1961,5

B e r i c h t
über die

Tagung über Zahlentheorie
Pfingsten 1961

Vom 23. bis 27. Mai 1961 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Tagung über Zahlentheorie statt. Tagungsleiter waren die Herren Professoren H.HASSE, Hamburg, und P.ROQUETTE, Tübingen. An der Tagung nahmen dreiundzwanzig Mathematiker teil, davon fünfzehn aus Deutschland, drei aus Frankreich, zwei aus England, einer aus den USA, einer aus der Schweiz und einer aus Dänemark. J.TATE, Cambridge (Mass.), war eigens aus den USA zu dieser Tagung gekommen. L.REDEI, Szeged, mit dessen Teilnahme bis zuletzt gerechnet wurde, konnte leider nicht kommen. Die beschränkte Teilnehmerzahl und die Stille und Abgeschiedenheit des Mathematischen Forschungsinstituts mitten im Schwarzwald boten die äußeren Voraussetzungen für eine Tagung mit vielen Diskussionen und regem Gedankenaustausch auch außerhalb der Vorträge.

Das Programm der Tagung gab einen Querschnitt durch aktuelle Gebiete der algebraischen Zahlentheorie und der algebraischen Geometrie. So berichtete ein zusammenfassender Vortrag über neuere Ergebnisse, die zu einer weitgehenden konstruktiven Beherrschung der Arithmetik absolut-abelscher Zahlkörper führen. Andere Vorträge handelten von der Modulstruktur KUMMERscher Erweiterungen DEDEKINDscher Bereiche, von der Klassenzahl p^n - ter Kreiskörper und von einem bewertungstheoretischen Aufbau der Arithmetik der Algebren. Zwei Vorträge befaßten sich mit den für die Theorie der diophantischen Gleichungen wichtigen WC-Gruppen, den Gruppen von Klassen prinzipaler homogener Räume über Abelschen Mannigfaltigkeiten sowie ein Vortrag mit der Reduktion Abelscher Mannigfaltigkeiten. Drei Vorträge berichteten über Erweiterungen der Klassenkörpertheorie: Über galoissche Erweiterungen $\mathfrak{p}$ -adischer Zahlkörper, über zyklische Erweiterungen von Funktio-

nenkörpern über Zahlkörpern und schließlich -unter Verwendung von algebraisch-geometrischen Methoden- über lokale Klassenkörpertheorie bei algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper. Zwei weitere Vorträge hatten die Theorie der Differentialformen und Dualitätssätze auf algebraischen Mannigfaltigkeiten mit inseparablen Funktionenkörpern zum Gegenstand.

Kurzer Bericht über die auf der Tagung gehaltenen Vorträge:

Ch. PISOT (Paris): Über eine Klasse ganzer algebraischer Zahlen.

S sei die Menge der reellen ganzen algebraischen Zahlen mit $\theta > 1$ und allen Konjugierten θ_j vom Betrag $|\theta_j| < 1$, T die Menge der reellen ganzen algebraischen Zahlen mit $\tau > 1$ und allen Konjugierten τ_j vom Betrag $|\tau_j| \leq 1$, $|\tau_j| = 1$ für ein j. Es werden Beziehungen angegeben zur Verteilung mod 1 von $a\alpha^n$, zu Eindeutigkeitsmengen in der Theorie der trigonometrischen Reihen und zum Koeffizientenproblem der meromorphen Funktionen in $|z| \leq 1$ mit $|f(z)| \leq 1$ für $|z| = 1$.

M. KNESER (München): Approximationssätze in algebraischen Gruppen.

Wesentlich vereinfachter Beweis des folgenden Satzes von M.EICHLER (Crelle J. 179): Sei G Normeinsgruppe einer einfachen Algebra über einem Zahlkörper k als Zentrum, G_A die Adèlegruppe, G_k bzw. G_∞ die Gruppe der Hauptadèle bzw. derjenigen Adèle, die an allen endlichen Primstellen die Komponente 1 haben. Dann liegt $G_\infty G_k$ genau dann dicht in G_A, wenn G_∞ nicht kompakt ist.

Ch. JENSEN (Kopenhagen): Über die Lösbarkeit Nicht-Pellscher Gleichungen.

D heiße zulässig, wenn $x^2 - Dy^2 = -1$ ganzzahlig lösbar ist. Für die Struktur der Ringklassenkörper über reell-quadratischen Zahlkörpern ist die folgende Frage von Bedeutung: d sei quadratfrei und zulässig; für welche m ist dm^2 zulässig? O.B.d.A. sei m=p prim. Kriterien werden angegeben

für die Zulässigkeit von dp^2 durch Darstellungen von p durch binäre quadratische Formen.

A. FRÖHLICH (London): Die Modulstruktur KUMMERscher Erweiterungen von DEDEKINDschen Bereichen.

o sei ein DEDEKIND-Bereich, $K=Q(o)$, Λ/K halbeinfache, kommutative KUMMERsche Algebra mit GALOISgruppe G. O sei die Hauptordnung von Λ, $\widetilde{O}$ die "KUMMERordnung" (durch KUMMERelemente von O erzeugt). O und $\widetilde{O}$ werden als Moduln über dem Gruppenring o(G) betrachtet. Arithmetische Bestimmung der Struktur von $\widetilde{O}$ und des Index $[O:\widetilde{O}]$; Bedingungen für $O \simeq o(G)$.

H.-W. LEOPOLDT (Erlangen): Zur Arithmetik abelscher Zahlkörper.

Zusammenfassender Bericht über neuere Ergebnisse in der Arithmetik absolut-abelscher Zahlkörper: Gegeben sei eine endliche Gruppe von Restklassencharakteren. Wie beschreiben sich die arithmetischen Bestimmungsstücke des zugeordneten Körpers K (Hauptordnung, Einheitengruppe, Klassenzahl usw.) durch die Charaktere? Vergleiche dazu die Abhandlungen H.-W. LEOPOLDT: Über die Hauptordnung der ganzen Zahlen eines abelschen Zahlkörpers, Crelle J. 201, 1959 und H.-W. LEOPOLDT: Über Fermatquotienten von Kreiseinheiten und Klassenzahlformeln mod p, Rend. Circ. Mat. Palermo, T. IX, 1960.

W. JEHNE (Heidelberg): Kreiskörper und Γ- Erweiterungen.

p sei eine Primzahl. Der p-Bestandteil der Klassenzahl des p^n-ten Kreiskörpers ist für große n von der Form p^{e_n} mit $e_n = \lambda n + \mu p^n + \nu$ (Iwasawa). Es wird eine Abschätzung der "imaginären" Bestandteile μ^-, λ^- nach oben angegeben.

H. BENZ (Berlin): Die Hauptordnungen der zyklischen verschränkten Produkte und ihre Arithmetik.

Mit Hilfe von speziellen Pseudobewertungen werden Hauptordnungen in Algebren ausgezeichnet und deren Arithmetik beschrieben. Vgl. dazu die Abhandlung H.BENZ: Über eine Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedeutung für die Arithmetik, Akademie-Verlag-Berlin, 1961.

H. KOCH (Dresden): GALOISsche Erweiterungen $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper.

k sei ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper über dem Körper der rationalen p-adischen Zahlen vom Grade m, K eine galoissche Erweiterung von k, die bzgl. normalen Erweiterungen von p-Potenzgrad abgeschlossen ist, K_0 der maximale einfach verzweigte Teilkörper von K. $G(K/k)$ ist nach IWASAWA halbdirektes Produkt von $G(K_0/k)$ und $G(K/K_0)$, $G(K/K_0)$ also Operatorgruppe mit dem Operatorenbereich $G(K_0/k)$. Enthält K_0 die p-ten Einheitswurzeln nicht, so ist $G(K/K_0)$ eine "freie" Operatorgruppe mit m Erzeugenden.

E. LAMPRECHT (Würzburg): Zyklische Erweiterungen arithmetischer Funktionenkörper.

k sei ein algebraischer Zahlkörper, K ein Funktionenkörper der Dimension 1 über k, speziell k und K rational. Es werden die endlichen zyklischen Erweiterungen L/K durch arithmetische "Kongruenzgruppen" in K gekennzeichnet.

J.P. SERRE (Paris): Corps de classes local.

K sei ein diskret bewerteter, vollständiger Körper mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper k, K_a die maximale abelsche Erweiterung von K, $G(K_a/K)$ ihre GALOISgruppe. Die Einheitengruppe U_K von K ist auf natürliche Weise gefiltert durch Gruppen U_K^n und vermöge $U_K = \varprojlim U_K/U_K^n$, eine proalgebraische Gruppe (vgl. dazu J.P. SERRE: Groupes proalgébriaues, Publ. Math. n° 7). Es ist $G(K_a/K)$ isomorph zur Fundamentalgruppe $\pi_1(U_K)$ der proalgebraischen Gruppe U_K.

A. NERON (St. Ouen): Reduction of Abelian varieties.

k sei ein diskret bewerteter, vollständiger Körper, $\mathfrak{p}$ das Bewertungsideal und k^0 der Restklassenkörper. k^0 sei vollkommen. Für jede projektive k-Varietät V bezeichne V^0 den mod $\mathfrak{p}$ reduzierten Zykel, rational über k^0. Dann gilt: Ist A eine elliptische Kurve, definiert über k, so existiert ein "$\mathfrak{p}$-einfaches" k-Modell A_* von A, so daß mit $\alpha: A \Longrightarrow A_*$ für jede rationale Abbildung $\varphi: V \Longrightarrow A$, $\varphi_* = \alpha.\varphi$ ein "$\mathfrak{p}$-Morphismus" ist in jedem Punkt von supp V^0, der "$\mathfrak{p}$-einfach" über V ist. Eine Abschwächung hiervon gilt für beliebige Abelsche Mannigfaltikeiten A. Folgerung: Die einfachen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Punkte von A_*° bilden eine algebraische Gruppe.

J. TATE (Cambridge, Mass.): <u>Principal homogeneous spaces for Abelian varieties.</u>

A sei eine Abelsche Mannigfaltigkeit, definiert über k, A_K die Menge der über K rationalen Punkte, $K \supset k$, $G(K/k)$ die GALOISgruppe von K/k, $\bar{k}$ die separable Hülle von k. Man setzt $WC = H^1(k,A) = H^1(G_{\bar{k}/k}, A_{\bar{k}}) = \lim_K{}_1 H^1(G_{K/k}, A_K)$. Folgende Fälle wurden besprochen:

1. k endlich: $H^1(k,A) = 0$ (S. LANG)
2. k diskret bewertet und vollständig mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper k_o. Vgl. dazu J. TATE, Sem. Bourbaki 10, 1957/58, exp. 156. 3. k Funktionenkörper einer Variablen über algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper.

J.W.S. CASSELS (Cambridge): <u>Die Arithmetik auf Kurven vom Geschlechte 1.</u>

A sei eine Abelsche Mannigfaltigkeit der Dimension 1 über einem endlich algebraischen Zahlkörper k. Gegenstand der Untersuchung ist die folgende Hauptvermutung: Auf $Ш = WC = H^1(k,A)$ gibt es eine schiefsymmetrische Form mit Werten in Q/Z, die Ш mit sich selbst in Dualität setzt. Es wurde eine graduierte Fassung der Hauptvermutung bewiesen.

E. KUNZ (Heidelberg): <u>Die kanonische Klasse in algebraischen Funktionenkörpern.</u>

K/k sei ein beliebiger algebraischer Funktionenkörper, V ein Modell von K/k, k_o ein Körper zwischen k und k^p, $p = \chi(k)$. Die höchste von 0 verschiedene äußere Potenz des "Differentialmoduls" von K über k_o liefert eine Divisorenklasse $\vartheta(k_o)$ auf V. Unter all diesen Divisorenklassen $\vartheta(k_o)$ gibt es eine "größte". Im Falle dim $(K/k) = 1$ ist dies die "kanonische Klasse" des RIEMANN-ROCHschen Satzes. Kennzeichnung der Körper k_o mit $\vartheta(k_o)$ = "kanonische Klasse".

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H. J. NASTOLD (Heidelberg): Zum SERREschen Dualitätssatz.
Wie im vorhergehenden Vortrag von E. KUNZ sei V ein Modell von K/k. V sei singularitätenfrei. Die obige Aussage über die "kanonische Klasse" gilt auch für dim (K/k) > 1. k_0 sei ein Körper mit $\vartheta(k_0)$ = "kanonische Klasse", Ω^t die Garbe der Keime über k_0 gebildeter holomorphen Differentialformen der höchsten Stufe auf V. Dann gilt mit der Garbe Ω^t der SERREsche Dualitätssatz auf V.

P. ROQUETTE (Tübingen): Über den Singularitätsgrad algebraischer Kurven.
Einfacher Beweis der Gleichung $d = 2\delta$ für Kurven auf nichtsingulären Flächen (GORENSTEIN) gegründet auf die Beziehung $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = \mathfrak{a}$ für Ideale $\mathfrak{a}$ der zugehörigen Ringe. Es werden hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der letzteren Beziehung angegeben.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft