1961,8

Bericht über das 4. Kolloquium über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik in Oberwolfach

20. - 26. August 1961

Vom 20. bis 26. August 1961 fand in Oberwolfach das vierte Kolloquium über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik unter der Leitung von Prof. Dr. K. Jacobs (Göttingen) statt.

Insgesamt waren 41 aktive Teilnehmer anwesend, davon 16 aus dem Ausland. Von diesen kamen je vier aus Dänemark und den Vereinigten Staaten, drei aus der Tschechoslovakei, zwei aus Ungarn und je einer aus Griechenland, Österreich und Schweden. Eine besondere Freude war für alle Teilnehmer die Anwesenheit von Prof. H. Cramér (Stockholm), der in diesem Jahr zum ersten Mal nach Oberwolfach gekommen war. Bedauert wurde die durch die Ereignisse des 13. August bedingte kurzfristige Absage der Arbeitsgruppe aus Ostberlin.

Viele Teilnehmer waren nicht zum ersten Mal in Oberwolfach und kannten bereits die 'Oberwolfacher Atmosphäre', die wie kaum eine andere Umgebung dazu geeignet ist, wissenschaftlichen Gedankenaustausch und persönliche Kontakte zu fördern. Die zum ersten Mal Anwesenden fügten sich schnell ein und sehr bald wurden allgemein die gebotenen Möglichkeiten zu intensiven Diskussionen in kleinen Gruppen ausgiebig wahrgenommen. Auch die unmittelbar an die Vorträge angeschlossenen Diskussionen erstreckten sich - durchaus im Sinne aller Teilnehmer - in vielen Fällen weit über die vorgesehene Zeit hinaus.

Das Oberwolfacher Treffen war eine der Tagungen, wie sie von nun an im Abstand von eineinhalb Jahren regelmäßig durchgeführt werden sollen. Man konnte allerdings den Eindruck gewinnen, daß die ständig wachsende Zahl von Mathematikern, die sich für Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik interessieren, ebenso wie die Vielfalt der Spezialgebiete in absehbarer Zeit eine Teilung der Tagung und die Abhaltung von Spezialtagungen erforderlich machen wird. Z.B. würde eine Spezialtagung über Fluktuationsprobleme sicher auf großes Interesse und rege Beteiligung rechnen können.

Der weitgespannte Themenkreis der insgesamt 27 Referate wurde zwanglos in die Gebiete 'Grundlagen', 'stochastische Prozesse', 'mathematische Statistik' und 'Informationstheorie' aufgeteilt und die Referate unter den entsprechenden Rahmenthemen zusammengefaßt.

Im Einzelnen wurden zum Rahmenthema 'Grundlagen' folgende Vorträge gehalten:

<u>D. Bierlein</u> (München): Über die Möglichkeit, eine reelle Funktion durch Fortsetzung des Wahrscheinlichkeitsfeldes meßbar zu machen.

Für die Lösung des Problems, eine reelle Funktion f auf der Menge M durch Fortsetzung des Wahrscheinlichkeitsfeldes $(M,\mathfrak{A},p)$ meßbar zu machen, wurden notwendige und/oder hinreichende Bedingungen angegeben. Für eine Klasse von nicht $\mathfrak{A}$-meßbaren Funktionen wurde die Konstruktion einer Fortsetzung des Maßes $p|\mathfrak{A}$ bei Adjunktion von $\mathfrak{A}_f$ zu $\mathfrak{A}$ skizziert. Andererseits gibt es unter schwachen mengentheoretischen Einschränkungen bzgl. der Mächtigkeit von M stets Funktionen, die sich - von trivialen Spezialfällen (diskrete Maße!) abgesehen - nicht meßbar machen lassen.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

D.A. Kappos (Athen): Verteilungsgleiche Zufallsvariable.

Es wurden die Kriterien angegeben, die erfüllt sein müssen, damit zu einer gegebenen Familie $\{x_i\}$, $(i \in I)$ von Zufallsvariablen eine andere Familie von w-unabhängigen Zufallsvariablen y_i $(i \in I)$ derart existiert, daß y_i dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung wie x_i besitzt. (Erscheint im Bull.Soc.Math.Greecè, (Athen), 1961).

K. Krickeberg (Heidelberg): Neuere Fortschritte in der Behandlung einiger Konvergenzprobleme.

Berichtet wurde erstens über Versuche, eine Reihe von Konvergenztheorien stochastischer Prozesse, die gewisse Analogien aufweisen, einheitlich zu behandeln, und zweitens über einige Fortschritte bei speziellen Konvergenzproblemen. Einheitlich behandeln lassen sich alle Sätze über die Konvergenz von gerichteten, nicht notwendig monotonen Familien von bedingten Erwartungsoperatoren (noch unveröffentlicht). Das schließt die klassischen Martingalkonvergenzsätze (Doob) ein und ebenso die üblichen Differentiationssätze (Lebesque, Jessen-Marcinkiwiez - Zygmund, Radon - Nikodym etc.). Zum Teil existieren zusammenfassende Behandlungen für Familien von Erwartungsoperatoren, Reynoldsche Operatoren und ergodische Mittelbildungen (Meyer - Jerison, Rota). Für gewisse Ergodensätze und Sätze über Hilbertsche Transformationen gibt es eine einheitliche Theorie von Cotlar.

Die Konvergenzsätze über Erwartungsoperatoren lassen sich ausdehnen auf den Fall von gerichteten Familien zufälliger Variabler, die nicht mehr als Werte einer Familie von Erwartungsoperatoren erscheinen, aber doch damit zusammenhängen (nicht-monotone Martingale und Semimartingale), (noch unveröffentlicht).

E. Lukacs (Washington): Neuere Entwicklungen des Charakterisationsproblems.

Der Vortragende gab einen umfassenden Überblick über die bisher bekannten Resultate, die zum Teil auf seine eigenen Arbeiten zurückgehen, und berichtete über eigene neue Untersuchungen.

P. Schmidt (Aarhus): On the Eigenvalues of Toeplitz Matrices.

Die Determinanten der Toeplitz-Matrizen T_n, $(n = 1,2,\ldots)$, die mit Hilfe der Koeffizienten eines Laurent-Polynoms f gebildet werden, können explizit als Funktionen der Nullstellen von f dargestellt werden. Das ermöglicht die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Determinanten T_n und Aussagen über die Menge der Limespunkte der Eigenwerte bei $n \to \infty$.

Beim Rahmenthema 'stochastische Prozesse' fiel auf, daß Fluktuationsprobleme insbesondere bei Prozessen mit symmetrisch abhängigen Zuwächsen großes Interesse finden. Es wurden folgende Referate gehalten:

E.S. Anderson (Aarhus): Fluctuations of sums of Random Variables.

Seien $X_1, X_2, \ldots$ symmetrisch abhängige Zufallsvariable und $S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$. Bezeichnet ferner $\{T_{n,k}\}_{k=0}^{n}$ eine Umordnung der Menge $\{S_k\}_{k=0}^{n}$, so kann man mit Hilfe einer geeignet definierten symbolischen Multiplikation von charakteristischen Funktionen φ die Spitzerische Formel und die Identität

$$\varphi(T_{n,k}, S_n) = \varphi(T_{n-k,0}, S_{n-k})\,\varphi(T_{k,k}, S_n)$$

auf den Fall symmetrisch abhängiger Zufallsvariabler verallgemeinern.

H. Cramér (Stockholm): The structure of certain stochastic processes.

Es wurde unter recht allgemeinen Bedingungen bewiesen, daß auch für nicht-stationäre Vektorprozesse eine Spektraldarstellung mit Hilfe von Prozessen mit orthogonalen Zuwächsen existiert. Dieses Ergebnis wurde dann zur Konstruktion von im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate optimalen Schätzfunktionen für die Vorhersage der Stichprobenfunktionen benutzt. (Die Arbeit wird unter dem Titel: 'On the structure of purely non-deterministic stochastic processes' im Arkiv för Matematik Band 4 (1961) erscheinen.)

H. Dinges (Göttingen): Eine kombinatorische Überlegung für Prozesse mit symmetrisch abhängigen Zuwächsen am absorbierenden Rand.

Sei $x(t,\omega)$ ein solcher Prozeß über der diskreten oder kontinuierlichen Indexmenge T. Wir nennen $(T(h,\omega),$ $x(T(h,\omega)))$ den 'ersten Absorptionspunkt am Rande h', falls $T(h,\omega) = \inf (t \mid x(t,\omega) \geq h)$. Das Verteilungsmaß dieser Zufallsvariable nennen wir q_h. $Q_\infty = \int_0^\infty q_h \, dh$ ist σ-finit und berechnet sich einfach aus den Verteilungsfunktionen der $x(t,\omega)$ einzeln (!) : $dQ = \frac{x}{t} \, dP_\infty$. Dabei ist für eine beliebige Testfunktion $\psi(t,x)$ das Integral $\int \psi(t,x) dP_\infty$ definiert durch $\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \psi(t,x) d_x Ws(x_t \leq x) \right] dt$.

H. Klinger (Göttingen): Über eine Klasse von Sekundärprozessen.

Durch einen 'Primärprozeß', der als stationärer Markoff-Prozeß mit endlich vielen Zuständen angesetzt ist, werden die Parameter eines Sekundärprozesses mit unabhängigen Zuwächsen gesteuert. Der so gebildete Sekundär-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

prozeß ist allein betrachtet ein Semi-Markoffscher Prozeß. Es wurde explizit die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen des Sekundärprozesses angegeben und in einigen Spezialfällen auch invertiert. Das Modell ist als Ansatz bei Irrfahrtsproblemen und für Quasi-Ansteckungs-Verteilungen verwendbar.

W. Uhlmann (Hamburg): Harmonische stochastische Prozesse.

Es wurden stochastische Prozesse betrachtet, bei denen jede Realisation eine harmonische Funktion ist. Für die Kovarianzfunktion wurden einfache Eigenschaften abgeleitet und eine Spektraltheorie entwickelt.
(Erscheint demnächst in der ZAMM).

I. Vincze (Budapest): Bemerkungen zu der Frage des 'First Passage' Problems.

Der Vortragende berichtete über die gemeinsame Verteilung von Abszisse und Ordinate des Maximums bei einer eindimensionalen Irrfahrt und gab einige Hinweise auf mögliche Verallgemeinerungen der Fragestellung.

Die meisten Vorträge waren zum Rahmenthema 'mathematische Statistik' angemeldet worden. Es sprachen:

O. Barndorf-Nielsen (Aarhus): Über das Wachstum der maximalen Orderstatistik.

Sei $\{x_n\}$ ... eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, die die Verteilungsfunktion F haben. Dann gelten, falls ρ_n eine nicht abnehmende Folge reeller Zahlen ist,

Satz 1 (J. Geffroy 1958)

$$P\left(\limsup\left\{\max_{1\le k\le n} X_k \le \rho_n\right\}\right) = \begin{cases}0\\1\end{cases}$$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

je nachdem ob $\sum (1 - F(\varrho_n)) \begin{cases} < \infty \\ = \infty \end{cases}$

und Satz 2 $\quad P\,(\limsup \{\max\limits_{1 \leq k \leq n} x_k \leqslant \varrho_n\}) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

je nachdem ob $\sum \dfrac{\log\log n}{n} \quad (F(\varrho_n))^n \begin{cases} < \infty \\ = \infty \text{ und} \\ F(\varrho_n)^n \searrow . \end{cases}$

E. Batchelet (Basel und Washington): Zwei mit dem Wilcoxon-Test verwandte Teste.

Liegen die Zufallspunkte der beiden Stichproben nicht auf einer Geraden, sondern auf einem Kreis, so muß der Wilcoxon-Test modifiziert werden. Als Testgröße eignet sich die 'minimale Anzahl der Inversionen'. Will man die Streuungen zweier Stichproben vergleichen, so spaltet man die Gesamtheit der Zufallspunkte beider Stichproben beim Medianpunkt auf und zählt die Summe der Inversionen vom Medianpunkt in entgegengesetzten Richtungen. Die Summe der Zahl der Inversionen eignet sich als Testgröße.

R. Borges (Köln): Subjektivtrennscharfe Konfidenzbereiche.

Die Neyman'sche Definition des trennscharfen (shortest, most selective, most accurate) Konfidenzbereiches wurde durch eine Integration der Neyman'schen Definitionsgleichungen mit einer Vorbewertung bzgl. des Parameters der Verteilung abgeschwächt und die Beschreibung dieser subjektivtrennscharfen Konfidenzbereiche explizit angegeben.

H.G. Kellerer (München): Zur Existenz analoger Bereiche.

Es wurde gezeigt, daß es zu endlich vielen atomlosen

Maßen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ über einem Wahrscheinlichkeitsfeld stets mindestens eine Zufallsvariable $x(\omega)$, $(x(\omega): \Omega \to R^1)$, derart gibt, daß zu jedem $(0 \leq \delta \leq 1)$ ein analoger Bereich (similar region) $A \subset R^1$ mit $\mu_i(A) = \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ existiert. Der Satz gilt nicht für eine unendliche Menge von Maßen, wie an einem einfachen Gegenbeispiel gezeigt wurde.

Z. Koutsky (Prag): Ein Beitrag zur Impulszählung.

Es wurde ein sehr detailliertes Wahrscheinlichkeitsmodell für die Vorgänge bei der Zählung von elektrischen Impulsen diskutiert. Daraus ergaben sich Folgerungen für die Konstruktion von Aggregaten, die in schnellen Rechenautomaten zur Erzeugung von echten Zufallszahlen Verwendung finden können.

D. Morgenstern (Münster, Westf.): Ein elementarer Beweis des Kolmogoroffschen Grenzwertsatzes.

Aus den Iterationsformeln von Massey (Ann.math.Statistics 21, 116-119 (1950)) werden durch einen Limessatz über Approximation der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung durch Lösungen von Differenzengleichungen die Grenzformeln von Kolmogoroff und anderen gewonnen.

G. Noether (Boston): Wahrscheinlichkeit und Statistik im amerikanischen Fernsehen.

Der Vortragende, der an der Gestaltung einer längeren Sendereihe über Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik für das amerikanische Fernsehen mitgearbeitet hat, berichtete neben didaktischen und methodischen Fragen auch technische Einzelheiten. Da im Anschluß an den Kursus auch Prüfungen abgenommen wurden, konnte der Vortragende auch über die Wirkungsbreite der

Sendereihe Angaben machen.

E. Parzen (Stanford): An approach to time series analysis.

Es wurde gezeigt, wie man die Tatsache, daß zu jeder Kovarianzfunktion ein eindeutig bestimmter reproduzierender Kern im Hilbertraum existiert, dazu benutzen kann, um einen einheitlichen Formalismus zu entwickeln, der die Behandlung von vielen statistischen und analytischen Fragen in der Theorie der Zeitreihen bei bekannter Kovarianzfunktion gestattet.

R. Prekopa (Budapest): Stochastische Programmierung.

Seien b_i $(i=1,2, \ldots m)$ und c_j $(j=1,2,\ldots,n)$ $(m>n)$ reelle Konstanten und a_{ij} reelle Zufallsvariable. Über die Verteilung der Zufallsvariablen $M = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ - das Maximum ist, sofern die Nebenbedingungen überhaupt eine Lösung zulassen, über $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Nebenbedingungen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i$ zu bilden - wurden a) unter Voraussetzungen über die Determinanten der Erwartungswerte der Zufallsvariablen a_{ij} und b) für den Fall $m \to \infty$, $n \to \infty$ asymptotische Aussagen gewonnen.

H. Störmer (München): Über das Testen von Verteilungshypothesen.

Es wurden Tests betrachtet, die über die Zugehörigkeit einer Verteilungsfunktion zu einer Klasse entscheiden. Am Beispiel der Normalverteilungen wurde gezeigt, wie man dazu nach einer Variablentransformation den Kolmogoroff-Test benutzen kann. Die Konsistenz folgt aus einem Satz über Stichprobenverteilungsfunktionen.

W. Vogel (Tübingen): 'Matching Pennies' gegen einen Markov - Gegner.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Beim Spiel 'Matching Pennies' muß man die Handlungsweise eines Gegners voraus zu raten suchen. Ein Beispiel dafür ist eine Person, welche am Abend eines jeden Tages das Wetter für den nächsten Tag vorhersagt. Ein Modell für diese Wettervorhersage ist das folgende: Gegeben sei ein Markov-Prozeß mit den Zuständen 0 und 1. Vor jedem Schritt soll man versuchen, sein Auskommen vorherzusagen. Der Erwartungswert der Anzahl der richtigen Vorhersagen ist der Gewinn. Für dieses Spiel werden die Bayes-Lösungen bestimmt, diese hängen nicht von der Übergangsmatrix des Markov-Prozesses ab. Durch Analogie-Betrachtungen lassen sich Strategien mit wünschenswerten Eigenschaften für allgemeinere Fragestellungen angeben.

E. Walter (Göttingen): Zweistichprobenrangteste.

Einige eigene für die Prüfung der Symmetrie bezüglich Null früher gewonnene Ergebnisse wurden auf die Prüfung der Zweistichprobenhypothese mit unpaarigen Beobachtungen erweitert. Z.B. wurde für den Fall, daß die Zufallsvariablen unabhängig sind und jede Stichprobe mindestens zwei Beobachtungen enthält, eine Klasse von überall wirksamen Testen (strictly unbiased tests) angegeben. Auch wurde eine Optimaleigenschaft des einseitigen Zweistichprobentests von Mosteller bewiesen.

Die Vorträge über 'Informationstheorie' deuteten die gegenwärtige Tendenz an, informationstheoretische Gedanken auf allgemein statistische Fragen zu übertragen. Es sprachen:

J. Nedoma (Prag): Die Kapazität periodischer Kanäle.

Es wurde bewiesen, daß bei periodischen Kanälen mit der Periode r die mit Hilfe von ergodischen Quellen definierte Durchlaßkapazität kleiner oder gleich der Durchlaßkapazität ist, die mit Hilfe von bezüglich der Ver-

schiebungstransformation T^r ergodischen Quellen definiert ist.

V. Straßen (Göttingen): Kontinuierliche Quellen mit diskreter Ablesevorschrift.

Die Menge M der möglichen Meßwerte für ein kontinuierliches zufälliges Experiment bestehe aus endlich vielen Dezimalzahlen. Berücksichtigt man beim Meßvorgang systematische Fehler, so werden die relativen Häufigkeiten von Ereignissen aus M i.a. nicht durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, sondern durch ein sogenanntes Untermaß gesteuert. Dies ist eine Mengenfunktion u mit

$$\sum_{E \subseteq F} (-1)^{|F-E|} u(E) \geq 0 \qquad (F \subseteq M).$$

Mit einer geeignet definierten Entropie würde die AEP-Eigenschaft (Feinstein) für Untermaße bewiesen.

I. Vincze (Budapest): Information und Konfidenzintervalle.

Der Begriff der relativen Information (vgl. I. Vincze: Transaction of the Second Prague Conf. 1959) wird zur Konstruktion von Konfidenzintervallen für Parameter von bezüglich des Lebesguemaßes absolut stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen im R^1 herangezogen. Als Beispiele werden die Normalverteilung und die Exponentialverteilung betrachtet.

K. Winkelbauer (Prag): Axiomatic Definitions of Channel Capacity.

Es wird eine axiomatische Definition der Kapazität für Kanäle mit endlicher Vergangenheit gegeben, die auch für Kanäle mit endlichem Gedächtnis gilt.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft