Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Diskrete Geometrie

23.- 29. Juli 1962

Die Tagung stand unter der Leitung von Prof.Dr.Lászlo Fejes Tóth (Budapest). Es nahmen daran die folgenden Herren teil:

Großbritannien: H.T.Croft (Cambridge)
C.A.Rogers (London)

Israel: B.Grünbaum (Jerusalem)

Italien: B.Segre (Rom)

Kanada: R.Blum (Saskatoon)
H.S.M.Coxeter (Toronto)

Österreich: A.Florian (Wien)
H.Florian (Graz)

Schweiz: H.Bieri (Bern)
B.L.van der Waerden (Zürich)

Tschechoslowakei: V.Polák (Brünn)

Ungarn: P.Erdös (Budapest)
L.Fejes Tóth (Budapest)
J.Molnár (Budapest)

U.S.A.: H.Groemer (Corvallis)
V.Klee (Seattle)
H.Zassenhaus (Notre Dame)

Deutschland: L.Danzer (München)
W.Meretz (Berlin)
K.Schütte (Marburg)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Zum Thema der Tagung:

Als "Diskrete Geometrie" bezeichnet man jenen Zweig der Geometrie, der sich mit Mannigfaltigkeiten befaßt, welche aus diskreten Elementen bestehen. Dazu gehören z.B. die Theorie der Punktgitter, der regelmäßigen Raumzerlegungen, Extremalprobleme, die Punktsysteme betreffen, wie auch Lagerungs- und Überdeckungsfragen. Dabei stellt sich heraus, daß unter gewissen Klassen geometrischer Figuren (Punktsystemen, Polygonen, Mosaiken usw.) die regulären durch Extremaleigenschaften ausgezeichnet sind. Einige davon sind seit langem bekannt, die Mehrzahl der Ergebnisse stammt jedoch aus neuerer Zeit. Zur diskreten Geometrie zählt man auch geometrische Extremalprobleme, die einzelne Figuren betreffen, wie etwa das isoperimetrische Problem mit seinen zahlreichen Varianten. Die Möglichkeit der Charakterisierung durch Extremaleigenschaften eröffnet einen neuen, natürlichen Zugang zur Theorie der regulären Figuren. Obwohl solche Probleme in engem Zusammenhang mit anderen Gebieten der Mathematik, wie der Geometrie der Zahlen, stehen, beanspruchen sie für sich erhebliches Interesse und haben sich zu einem fruchtbaren Teilgebiet der Geometrie entwickelt. Eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse bis 1953 findet sich in dem Buch von L.FEJES TÓTH "Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum" (Springer Berlin 1953). Seither wurden beträchtliche Fortschritte erzielt, deren Erörterung eine besondere Tagung über dieses Gebiet notwendig erscheinen ließ. Die auf der Tagung behandelten Einzelprobleme sind aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich.

Besprechung der Vorträge:

Insgesamt 19 Vorträge und zahlreiche Diskussionen gaben einen Überblick über neue Ergebnisse und die Richtung der wissenschaftlichen Forschung auf diesem Gebiet. Im einzelnen sprachen:

Zu Packungs- und Überdeckungsproblemen und Raumzerlegungen:

H.S.M.COXETER (The number of equal non-overlapping spheres that can touch another of the same size) gab eine Abschätzung für die Maximalzahl von (n-1)-dimensionalen Kugeln, die im n-dimensionalen euklidischen Raum so gelagert werden können, daß sie eine weitere Kugel der gleichen Größe berühren. Für $n = 3$ ist diese Zahl bekanntlich gleich 12.

L.DANZER (Über optimale Lagerungen von 7 bis 11 kongruenten Kreisen auf der 2-Sphäre) löste mit Hilfe der graphentheoretischen Methode von HABICHT, SCHÜTTE und van der WAERDEN das Problem, die kleinste Kugel zu bestimmen, auf der n Punkte mit Mindestabstand 1 Platz haben, in den Fällen $n = 10, 11$. Damit ist die Frage bis $n = 12$ beantwortet.

L.FEJES TÓTH (Isoperimetric problems concerning tesselations) zeigte, daß bei der Zerlegung der Vereinigung von n Flächen eines regulären, euklidischen oder hyperbolischen Mosaiks mit dreikantigen Ecken in n zusammenhängende Teile stets der Umfang mindestens eines Teiles nicht kleiner als derjenige einer Fläche des Mosaiks ist.

A.FLORIAN (Zum Problem der dichtesten Kreispackung) gab eine obere Schranke für die Lagerungsdichte inkongruenter Kreise in der euklidischen Ebene an. Folgerung: Mit nicht übereinander greifenden Kreisen, deren Radienverhältnis nicht unter 0,90 .. liegt, läßt sich kein größerer Teil der Ebene bedecken als mit gleich großen Kreisen.

H.GROEMER (Ergebnisse und Probleme über Raumzerlegungen) untersuchte Zerlegungen des R_n in homothetische konvexe Körper. Es wurde gezeigt, daß diese Körper höchstens 3^n-3 Seitenflächen haben und gewisse Symmetrieeigenschaften besitzen. Verallgemeinerungen und damit zusammenhängende Probleme.

V.KLEE (Infinite-dimensional packing and covering) befaßte sich in einem zusammenfassenden Vortrag mit der Überdeckung metrischer Räume, der Überdeckung normierter linearer Räume mittels konvexer Mengen und Packungsproblemen in unendlich-dimensionalen Räumen.

J.MOLNÁR (Über Kreisunterdeckungen) berichtete, anschließend an ein Ergebnis von L.FEJES TÓTH, über obere Schranken für Kreisunterdeckungsdichten auf Flächen konstanter Krümmung. Die Untersuchungen lassen sich auf die Vereinigung endlich vieler Kreise verallgemeinern.

K.SCHÜTTE (Sphärenlagerungen mit minimalem Durchmesser) sprach über das Problem, im n-dimensionalen euklidischen Raum eine Lagerung von k kongruenten Sphären mit minimalem Durchmesser zu bestimmen; für $k = n + 2$ und $n = 3$, $k = 6$ wurden die Lösungen angegeben.

C.A.ROGERS (Exact packing of tetrahedra) sprach über ein Ergebnis von H.L.DAVIES, der alle Tetraeder mit folgender Eigenschaft bestimmte: Der ganze Raum läßt sich durch unendlich viele, zu einem gegebenen kongruente Tetraeder lückenlos ausfüllen, so daß sie Fläche an Fläche liegen.

B.L.van der WAERDEN (Mehrdimensionale Packungen und Informationstherie) gab einen Bericht über die Untersuchungen von FEJES TÓTH, HABICHT, van der WAERDEN, SCHÜTTE und ROBINSON über die Lagerung von Punkten auf der Kugel mit Anwendungen auf Biologie und Informationstheorie.

H.ZASSENHAUS (Über eine Verallgemeinerung der Norman-SMITH-Methode in der statistischen Zahlengeometrie) ging von einer Ungleichung von Norman SMITH aus, die zwischen dem Flächeninhalt eines JORDANpolygons in der euklidischen Ebene, der Anzahl der Punkte eines endlichen Punktsystems, das zum Polygon gehört und zulässig für eine spezielle Normdistanz ist, und dem Umfang des Polygons besteht. Er gab eine Verallgemeinerung auf eine Klasse von Normdistanzen.

Zur kombinatorischen Geometrie:

L.DANZER (Kombinatorische Betrachtungen zu Problemen vom HELLY-GALLAIschen Typ) zeigte in einer Reihe geometrischer Sätze aus dem Problemkreis des HELLYschen Satzes den kombinatorischen Kern auf. Außerdem trug er einige neue Ergebnisse über Familien von achsenparallelen Quadern und "Pagoden"-Familien vor.

B.GRÜNBAUM (HELLY-type theorems) betrachtete Fragen folgenden Typs: Für welche Familien konvexer Mengen hat die k-Fixierbarkeit von m-gliedrigen Teilfamilien die r-Fixierbarkeit der ganzen Familie zur Folge. Es wurden einige Resultate für Familien von Quadern gebracht.

Zur allgemeinen Theorie der konvexen Mengen:

B.SEGRE (On ovals in GALOIS planes of characteristic 2) sprach über algebraische und geometrische Eigenschaften von GALOIS-Räumen $S_{r,q}$, d.h. von r-dimensionalen projektiven Räumen über GF(q), wobei $q = p^h$ (p Primzahl) ist, besonders in Hinblick auf Ovale (d.s. Mengen von q+2 Punkten, von denen keine 3 kollinear sind), im Fall $r = p = 2$.

Zur Elementargeometrie:

P.ERDÖS (Probleme und Resultate der elementaren diskreten Geometrie) sprach über eine Reihe von Problemen der folgenden Art: In einem konvexen n-Eck gibt es bekanntlich (ALTMAN) mindestens $\left[\frac{n}{2}\right]$ verschiedene Entfernungen unter den Eckpunkten. Nach dem bekannten Gegenbeispiel von DANZER bleibt folgende Frage: Gibt es einen Eckpunkt, so daß es mindestens $\left[\frac{n}{2}\right]$ verschiedene Entfernungen von ihm gibt? Anderes Problem: Es seien n Punkte in der Ebene gegeben, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Der Vortragende vermutet, daß sie mindestens n-2 Winkel bestimmen.

V.POLÁK (Some problems concerning polygons and convex polytopes) gab eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einfacher Polygone im E_3 mit vorgeschriebenen Seitenrichtungen, Sätze über Stabilität, über gewisse Transformationen einfacher gleichwinkliger ebener Polygone und ein Theorem über die Regularität.

Zur Theorie der konvexen Körper:

H.BIERI (Das verallgemeinerte BLASCHKEsche Diagramm und seine Verwendung in einem Problem über konvexe Körper) fand mittels Kurvendiskussion gewisse Resultate, die sich auf den Rand von BLASCHKEs Diagramm für konvexe Körper beziehen. Die dabei auftretenden Fragen gehören zum Problem der noch fehlenden Ungleichung für konvexe Körper.

H.S.M.COXETER (The classification of zonohedra by means of projectiv diagrams) gab alle Typen von Zonoedern an. Dabei ist im dreidimensionalen affinen Raum ein Zonoeder ein konvexes Polyeder, dessen Flächen alle zentralsymmetrisch sind. Es gibt fünf Typen: Würfel, sechseckiges Prisma, Rhombendodekaeder, verlängertes Dodekaeder, verstümmeltes Oktaeder.

Zur Anwendung auf die Biologie:

W.MERETZ (Die Form der Tier- und Pflanzenzellen im undifferenzierten Gewebe als Problem der diskreten Geometrie) ging von einigen bekannten Eigenschaften von undifferenziertem Gewebe aus. Es wurde versucht,

mit Hilfsmitteln der diskreten Geometrie das Gewebewachstum zu erfassen. Ferner wurde ein Ansatz für eine statistische Untersuchungsmöglichkeit des Gewebewachstums angegeben.

Die Tagung wurde von allen Teilnehmern als sehr erfolgreich empfunden. Als besonders anregend erwiesen sich die ausführlichen Diskussionen im engeren und weiteren Kreis, wobei zahlreiche offene Fragen aufgeworfen wurden. Es ist zu hoffen, daß bis zu einer Wiederholung der Tagung zu gegebener Zeit - dieser Wunsch wurde von seiten der Tagungsteilnehmer lebhaft geäußert - Fortschritte in Richtung dieser offenen Probleme erzielt werden.

mit Hilfsmitteln der diskreten Geometrie das Gewebewachstum zu erfassen. Ferner wurde ein Ansatz für eine statistische Untersuchungsmöglichkeit des Gewebewachstums angegeben.

Die Tagung wurde von allen Teilnehmern als sehr erfolgreich empfunden. Als besonders anregend erwiesen sich die ausführlichen Diskusionen im engeren und weiteren Kreis, wobei zahlreiche offene Fragen aufgeworfen wurden. Es ist zu hoffen, daß bis zu einer Wiederholung der Tagung zu gegebener Zeit - dieser Wunsch wurde von seiten der Tagungsteilnehmer lebhaft geäußert - Fortschritte in Richtung dieser offenen Probleme erzielt werden.