ~~einer Gruppe,~~ deren Elemente zugleich Punkte eines desarguesschen projektiven Raumes der Dimension > 1 sind, in dem die Linksmultiplikationen Kollineationen darstellen. Er charakterisiert die Inzidenzgruppen algebraisch dadurch, daß er jeder Inzidenzgruppe eineindeutig einen normalen Fastkörper zuordnet.

~~Dr.~~ Ellers (Hamburg): Involutorische und endliche Gruppenräume.

~~Im Anschluß daran~~ betrachtet Es werden ~~Dr. Ellers~~ Gruppenräume, in denen zwei Elemente inzident heissen ~~genannt werden~~, wenn ihr Produkt einem gegebenen invarianten Komplex D vom Exponenten 2 angehört. Ein solcher Gruppenraum ist immer eine Inzidenzgruppe. In dem besonderen Fall, daß zwei Elemente aus D immer ein involutorisches Produkt haben, wird der Fastkörper zu einem kommutativen Körper der Charakteristik 2~~, der durch Adjunktion von Quadratwurzeln aus seinem Grundkörper entsteht. Umgekehrt entspricht jedem solchen Körperpaar ein involutorischer Gruppenraum. Jede endliche Inzidenzgruppe ist ein Gruppenraum~~.

~~Dr.~~ Schwabhäuser (Berlin): Grundlagen der elementaren hyperbolischen Geometrie.

Dr Ref. ~~Dr. Schwabhäuser, Schüler des mathematischen Logikers Prof. Schröter,~~ gibt ein vollständiges elementares Axiomensystem für die räumliche hyperbolische Geometrie an. Zur Algebraisierung benutzt er ~~dabei~~ eine elementar ~~(d.h. ohne Mengenvariable)~~ formulierte Hilbertsche Endenrechnung. ~~Dieses Hilfsmittel~~ zum Unterschied ~~et seine Methode von dem~~ von Tarski und W. Smielew ~~beschrittenen Weg.~~

Frau ~~Dr.~~ W. Smielew (Warschau): A New Analytic Approach to Absolute Geometry.

Analog zu ihrer elementaren Begründung der hyperbolischen Geometrie formuliert Frau ~~Dr.~~ Smielew ein Axiomensystem mit den Relationen Inzidenz, Anordnung und Distanz ohne ein Parallelenaxiom. In diesem System führt sie eine Streckenrechnung ein, die gleichermaßen für die euklidische wie für die hyperbolische Geometrie anwendbar ist. ~~So erhält man ein Strecken- oder Segmentsystem, das sich in einen euklidischen Körper einbetten läßt und in diesem ein offenes Intervall mit linkem Ende 0 bildet. Das Verfahren bedeutet eine Vereinheitlichung der beiden getrennten Methoden Hilberts.~~

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

~~Prof.~~ Neerup (Birkerød): Über die Hjelmslevsche Kongruenzlehre.

~~Prof. Neerup legt~~ Im Anschluß an ~~Verfolg von~~ Hjelmslevs Kongruenzlehre wird ein spiegelungsgeometrisches Axiomensystem mit freier Beweglichkeit und mehrfach verbindbaren Punkten zugrunde gelegt. Als Koordinatenbereich ergibt sich ein Hjelmslev-Ring, und die Metrik wird durch eine einzige Orthogonalitätskonstante k bestimmt. Diskussion einiger offener Fragen. ~~wobei das Verhältnis von k zu den verschiedenen Geometrien nicht vollständig geklärt ist, z.B. wenn k Nullteiler ist. Unter anderen offenen Fragen erwähnt Prof. Neerup auch die, ob es Modelle für inhomogene Ebenen gibt.~~

~~Prof.~~ Szabó (Budapest): Die Vorgeschichte der euklidischen Grundlegung der Geometrie.

Der Ref. ~~Prof. Szabó~~, von Haus aus Altphilologe, untersucht das euklidische Begriffssystem der definitiones, postulata und communes animi conceptiones auf seine Herkunft. Er weist nach, daß insbesondere die später wieder verlorengegangene Unterscheidung von postulata und communes animi conceptiones in der Auseinandersetzung mit der eleatischen Identitätsschule entstanden ist, auf die letztlich auch die systematische Strenge der bei Euklid gesammelten mathematischen Beweise zurückgeht.

~~Dr.~~ André (Braunschweig): Homomorphismen von Translationsebenen.

~~Dr. André~~ Untersucht werden Stellen der den Translationsebenen ~~(nicht eindeutig)~~ zugeordneten Quasikörper, insbesondere ~~betrachtet er~~ welcher Quasikörper Q, die aus den rationalen Zahlen R durch Adjunktion einer Quadratwurzel und passende Definition der Multiplikation entstehen. Während Stellen von Q auf R echte Stellen induzieren, ist umgekehrt nicht jede (Prim-)Stelle von R auf Q fortsetzbar. ~~Die zahlentheoretische Charakterisierung so definierter Primzahlmengen ist nur teilweise gelöst.~~

~~Dr.~~ Klingenberg (Göttingen): Liesche Gruppen über lokalen Ringen.

Nach ~~dem Vorgang von~~ Chevalley ~~erklärt Dr. Klingenberg~~ wird der ~~den~~ Begriff einer Lieschen Gruppe über einem lokalen Ring L erklärt. Dies liefert für jeden der Typen einer einfachen Lieschen Gruppe eine der reellen Normalform entsprechende Gruppe über L. ~~Dr. Klingenberg beschreibt die Lage der invarianten Untergruppen.~~ In Übereinstimmung mit ~~seinen~~ früheren Untersuchungen ~~über lineare und orthogonale Gruppen~~ zeigt ~~er~~ der Ref., daß die invarianten Untergruppen in Klassen C(J) zerfallen, die eineindeutig den Idealen $J \neq L$ von L entsprechen. ~~Jede Klasse C(J) besitzt ein größtes und ein kleinstes Element, daß sich mit Hilfe der Kongruenzen nach J beschreiben läßt.~~

~~Dr.~~ Benz, Mainz: Süss'sche Gruppen in affinen Ebenen mit Nachbarelementen und allgemeineren Strukturen.

Aus einem ~~Dr. Benz gibt ein~~ Axiomensystem für die Süss'sche ~~oder~~ (äquiforme) Gruppe werden ~~an und leitet aus diesem~~ einige Winkeleigenschaften der verallgemeinerten affinen Ebene abgeleitet, aus denen umgekehrt wieder die Existenz der Süss'schen Gruppe in dieser Ebene folgt. Durch ~~Weiter gibt er~~ eine geeignete Forderung für die Süss'sche Gruppe wird ~~an, durch die~~ die Gruppe der singulären Winkel zu einem Normalteiler in der Gruppe aller Winkel ~~wird~~. ~~Die Faktorgruppe nach diesem Normalteiler ist dann die Winkelgruppe der gewöhnlichen affinen Ebene~~.

~~Dr.~~ Joussen, Hamburg: Anordnungsfähigkeit der freien Ebenen.

~~Dr. Joussen zeigt, daß sich~~ Jede (im M. Hallschen Sinne) endlich erzeugte freie Ebene läßt sich anordnen ~~läßt~~. Als Hilfsmittel werden ~~benutzt er~~ definite Spernersche Ordnungsfunktionen benutzt ~~und zeigt~~, ~~daß~~ Jede Anordnung einer regulären halbprojektiven Inzidenzstruktur auf ihre erste Oberstruktur fortsetzbar ist.

~~Dr.~~ Lenz, München: Absolute Bewegungsgeometrie.

~~Dr. Lenz stellt nur~~ Aus den Grundbegriffen "Punkt" und "Bewegung" läßt sich ein Axiomensystem aufstellen, das dem Bachmannschen einschließlich ~~zuzüglich~~ des Axioms $\neg P$ (nichtelliptische Geometrie) gleichwertig ist. Die Gerade wird als Fixpunktmenge einer Bewegung $\neq 1$ definiert, die ~~schon~~ wenigstens zwei Fixpunkte hat.

~~Dr.~~ Pejas, Aachen: Über die Winkelsumme im Dreieck.

Auf der Grundlage der Hilbertschen Axiomgruppen I-III läßt sich die Winkelsumme im Dreieck definieren. Nach ~~einem Satz von~~ Schur ist ~~gilt:~~ die metrische Konstante der Geometrie ~~ist~~ genau dann $\gtreqless 0$, wenn die Winkelsumme im Dreieck $\gtreqless 2R$ ist. ~~Dr. Pejas zeigt~~ An einem Beispiel wird gezeigt, daß diese ~~Einteilung~~ unabhängig von der Einteilung in elliptische, euklidische und hyperbolische Geometrien ist. Ausgehend von einem zweifach geordneten Körper wird ~~er~~ ein Oberkörper konstruiert, in dem alle doppeltpositiven Elemente Quadrate sind. In jeder elliptischen Geometrie über diesem Körper herrscht freie Beweglichkeit. ~~Für passende nichtarchimedische Körper induzieren beide Körperordnungen Anordnungen der Geometrie, in denen die Winkelsumme einmal < 2R, einmal > 2R ist.~~

~~Dr.~~ Lingenberg (Hannover): Konstruktion von S-Gruppen mit eigentlichen Büscheln.

~~Dr. Lingenberg~~ konstruiert innerhalb der $O_3^+(K,f)$ mit Rang f = 3 und ~~dem~~ rationalen Zahlkörper als ~~K~~ (welche) S-Gruppen als Untergruppen, ~~die nicht einbettbar sind, d.h. deren Idealebene~~ nicht die volle rationale Ebene ist. Auch nach Hinzunahme der Forderung, daß es eigentliche Büschel gibt, ~~kann er~~ lassen sich Beispiele ~~von S-Gruppen~~ angeben, die noch nicht dem Spernerschen Axiomensystem genügen, bei denen also nicht jede Gerade in drei eigentlichen Büscheln enthalten ist. ~~Diejenigen Geraden, die in drei eigentlichen Büscheln liegen, erzeugen aber nur eine echte Untergruppe der gegebenen S-Gruppe.~~

Scherf (Kiel): Hyperbolische Raumgeometrie.

~~Herr Scherf~~ Der Ref. begründet die hyperbolische Raumgeometrie aus dem Spiegelungsbegriff durch Zusatzaxiome zum gruppentheoretischen Axiomensystem des absoluten Raumes von Ahrens. Das Axiomensystem kennzeichnet die $PO_4(K,f)$ über geordneten Körpern mit Formen vom Trägheitsindex 1. Im Falle eines euklidischen Koordinatenkörpers lassen sich Beziehungen zur Kreisgeometrie von Benz und Ewald herstellen.

Biallas (Hamburg): Eine Verallgemeinerung des Doppelverhältnisses und ihre geometrische Deutung.

~~Herr Biallas~~ Verallgemeinert das von E. Sperner 1949 angegebene Doppelverhältnis zu einem ~~Matrizen~~produkt, ~~wie es auch schon A. Fuhrmann 1956 betrachtet hat~~. Die Untersuchungen zeigen viele Ähnlichkeiten mit dem Doppelverhältnis einer Punkt-Hyperebenen-Konfiguration, besonders in Bezug auf verallgemeinerte Perspektivitäten. Die Existenz einer Kette von Homomorphismen erweist~~e~~ sich als äquivalent mit der Gleichheit der Doppelverhältnisse zweier Quadrupel. ~~Damit ist gleichzeitig eine geometrische Deutung geliefert.~~

~~Prof.~~ Lombardo-Radice (Rom): Über gewisse Klassen taktischer Zerlegungen einer endlichen projektiven Ebene.

~~Prof. Lombardo-Radice~~ Der Ref. konstruiert Beispiele von vollständigen (p+5)/2-Bögen in endlichen desarguesschen Ebenen der Primzahlordnung $p \equiv 3 \pmod 4$. Ein vollständiger k-Bogen ist eine Menge von k Punkten, von denen keine drei kollinear sind, die aber nach Hinzunahme eines beliebigen weiteren Punktes drei kollineare Punkte enthält.

~~Prof.~~ Springer (Utrecht): Moufang-Ebenen und Ausnahmegruppen.

~~Professor Springer gibt eine~~ Geometrische Deutung für die Lieschen Ausnahmegruppen vom Typ E_6 mit Hilfe der Moufang-Ebenen über Oktavkörpern. Zu jedem Oktavkörper C der Charakteristik $\neq 2,3$ gehört eine eindeutig bestimmte projektive Ebene P_C, in der der kleine Satz von Desargues gilt. Die Kollineationsgruppe von P_C steht zu einer Gruppe vom Typ E_6 in einer ganz entsprechenden Beziehung wie die Kollineationsgruppe einer desarguesschen Ebene zu einer Gruppe $SL_3(K)$. ~~Leider ist die Konstruktion von P_C bisher nur auf dem Umweg über gewisse einfache Jordansche Ausnahmealgebren möglich, obgleich P_C nicht von diesen Algebren, sondern nur von C abhängt.~~

~~Dr.~~ Dembowski (Frankfurt): bringt als Zusatz einen kurzen Beweis für die Einfachheit der kleinen projektiven Gruppe einer Moufang-Ebene.

~~Dr.~~ Strommer (Budapest): Elementargeometrische Konstruktionen mittels Lineal und Eichmaß sowie mit dem schiefen Zeichenwinkel, dem Winkelhalbierer oder dem Parallelenlineal in der hyperbolischen Geometrie.

In der hyperbolischen Geometrie reicht, wenn auf dem Zeichenblatt zwei Parallelen gegeben sind, zur Lösung aller Aufgaben, welche mit Zirkel und Lineal lösbar sind, jedes der folgenden Instrumente für sich aus: ein fester schiefer Winkel, ein Lineal, auf dessen Kante zwei Punkte markiert sind, oder der Winkelhalbierer. Das Lineal mit zwei parallelen Kanten kann in der hyperbolischen Geometrie Zirkel und Lineal völlig ersetzen.

~~Dr.~~ Salzmann (Frankfurt): Gruppentreue Einbettungen in nicht-desarguessche projektive Ebenen.

~~Dr. Salzmann gibt die~~ Die sämtlichen nicht-desarguesschen projektiven Erweiterungsebenen des Kleinschen Modells werden angegeben, deren Kollineationsgruppe genau die Gruppe der geraden hyperbolischen Bewegungen ist.

~~Dr.~~ Arnold (Hamburg): Affine Strahlenräume und ihre Ferngebilde.

~~Dr. Arnold geht von~~ Ausgangspunkt ist ein affines Axiomensystem über Punkte, Strahlen und zwei Inzidenzrelationen ~~aus~~. Im Spezialfall der Identität der beiden Relationen ergeben sich affine Räume mit schwacher Inzidenz, wie sie E. Sperner angegeben hat. Der Vortragende gibt für sein System eine Algebraisierung von

verbandstheoretischem Charakter an. ~~führt den Fernraum des~~ Strahlenraums ein und zeigt, ~~daß~~ Familien ~~affiner~~ Ebenen ~~unter~~ gewissen Einschränkungen nicht-desarguessche ~~affine~~ Räume aufspannen.

Bothe (Berlin): Ein elementares topologisches Problem von Steinhaus.

Zu jedem Paar diametraler Punkte einer Kreislinie in einer reellen euklidischen Ebene sei ein im Kreisinnern verlaufender Bogen ~~(topologisches Bild einer Strecke)~~ gegeben, der die beiden Punkte verbindet. Die Abhängigkeit der Bögen, ~~als Punktmengen aufgefaßt,~~ von den Randpunktepaaren sei stetig. ~~Herr Bothe beweist~~ Ohne Benutzung algebraischer Topologie läßt sich beweisen, daß es dann im Kreisinnern einen Punkt gibt, durch den mindestens drei der Bögen gehen. ~~Außerdem gibt er ein Beispiel an, in dem durch keinen Punkt mehr als drei Kurven laufen.~~

~~Dr.~~ Wolff (Kiel): Zur Kennzeichnung orthogonaler Gruppen.

Als Vorstufe zur Lösung der Aufgabe, die orthogonalen Gruppen $O_n(K,f)$ gruppentheoretisch zu charakterisieren, ~~gibt Dr. Wolff~~ wird ein Verfahren ~~an,~~ angegeben, mit dem man aus der $O_n(K,f)$ den Raum $V_n(K,f)$ zurückgewinnen kann. ~~Sein~~ Das Verfahren läßt sich bei Formen von beliebigem Index anwenden.

Glock (Stuttgart): Kollineationen, die mit einer Orientierungsfunktion verträglich sind.

~~Herr Glock zeigt, daß~~ Eine Orientierungsfunktion eines desarguesschen affinen Raumes ist genau dann mit jeder affinen Abbildung verträglich ~~ist~~, wenn sie einer vorgegebenen Hyperebenenrelation und einer Parallelenbedingung genügt. Ferner ist eine Kollineation eines desarguesschen affinen Raumes genau dann mit einer solchen Orientierungsfunktion verträglich, wenn jedes Element des Koordinatenbereiches hinsichtlich der Orientierungsfunktion denselben Wert wie sein Bild unter dem zur Kollineation gehörigen Automorphismus hat.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft