

7961,4

Math. Forschungsinstitut
Oberwolfach
E 20/07946

B e r i c h t
über das

Kolloquium über Geordnete Mengen

23. bis 28. April 1961

Vom 23. bis 28. April 1961 wurde im mathematischen Forschungs-
institut Oberwolfach ein Kolloquium über geordnete Mengen ab-
gehalten. Die Anregung, dies zu tun, war im Januar 1961 von
F.W. LEVI (Freiburg) ausgegangen, der jedoch an dem Kolloquium
selbst nicht teilnehmen konnte. Präsident des Kolloquiums war
L. LESIEUR (Paris); Teilnehmer waren M.L. DUBREIL-JACOTIN,
P. DUBREIL, R. CROISOT, M. EGO, J. FORT, P. LEFEBVRE (alle aus
Frankreich), M. CURZIO (Italien), G. BIRKHOFF (USA), G. KUREPA
(Jugoslawien), E.T. SCHMIDT (Ungarn), M. NOVOTNY und F. ŠIK
(ČSSR), G. BRUNS, W. FELSCHER, G. GRIMEISEN, E. HARZHEIM,
J. SCHMIDT, D. SCHUMACHER, E.A. BEHRENS (Deutschland).

Nach N. BOURBAKI zählt man, neben der Algebra und der Topologie,
die Theorie der geordneten Mengen zu den drei Grundstrukturen der
Mathematik, deren Gegenstand eben das Studium dieser Grundstruk-
turen ist, versehen dann mit zusätzlichen Eigenschaften und auf
mannigfache Weise untereinander kombiniert. Doch hat sich die
Theorie der geordneten Mengen, an Jahren jünger als die beiden an-
deren Disziplinen, bisher noch nicht zu einer solchen Fülle ent-
wickelt wie jene. Viele einzelne Probleme sind noch zu lösen, vor
allem aber ist es an der Zeit, einheitliche Gesichtspunkte zu
suchen, ja, neue Subtheorien zu erfinden, von denen man erwarten
kann, daß dann mit einem Schlage ganze Reihen von Sätzen sich er-
geben, die bisher einzeln, wenig durchsichtig und scheinbar zu-
sammenhanglos bewiesen werden mußten, wenn sie nicht überhaupt
bloß vermutet wurden.

Diese beiden, von einander abhängigen Aufgaben - Lösung einzelner
Probleme, Analyse der Beweismethoden, Abstraktion der inneren Zu-
sammenhänge - waren es, deren Behandlung das zu beschreibende
Kolloquium gewidmet war. Ein besonderes Gewicht verlieh ihm die

Teilnahme von G. BIRKHOFF, der in den dreißiger und vierziger Jahren die seit DEDEKIND und HAUSDORFF dahinschlummernden verbands- und ordnungstheoretischen Untersuchungen in einer Reihe bahnbrechender Arbeiten wieder aufnahm und danach, 1948, in seiner enzyklopädischen Lattice Theory den damaligen Stand der Theorie referierte. Höhepunkte des Vortragsprogramms waren wohl die Mitteilungen von E.T. SCHMIDT und G. BRUNS, die beide, jeweils in ihrem Problemkreis, durch Verallgemeinerung vorhandener Begriffe schlagkräftige Theorien erfanden, nicht mehr bloß Beweise, sondern auch Gründe dafür angeben konnten, viele neue Sätze und leichten Zugang zu schon bekannten Ergebnissen fanden, welche bislang oft nur mühsam einzusehen waren. Im übrigen verteilten sich die Teilnehmer des Kolloquiums auf zwei disjunkte Klassen: die einen, deren Interesse verbands- und ordnungstheoretischen Fragen galt, welche gelegentlich natürlich auch aus anderen mathematischen Disziplinen entsprossen sein und dort vielleicht wieder Anwendungen gestatten mochten, und die anderen, die sich mit algebraischen Untersuchungen über Moduln und Halbgruppen befaßten. Leider hatte eine Anzahl bedeutender Forscher des Auslandes wegen Zeit- und (aus dem östlichen Ausland) Visaschwierigkeiten den Einladungen nicht folgen können.

G. KUREPA (Zagreb) gab einen Überblick über Resultate und Probleme aus der allgemeinen Theorie der geordneten Mengen: Klassifikationsschemata besonders hinsichtlich total- und wohlgeordneter Teilmengen; bei der Typenfestlegung spielen kardinale und ordinale Invarianten eine Rolle. G. BRUNS (Mainz) berichtete aus seinen Untersuchungen über Darstellungen und Erweiterungen geordneter Mengen mit Anwendungen auf die \mathcal{M} -subdirekten Darstellungen vollständiger Verbände (d.h. voll infimumtreuer Ordnungsisomorphismen in Produkte vollständiger Ketten, die für Mengen aus \mathcal{M} auch supremumtreu sind); seine Ergebnisse umfassen Sätze von BÜCKI, S. PAPERT und RANEY. E.T. SCHMIDT (Budapest) teilte die von ihm gemeinsam mit G. GRÄTZER gefundene Lösung des BIRKHOFF'schen Problems 50 mit: genau die kompakt erzeugten Verbände sind den Kongruenzverbänden einer Algebra mit finitären Operationen isomorph; die Typen dieser Algebren lassen sich in Beziehung zu denen der dargestellten Verbände setzen, wodurch sich Darstellungs-

sätze von WHITMAN und JONSSON ergeben. J. SCHMIDT (Köln) sprach über die Beziehungen zwischen hüllentheoretischer und algebraischer (d.h. im Sinne von E. MARCZEWSKI) Unabhängigkeit für Algebren mit finitären Operationen; bezieht man sich bei der Definition der algebraischen Unabhängigkeit einer Teilmenge M nur auf das Erzeugnis von M , so ist etwa die Existenz maximaler solcher relativ algebraisch unabhängiger Mengen (ganz wie im hüllentheoretischen Fall) dem TEICHMÜLLER-TUKEYSchen Lemma äquivalent. G. BIRKHOFF (Cambridge, Mass.) berichtete über multiplikative Prozesse (nämlich einparametrische Semigruppen nichtnegativer linearer Abbildungen) in archimedisch geordneten Vektorverbänden und bewies dazu Existenzsätze für verallgemeinerte Eigenvektoren; zu Grunde lagen Probleme der Reaktortheorie. M. NOVOTNY (Brno) sprach über isotone Funktionale geordneter Mengen, deren Werte in beschränkt vollständigen, in sich dichten Ketten liegen; eine Dualitätstheorie wurde entwickelt, bei der unter gewissen Voraussetzungen Isomorphismen zwischen geordneten Mengen aus geeigneten Isomorphismen ihrer dualen Räume (der geordneten Mengen der isotonen Funktionale) konstruiert werden können. F. ŠIK (Brno) diskutierte dann die Existenz- und Fortsetzungsfragen für isotone additive Funktionale auf geordneten Gruppen. E. HARZHEIM (Köln) verschärfte den Satz von HAUSDORFF-URYSOHN und gab Beziehungen zwischen der Kardinalzahl einer Menge von Totalordnungen einer Menge E und der Kardinalzahl einer Teilmenge von E an, auf der sämtliche diese Totalordnungen die gleiche Zwischenrelation induzieren. G. GRIM-EISEN (Stuttgart) sprach über die gefilterte Summation von Filtern (eine Verallgemeinerung der Konstruktion einfacher Folgen aus Doppelfolgen) und die Kennzeichnung einstufiger Limesräume. W. FELSCHER (Freiburg) berichtete über Hülleninduktion bei mehreren definierenden Abbildungen und gab eine Analyse des zweiten ZERMELO-schen Beweises des Wohlordnungssatzes und die daran anknüpfenden Konstruktionen wohlgeordneter Teilmengen geordneter Mengen.

L. LESIEUR (Paris) kennzeichnete die \mathfrak{a} -irreduziblen endlich erzeugten Moduln über unitären linksnoetherschen Ringen A und führte dazu das Herz $C(M)$ eines Moduls M über A ein: sei $E(M)$ die injektive Hülle von M , $C(E(M))$ der Durchschnitt aller von $\{0\}$ verschie-

denen Kerne von A -Endomorphismen von $E(M)$, $C(M) = M \cap C(E(M))$; $C(M)$ ist ein Vektorraum, dessen $\bar{\tau}$ -isotype Untermoduln eine projektive Geometrie bilden (X $\bar{\tau}$ -isotyper Untermodul von M , wenn $E(M/X)$ direkte Summe zu $E(M)$ isomorpher injektiver unzerlegbarer Untermoduln ist); M ist α -irreduzibel, genau wenn M isotyp ist und, falls $\bar{\tau}$ der Typ von M , in $C(M)$ kein $\bar{\tau}$ -isotyper nichttrivialer Untermodul existiert. R. CROISOT (Besançon) untersuchte die komplementären Untermoduln K eines Moduls M über einem nichtkommutativen Ring (d-h. es existiert ein Untermodul N von M so, daß K maximal für $N \cap K = \{0\}$); zwischen $C(M)$ und einem Faktorring des Endomorphismenringes von $E(M)$ läßt sich eine Galois-Korrespondenz einrichten, deren Fixelemente eine projektive Geometrie der Dimension $\dim C(M)$ bilden. M. CURZIO (Napoli-Paris) gab Nilpotenzkriterien für endliche Gruppen: unter geeigneten Voraussetzungen kann aus der Isomorphie der Normalteiler- oder Subnormalteilerverbände zweier Gruppen und der Nilpotenz der einen auf die der anderen geschlossen werden. Mme M.L. DUBREIL-JACOTIN (Paris) diskutierte die Vorzüge des Zornschen Lemmas gegenüber dem Wohlordnungssatz bei Beweisen in der Algebra. P. DUBREIL (Paris) führte einige Begriffe für Halbgruppen ein und wandte sie auf die Endomorphismenhalbgruppe einer Gruppe an. M. EGO (Paris) kennzeichnete die Halbgruppen mit distributivem Verband aller Subhalbgruppen. P. LEFEBVRE (Paris) beschrieb bestimmte Klassen von Subhalbgruppen einer Halbgruppe, welche die Normalteiler verallgemeinern, und gab in diesen Klassen gewisse Unterverbände an.

