Mathematisches Forschungsinstitut

Oberwolfach

Tagungsbericht

1. Tagung über Funktionalgleichungen

2.- 8. September 1962

Vom 2. bis 8.September 1962 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach die erste Tagung über Funktionalgleichungen unter der Leitung der Professoren J.ACZÉL (Debrecen), O.HAUPT (Erlangen) und A.OSTROWSKI (Montagnola-Basel) statt.

Insgesamt waren 15 aktive Teilnehmer anwesend, davon 12 aus dem Ausland. Von diesen kamen sechs aus den Vereinigten Staaten, vier aus Ungarn und je einer aus Frankreich und der Schweiz. Die Teilnehmer waren die folgenden:

J.ACZÉL (Debrecen, Ungarn),
S.ACZÉL (Debrecen, Ungarn),
A.BERGMANN (Würzburg, Deutschland),
W.EICHHORN (Würzburg, Deutschland),
I.FENYÖ (Budapest, Ungarn),
O.HAUPT (Erlangen, Deutschland),
E.HILLE (New Haven, Conn, U.S.A.),
R.MEYNIEUX (Paris, Frankreich),
A.OSTROWSKI (Basel, Schweiz),
B.SCHWEIZER (Tucson, Arizona, U.S.A.),
A.SKLAR (Chicago, Illinois, U.S.A.),
O.TAUSSKY-TODD (Pasadena, California, U.S.A.),
H.P.THIELMAN (Alexandria, Virginia, U.S.A.),
J.TODD (Pasadena, California, U.S.A.),
E.VINCZE (Miskolc, Ungarn).

Die Teilnehmer, insbesondere die im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach zum ersten Mal anwesenden, fühlten sich von der "Oberwolfacher mathematischen Atmosphäre" angeregt und legten großen Wert nicht nur auf die Vorträge, sondern mindestens ebensosehr auf den durch die persönlichen Kontakte ermöglichten wissenschaftlichen Gedankenaustausch.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Die vorgetragenen Ergebnisse berührten fast sämtliche aktuellen Problemkreise der Theorie der Funktionalgleichungen. Besonders eingehend wurden erörtert Fragen der Klassifikation, allgemeine Methoden, algebraische Verallgemeinerungen sowie Anwendungen der Funktionalgleichungen, speziell in der Geometrie, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Physik. Außerdem wurden von den Teilnehmern, insbesondere von Prof.J.ACZÉL, eine große Anzahl wichtiger, teils ungelöster, teils nicht vollständig gelöster Fragen aufgeworfen. Die unmittelbar an die Vorträge anschließenden Diskussionen, in denen vor allem Prof.A.OSTROWSKI viele wertvolle Beiträge gab, sowie die unabhängig von den Vorträgen hervorgehobenen Problemstellungen und Bemerkungen haben die Tagung überaus wirksam ergänzt. So ergab sich ein guter Überblick über den heutigen Stand der Theorie der Funktionalgleichungen.

Alle Teilnehmer bedauerten lebhaft, daß mehrere der eingeladenen Mathematiker wegen Paß- bzw. Visum-Schwierigkeiten nicht teilnehmen konnten.

Im Namen der Tagungsleitung begrüßte Prof.O.HAUPT die Teilnehmer. Sodann wurde in die Festlegung der Vortragsfolge eingetreten.

Kurzfassungen der Vorträge sowie die Problemstellungen folgen (getrennt voneinander) in chronologischer Reihenfolge.

I.FENYÖ (Budapest):

Die Anwendung der Distributionentheorie zur Lösung von Funktionalgleichungen

Die Funktionalgleichung wird mittels gewisser neuer Begriffe auf das Gebiet der Distributionen umgeschrieben und dort in Differentialgleichungen überführt. Dadurch erhält man die Distributionenlösungen gewisser Funktionalgleichungen. [Vgl. auch I.FENYÖ, Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen, Acta Math.Acad.Sci.Hung., 7 (1956), 383-396.]

A.SKLAR (Chicago)

Towards a classification of functional equations

Eine Algebra von verallgemeinerten Abbildungen mit einer beliebigen Menge als Definitionsbereich wird entwickelt. Mittels dieser Algebra kann man eine genaue Definition des Begriffes einer Funktionalgleichung geben. Weiter kann man sämtlichen Ausdrücken, die in dieser Algebra vorkommen, gewisse Zahlen (Index, Ordnung, Grad usw.) zuordnen.

Diese sind für eine Klassifizierung der Funktionalgleichungen nützlich. [Vgl. B.SCHWEIZER u.A.SKLAR, A mapping algebra with infinitely many operations, Colloquium Math., 9 (1962), 33-38.]

J.ACZÉL (Debrecen):

Einige neuere Ergebnisse und offene Fragen der Theorie der Funktionalgleichungen

Es wurden u.a. folgende Problemkreise behandelt: Allgemeine Methoden. Spezialfälle der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(y)$$

und algebraische Verallgemeinerungen (insbesondere: Ist eine Gruppe 'homotop' $f(x+y) = g(x)h(y)$ zu einer kommutativen Halbgruppe, so ist sie auch homomorph). Anwendungen: Mittelwerte, utility, Charakterisierung der Informationsmasse, Axiomatik der nichteuklidischen Relativitätstheorie, Charakterisierung des Doppelverhältnisses. Anwendungen in der Theorie der geometrischen Objekte (Invarianten, Komitanten, lineare geometrische Objekte, nichtdifferenzielle Objekte und Äquivalenz).

Z.DARÓCZY (Debrecen):

Über die Mittelwerte endlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen

(Bericht von J.ACZÉL über das eingesandte Manuskript)

Es wurde der folgende Satz bewiesen: Aus der Stetigkeit von $I[(p)]$, aus $I[(\frac{1}{2})] = 1$, $I[\mathfrak{p} * \mathfrak{q}] = I[\mathfrak{p}] + I[\mathfrak{q}]$ und aus

$$I[\mathfrak{p} \cup \mathfrak{q}] = g^{-1}\left[\frac{w(\mathfrak{p})\, g(I[\mathfrak{p}]) + w(\mathfrak{q})\, g(I[\mathfrak{q}])}{w(\mathfrak{p}) + w(\mathfrak{q})}\right] \quad \text{(g stetig, streng monoton)}$$

folgt entweder $I[\mathfrak{p}] = -\frac{\sum p_k \log_2 p_k}{\sum p_k}$ oder $I[\mathfrak{p}] = \frac{1}{1-\alpha} \log_2\left(\frac{\sum p_k^{\alpha}}{\sum p_k}\right)$;

($\mathfrak{p} = (p_1, p_2, \ldots p_n)$, $w(\mathfrak{p}) = \sum p_k \ (\leq 1)$, $\mathfrak{p} * \mathfrak{q}$ das direkte Produkt, $\mathfrak{p} \cup \mathfrak{q}$ die Vereinigung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$). Das ist eine gemeinsame Charakterisierung der SHANNONschen Entropie und der Entropien α-ter Ordnung für unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Diese sind für eine Klassifizierung der Funktionalgleichungen nützlich. [Vgl. B.SCHWEIZER u.A.SKLAR, A mapping algebra with infinitely many operations, Colloquium Math., 9 (1962), 33-38.]

J.ACZÉL (Debrecen):

Einige neuere Ergebnisse und offene Fragen der Theorie der Funktionalgleichungen

Es wurden u.a. folgende Problemkreise behandelt: Allgemeine Methoden. Spezialfälle der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(y)$$

und algebraische Verallgemeinerungen (insbesondere: Ist eine Gruppe 'homotop' $f(x+y) = g(x)h(y)$ zu einer kommutativen Halbgruppe, so ist sie auch homomorph). Anwendungen: Mittelwerte, utility, Charakterisierung der Informationsmasse. Axiomatik der nichteuklidischen Relativitätstheorie, Charakterisierung des Doppelverhältnisses. Anwendungen in der Theorie der geometrischen Objekte (Invarianten, Komitanten, lineare geometrische Objekte, nichtdifferenzielle Objekte und Äquivalenz).

Z.DARÓCZY (Debrecen):

Über die Mittelwerte endlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen

(Bericht von J.ACZÉL über das eingesandte Manuskript)

Es wurde der folgende Satz bewiesen: Aus der Stetigkeit von $I[(p)]$, aus $I[(\frac{1}{2})] = 1$, $I[\mathcal{P} \times \mathcal{Q}] = I[\mathcal{P}] + I[\mathcal{Q}]$ und aus

$$I[\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}] = g^{-1}\left[\frac{w(\mathcal{P})\, g(I[\mathcal{P}]) + w(\mathcal{Q})\, g(I[\mathcal{Q}])}{w(\mathcal{P}) + w(\mathcal{Q})}\right] \quad \text{(g stetig, streng monoton)}$$

folgt entweder $I[\mathcal{P}] = -\frac{\sum p_k \log_2 p_k}{\sum p_k}$ oder $I[\mathcal{P}] = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\frac{\sum p_k^{\alpha}}{\sum p_k}\right)$;

($\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $w(\mathcal{P}) = \sum p_k$ (≤ 1), $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ das direkte Produkt, $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ die Vereinigung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$).

Das ist eine gemeinsame Charakterisierung der SHANNONschen Entropie und der Entropien α-ter Ordnung für unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

E.VINCZE (Miskolc):

Über eine allgemeine Lösungsmethode in der Theorie der Funktionalgleichungen

Es handelt sich um eine neue elementare Lösungsmethode, die u.a. zur Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x*y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(y)$$

angewendet werden kann, wobei $x,y,x*y$ Elemente einer beliebigen kommutativen Halbgruppe Q bezeichnen und die Funktionen f,g_i,h_i die Elemente der Halbgruppe Q in (oder auf) einen beliebigen Körper abbilden. [Vgl. auch die Arbeit in Publ.Math.Debrecen, 9 (1962), 149-163.]

R.MEYNIEUX (Paris):

Analytizität gewisser kontinuierlicher Funktionen, die eine Funktionalgleichung befriedigen

Es handelt sich um die Gleichung $F[f(u),g(v),h(u+v)] = 0$, wobei $(u,v)\in\Delta$ ist; Δ ist ein Gebiet in $R^q\times R^q$ (dann beschreiben $u,v,u+v$ Gebiete U,V,W in R^q); f,g,h sind kontinuierliche Abbildungen von U,V,W in $X = R^l$, $Y = R^m$, $Z = R^n$; F ist eine analytische Abbildung in R^n von dem Gebiet $D\subset X\times Y\times Z$; es wird angenommen, 1) daß $(u,v)\in\Delta \Rightarrow [f(u),g(v),h(u+v)]\in D$, und 2) daß eine in Δ überall dichte Untermenge Δ^1 existiert, so daß die JACOBIsche Determinante $\partial F(x,y,z)/\partial z$ stets $\neq 0$ bleibt, wenn $(x,y,z) = [f(u),g(v),h(u+v)]$ und $(u,v)\in\Delta^1$ ist. Dann ist die Funktion h analytisch in einer in W überall dichten offenen Untermenge W', die aus Gebieten besteht, deren Anzahl lokal endlich ist. Ist $F(x,y,z) = z - \varphi(x,y)$, dann ist h analytisch in W; bei gewissen Bedingungen sind auch f und g analytisch. [Vgl. C.R.Acad.Sci.Paris, März, Juni und Juli 1962.]

G.N.SAKOWITSCH (Kiew):

a) Funktionalgleichungen für Exponentialsummen

b) Gleichung $f(x+y) - 2f(x) + f(x-y) = 2g(x)|y|$

(Bericht von A.OSTROWSKI über das eingesandte Manuskript)

Die erste Mitteilung behandelt einige Funktionalgleichungen, die zur Charakterisierung der Summen vom Typus $\sum P_i(x)e^{\alpha_i x}$ ($P_i(x)$ Polynome) dienen.

In der zweiten Mitteilung wurde bewiesen, daß $g(x)\equiv 0$ ist, wenn die Gleichung in einem offenen Intervall gilt, in dem f(x) und g(x)

beliebige Funktionen sind.

A.OSTROWSKI hat den Beweis des Herrn SAKOWITSCH vereinfacht; ein anderer Beweis wurde von J.ACZÉL gegeben.

W.EICHHORN (Würzburg):

Lösung des Funktionalgleichungssystems

$$\eta_i(\sigma+\tau) = \sum_{j,k=1}^{n} \eta_j(\sigma)\,\eta_k(\tau)\gamma_i^{jk} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

mit komplexen Veränderlichen σ, τ und Konstanten γ_i^{jk}.

Der Vortragende definiert eine (nicht notwendig assoziative oder kommutative) Algebra A vom Rang n über dem reellen oder komplexen Zahlkörper K durch Angabe der Basiselemente $e^1, e^2, \ldots, e^n$, für die

$e^j e^k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{jk} e^i \quad (j,k=1,\ldots,n)$ gilt.

Satz: Jeder Vektor $(\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_n(\xi))$ von in $|\xi| < \infty$ (mindestens) einmal stetig differenzierbaren reellen oder komplexen Funktionen $\varphi_i(\xi)$ besteht aus den Komponenten einer hyperkomplexwertigen Exponentialfunktion $y = \exp_b(a\xi) = b + a\xi + a^2\frac{\xi^2}{2!} + \ldots$ mit

$b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e^j \in J \subset A$ und $a = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^k \in M_b \subseteq A$. Dabei ist $J = \{b \mid b^2 = b\}$;

$M_b = \{a \mid a$ potenzassoziativ und $ba^\nu = a^\nu b = a^\nu \ (\nu = 1,2,\ldots)\}$.

H.P.THIELMAN (Alexandria, U.S.A.):

Über eine Funktionalgleichung, die in der Elastizitätstheorie auftritt

B.R.SETH [Technical Report No.251, August 1961, Mathem.Research Center, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin] hat gezeigt, daß ein gewisses Problem, das mit dem Biegen von Platten zusammenhängt, auf eine Funktionalgleichung von der Art $X(u+v)X(u-v) = g(u) + h(v)$ zurückgeführt werden kann. Zur Behandlung dieser Gleichung hat SETH angenommen, daß die Lösungen zweimal differenzierbar seien. Es wurde hier nur Beschränktheit und Integrierbarkeit der Lösungen der obigen Funktionalgleichung vorausgesetzt. Unter diesen Voraussetzungen wurde gezeigt, daß die Lösungen beliebig oft differenzierbar sind. Mit Hilfe dieser Tatsache hat der Vortragende bewiesen, daß alle solchen Lösungen die bekannten analytischen Exponentialfunktionen oder lineare Funktionen sind.

B.SCHWEIZER (Tucson):

Verallgemeinerungen eines Satzes von CLIMESCU und Lösungen der Assoziativitätsgleichung

Es sei f eine Abbildung von A auf B. Eine Rechts-Halbinverse von f ist eine Abbildung g mit Definitionsbereich B, Wertebereich A, die die Gleichung $f[g(x)] = x$ erfüllt. [Vgl. B.SCHWEIZER u.A.SKLAR, The algebra of functions, Math.Ann.139 (1960), 366-382; 143 (1961), 440-441.] Durch Einführung dieses Begriffes sowie auch des Begriffes eines Ideals einer Halbgruppe, werden zwei Verallgemeinerungen eines Satzes von CLIMESCU über Abbildung von Halbgruppen auf Halbgruppen bewiesen. Mit Hilfe der ersten dieser Verallgemeinerungen erhält man eine große Klasse von nicht streng-monotonen Lösungen der Assoziativitätsgleichung $F[F(x,y),z] = F[x,F(y,z)]$. Außerdem wird bewiesen, daß die Behauptung, daß jede Abbildung eine Rechtshalbinverse besitzt, mit dem Auswahlaxiom äquivalent ist.

E.HILLE (New Haven):

Bemerkungen zur Kommutatorgleichung

Es sei a Element einer BANACH-Algebra $\mathcal{A}$ (nicht kommutativ, aber mit Einheitselement); a nicht im Zentrum. Es sei $C_a[x] = ax - xa$. Es handelt sich um die spektralen Eigenschaften des Operators C_a unter Annahme, daß $\mathcal{A}$ ein Primring ist. Für die Lösung der Kommutator - gleichung $\lambda x - ax + xa = y$ wurde die Integraldarstellung von DALETSKY gegeben. Zusammenhänge mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen an einer singulären Stelle des Bestimmtheitsfalles wurden erwähnt. Die dem $\lambda = 0$ entsprechende Gleichung tritt in der Theorie der Differentialgleichungen auf. Es wurde die Theorie auf unbeschränkte lineare Operatoren $\mathcal{A}$ auszudehnen versucht.

A.OSTROWSKI (Basel):

Die CAUCHYsche Funktionalgleichung für Vektorfunktionen

Sei $P(u_1,\dots,u_n)$ ein Punkt des n-dimensionalen Vektorraumes S' und P(x) eine Vektorfunktion der reellen Variablen x, die der Funktionalgleichung $P(x+y) = P(x) + P(y)$ genügt. Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge positiven Maßes auf der Zahlengeraden und V eine Sphäre in S', so daß kein Wert von P auf $\mathfrak{M}$ in S' eindringt. Dann gibt es eine lineare Kombination der $u_1(x),\dots,u_n(x)$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k(x)$, die die Gestalt cx hat.

O.TAUSSKY-TODD (Pasadena):

On the role of the determinant in semigroups of matrices

In den letzten Jahren sind einige algebraische Beweise für die folgende Charakterisierung der Determinanten von n.n Matrizen X mit Elementen in einem Körper gegeben worden. Wenn f(X) eine homomorphe Abbildung der X in den Körper K ist, dann ist $f = \varphi(\det X)$ (φ multiplikativ). Nun wird die Frage für Matrizen über einem Ring und außerdem nur für Halbgruppen von Matrizen anstatt des Ringes aller Matrizen betrachtet. (Vgl. O.TAUSSKY-TODD and H.WIELANDT, On the role of the determinant in semigroups of matrices, Oxford Quarterly Journal of Math.)

A.BERGMANN (Würzburg):

Die Determinante als Lösung eines Systems von Funktionalgleichungen

Es sei V ein Vektorraum der dim n über einem Körper (für den im Vortrag angenommen wird: char $K = 0$ oder falls char $K = p \neq 0 : p > n$); $\varepsilon = \mathrm{Hom}_k(V,V)$ der Endomorphismenring von V. Dann wird nachgewiesen, daß die Determinante durch folgende Axiome eindeutig und basisinvariant gekennzeichnet ist: (I) $f(XY) = f(X)f(Y)$,

(II) $$n!(X_1,\ldots,\xi_i X_i+\eta_i Y_i,\ldots,X_n) = \xi_i n!(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n) + \eta_i n!(X_1,\ldots,Y_i,\ldots,X_n) ,$$

$(X,Y,X_i,Y_i \in \varepsilon;\ \xi_i,\eta_i \in K)$. Dabei ist

$$n!(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} \sum_{\kappa} f(X_{i_1}+\ldots+X_{i_\kappa}) .$$

Der Beweis wird abweichend von der Behandlung in Archiv Math. 10 (1959) durch Anwendung von Ergebnissen aus der multilinearen Algebra geführt.

M.KUCZMA (Katovice):

Bemerkungen über Funktionalgleichungen

(Bericht von A.SKLAR über das eingesandte Manuskript)

Im ersten Teil der Arbeit schlägt der Verfasser eine Klassifizierung der Funktionalgleichungen vor, in welcher die unbekannten Funktionen Funktionen einer Veränderlichen sind. Im zweiten Teil beschäftigt sich der Verfasser mit dem Problem der Reduktion der Ordnung für gewisse Funktionalgleichungen.

A.MOÓR (Szeged):

Über die Form der Fundamentalgrößen gewisser affiner Räume

(Bericht von J.ACZÉL über das eingesandte Manuskript)

Es wird das Problem der Möglichkeit der Darstellung der $\Gamma^i_{(M+1)}$ in

$$\frac{d^{M+1}x^i}{ds^{M+1}} + \Gamma^i_{(M+1)}\left(x, \frac{dx^j}{ds}, \ldots, \frac{d^M x^j}{ds^M}\right) = 0$$

als Funktionen von $\Gamma^j_{(M)}$, $\frac{\partial \Gamma^j_{(M)}}{\partial x^k}$ und $\frac{dx^j}{ds}$ in den Fällen $M = 0,1,2$ erörtert.

O.HAUPT (Erlangen):

Geometrische Bemerkung zu gewissen Verallgemeinerungen konvexer Funktionen

In einer Arbeit (Sur une généralisation des fonctions convexes, Math. Vol.1 (1959)) betrachtet E.MOLDOVAN Systeme eindeutiger, reeller, stetiger Funktionen φ im Intervall $J = [a,b]$ mit der Eigenschaft: Sind $x_1,\ldots,x_k \in J$ verschiedene und sind $y_1,\ldots,y_k$ beliebige reelle Zahlen, so gibt es genau ein $\varphi \in F_k$ mit $y_\varkappa = \varphi(x_\varkappa)$, $\varkappa = 1,\ldots,k$ ($\geqslant 1$). Eine reelle stetige Funktion φ/J heißt F_k-valent, wenn $f-\varphi$ maximal k Nullstellen besitzt für jedes $\varphi \in F_k$. Die Menge der F_k-valenten f ist gleich der Menge der F_k-konvexen zusammen mit der Menge der F_k-konkaven Funktionen; das sind solche f, für die bei beliebigen $x_\varkappa \in J$, $x_1 < \ldots < x_k$ und für jedes $\varphi \in F_k$ mit $f(x_\varkappa) = \varphi(x_\varkappa)$ gilt $f(x) - \varphi(x) > 0$ bzw. < 0 für jedes $x \in J$ mit $x_k < x$. Die F_k-valenten Funktionen sind gekennzeichnet durch das Fehlen F_k-singulärer Punkte für f; darunter versteht man solche $\xi \in J$, für die gilt: Zu beliebig kleiner Umgebung U von ξ existieren $x'_\varkappa \in U$ und $\varphi \in F_k$ mit $f(x'_\varkappa) - \varphi(x'_\varkappa) = 0$, $\varkappa = 1,\ldots,k,k+1$. Es wird gezeigt, wie die vorgenannten und andere Sätze der MOLDOVANschen Arbeit sowie bei MOLDOVAN nicht berührte Sätze aus allgemeinen ordnungsgeometrischen Sätzen unmittelbar gefolgert werden können.

Problemstellungen und Bemerkungen:

1. $F[F(x,y),z] = F[F(x,z),F(y,z)]$, wobei F stetig und in beiden Veränderlichen streng monoton ist. Gibt es andere Lösungen als die der Gestalt $F(x,y) = f^{-1}[qf(x) + (1-q)f(y)]$ (f stetig, streng monoton; $q \neq 0$, $q \neq 1$)? NB.: Die Antwort ist nein, falls F (zweimal) differenzierbar ist oder falls auch $F[x,F(y,z)] = F[F(x,y),F(x,z)]$ gilt.

   J.ACZÉL

2. $F[G(x,y),z] = G[F(x,z),F(y,z)]$ ist allgemein auch dann noch nicht gelöst, wenn F und G (wiederholt) differenzierbare Funktionen sind; F, G sind beide unbekannt.

   J.ACZÉL

3. Hat $f(\pi x+y) = Cf(x) + f(y)$ (π die LUDOLPHsche, C die EULERsche Konstante) vom trivialen $f(x) \equiv 0$ verschiedene Lösungen? Vgl.: Z.DARÓCZY, Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen, Acta Sci.Math. Szeged, 23 (1961), 31-41.

   J.ACZÉL - O.HAUPT - B.SCHWEIZER

4. Was ist die allgemeinste, reelle, in beiden Veränderlichen stetige und streng monotone Lösung der Funktionalgleichung $F[F(x,y),x] = F[x,F(y,x)]$?

   E.VINCZE

5. Hat die Funktionalgleichung $F[F(x,y),z] = F[x,F(y,z)]$ auch nichtsymmetrische, aber streng monotone Lösungen, falls die Operation $F(x,y) = x*y$ bezüglich einer Menge der reellen Zahlen eine Gruppe bildet? Solche Lösungen sind nur im Falle bekannt, wo die Operation $F(x,y) = x*y$ bezüglich einer Menge der reellen Zahlen nur eine Halbgruppe bildet.

   E.VINCZE

6. Allgemeine Lösung $F(XY) = F(X)F(Y)$, wo X,Y Matrizen n-ter, und die Werte der Funktion F Matrizen m-ter Ordnung sind. In den Spezialfällen $m = 1$ allgemeine Lösung, im Falle $n = 1$ allgemeine stetige Lösung bekannt, auch weitere analytische Teilergebnisse.

   J.ACZÉL

Problemstellungen und Bemerkungen:

1. $F[F(x,y),z] = F[F(x,z),F(y,z)]$, wobei F stetig und in beiden Veränderlichen streng monoton ist. Gibt es andere Lösungen als die der Gestalt $F(x,y) = f^{-1}[qf(x) + (1-q)f(y)]$ (f stetig, streng monoton; $q \neq 0$, $q \neq 1$)? NB.: Die Antwort ist nein, falls F (zweimal) differenzierbar ist oder falls auch $F[x,F(y,z)] = F[F(x,y),F(x,z)]$ gilt.

J.ACZÉL

2. $F[G(x,y),z] = G[F(x,z),F(y,z)]$ ist allgemein auch dann noch nicht gelöst, wenn F und G (wiederholt) differenzierbare Funktionen sind; F, G sind beide unbekannt.

J.ACZÉL

3. Hat $f(\pi x+y) = Cf(x) + f(y)$ (π die LUDOLPHsche, C die EULERsche Konstante) vom trivialen $f(x) \equiv 0$ verschiedene Lösungen?
Vgl.: Z.DARÓCZY, Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen. Acta Sci.Math. Szeged, 23 (1961), 31-41.

J.ACZÉL - O.HAUPT - B.SCHWEIZER

4. Was ist die allgemeinste, reelle, in beiden Veränderlichen stetige und streng monotone Lösung der Funktionalgleichung $F[F(x,y),x] = F[x,F(y,x)]$?

E.VINCZE

5. Hat die Funktionalgleichung $F[F(x,y),z] = F[x,F(y,z)]$ auch nichtsymmetrische, aber streng monotone Lösungen, falls die Operation $F(x,y) = x*y$ bezüglich einer Menge der reellen Zahlen eine Gruppe bildet? Solche Lösungen sind nur im Falle bekannt, wo die Operation $F(x,y) = x*y$ bezüglich einer Menge der reellen Zahlen nur eine Halbgruppe bildet.

E.VINCZE

6. Allgemeine Lösung $F(XY) = F(X)F(Y)$, wo X,Y Matrizen n-ter, und die Werte der Funktion F Matrizen m-ter Ordnung sind. In den Spezialfällen m = 1 allgemeine Lösung, im Falle n = 1 allgemeine stetige Lösung bekannt, auch weitere analytische Teilergebnisse.

J.ACZÉL

7. Das Problem der Bestimmung aller Homomorphismen der linearen (affinen) Gruppe des n-dimensionalen Raumes führt auf das Funktionalgleichungssystem

$$F(XU, Xv+y) = F(X,y)F(U,v) ,$$

$$g(XU, Xv+y) = F(X,y)g(U,v) + g(X,y) ;$$

große Buchstaben bedeuten Matrizen, kleine Vektoren n-ter Ordnung. Der Fall $n = 1$ ist gelöst (auch in allgemeinen Körpern); vgl. Bollettino Un.Mat.Ital. 1960; Bulletin Ec.polyt.Jassy 1962.

J.ACZÉL

8. Charakterisierung der Funktionen

$$g^{-1}\left[\frac{\sum p_i g(p_i)}{\sum p_i}\right] = I(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

durch Funktionalgleichungen. Dadurch erhielte man eine Charakterisierung der üblichen Entropien ohne Apriori-Voraussetzungen bezüglich ihrer speziellen Gestalt, was aber vielleicht auch ohnedies erreichbar ist.

J.ACZÉL

9. Problem der Charakterisierung der SHANNONschen Entropie unter Verwendung nur bedingter Entropien (KOLMOGOROV) oder nur unbedingter Entropien (ACZÉL).

J.ACZÉL

10. Es wird erinnert an den Beweis von GANAPATHY-IYER (vgl. J.Ind.Math. Soc., 3 (1939), 312-315), daß aus $f(z)^n + g(z)^n \equiv 1$ für ganze Funktionen $n \leq 2$ folgt.

O.TAUSSKY-TODD

11. Suchen wir den Endpunkt $x_4 = f(x_1, x_2, x_3)$ eines Vektors $\overrightarrow{x_3 x_4}$, der einem gegebenen $\overrightarrow{x_1 x_2}$ äquivalent sein soll, so bedeutet die Reflexivität (R) $f(x_1, x_2, x_1) = x_2$, die Symmetrie (S) $f[x_3, f(x_1, x_2, x_3), x_1] = x_2$ und die Transitivität (T) $f[x_3, f(x_1, x_2, x_3), x_5] = f(x_1, x_2, x_5)$. Die allgemeinste Lösung von (R)+(S)+(T) [NB.: (R)+(T)$\rightarrow$(S)] ist $f(x_1, x_2, x_3) = F^{-1}[F(x_2, x_1), x_3]$, wo $F(x, x_1)$ eine beliebige Funktion zweier Veränderlicher mit einer Inversen F^{-1} ist, für die $F^{-1}[F(x, x_1), x_1] = F[F^{-1}(x, x_1), x_1] = x$ gilt. Kann man vernünftige weitere Bedingungen zu (R), (S), (T) derart hinzunehmen, daß statt der beliebigen Funktion zweier Veränderlicher in der Lösung nur beliebige Funktionen einer Veränderlichen auftreten? NB.: Die Umkehrbarkeit (U)

$f[x_2, x_1, f(x_1, x_2, x_3)] = x_3$ ist nicht genügend dazu; ebensowenig die Parallelogramm eigenschaft (P) $f(x_1, x_3, x_2) = f(x_1, x_2, x_3)$. Vgl. die Arbeiten in Fundamenta Math. von S.GOLAB (1961) und J.ACZÉL (1962).

J.ACZÉL

12. Es seien $x_i = a\Psi_i(\varphi)$ $(i = 1,2,3)$ und $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Man betrachtet die Funktionalgleichung

$$\int_0^1 \prod_{i=1}^{3} y[t + a\Psi_i(\varphi)]\, d\varphi = \Phi_1(a)\,\Phi_2(t) \qquad (a \geq 0,\ -\infty < t < \infty),$$

wobei die Veränderlichen und die Funktionen reell sind. Wenn die Funktion $y(t)$ zweimal derivierbar ist, ist die Lösung für y die GAUSSsche Verteilung, d.h. $y(t) = c_1 \exp(-c_2 t^2 + c_3 t)$ $(c_1, c_2 > 0)$. Was ist die Lösung ohne Voraussetzung zweimaliger Derivierbarkeit? (Φ_1, Φ_2 unbekannt.)

J.V.LINNIK

13. A.OSTROWSKI skizziert einen elementaren Beweis für den im Vortrag von O.TAUSSKY-TODD besprochenen Satz über die Funktionalgleichung $f(XY) = f(X)f(Y)$ im Bereich der $(n.n)$ Matrizen auf Körpern.

14. Bestimmung aller Invarianten eines allgemeinen Tensors (noch allgemeiner: aller relativen Invarianten im Sinne von M.KUHARZEWSKI, d.h. der Invarianten auf einem Transitivitätsbereich des Tensors).
NB.: Für reine (H.ZAJTS, noch nicht publiziert) und für gemischte Tensoren (J.ACZÉL-M.HOSSZU, Ann.Polon.Math.1962) ist die Frage gelöst. Das führt auf Matrix-Skalar-Gleichungen $f(A'XA) = f(X)$ bzw. $f(A^{-1}XA) = f(X)$. (A^{-1}: Inverse , A'Transponierte Matrix.)

J.ACZÉL

15. Es wurde bemerkt, daß die für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wohlbekannten Eigenschaften der Lösungen ganz für unendliche Systeme verloren gehen. Als Beispiel wurde das System

$$x_k'(t) + kx_k(t) = \sum_{k+1}^{\infty} x_m(t) \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

$$\{x_k(t)\} \in L$$

genommen, wo die Lösung von einer beliebigen integrierbaren Funktion abhängt. Es braucht keine zweite Ableitung überall zu existieren. Eine in $t = 0$ vorgegebene Lösung existiert für $t > 0$, sie soll aber nicht für $t < 0$ existieren.

E.HILLE

16. Es sei $f(x)$ eine Funktion, die für Quaternionen oder CAYLEYsche Zahlen definiert ist und deren Wert ein Quaternion oder eine CAYLEYsche Zahl ist. Es sei ferner $f(xy) = f(x)f(y)$. Wie charakterisiert man die Funktion $f(x) = x$?

O.TAUSSKY-TODD

17. Es sei $f(x)$ eine Funktion, die für Quaternionen oder CAYLEYsche Zahlen definiert ist und deren Wert eine reelle Zahl ist. Es sei weiter $f(xy) = f(x)f(y)$. Wie charakterisiert man die Funktion $f(x) = \text{norm } x$?

O.TAUSSKY-TODD

18. Es sei F eine genügend oft differenzierbare, assoziative Funktion. Ist die Fläche $z = F(x,y)$ isotherm?

B.SCHWEIZER

Die Tagung endete mit Schlußworten von Prof.A.OSTROWSKI, der zugleich im Namen der Teilnehmer deren herzlichsten Dank an die Institutsleitung für die Veranstaltung der Tagung zum Ausdruck brachte. Zugleich wurde betont, wie gut aufgehoben und freundlich betreut sich die Teilnehmer im Lorenzenhof fühlten.

Die Genugtuung der Teilnehmer über die ungewöhnlich anregende und fruchtbare Tagung war allgemein. Einhellig war der Wunsch, es möchten Tagungen über Funktionalgleichungen in regelmäßigen Abständen abgehalten werden. Als Zeitpunkt für die nächste Tagung wurde die erste Woche des Oktober 1963 ins Auge gefaßt.

genommen, wo die Lösung von einer beliebigen integrierbaren Funktion abhängt. Es braucht keine zweite Ableitung überall zu existieren. Eine in $t = 0$ vorgegebene Lösung existiert für $t > 0$, sie soll aber nicht für $t < 0$ existieren.

E.HILLE

16. Es sei $f(x)$ eine Funktion, die für Quaternionen oder CAYLEYsche Zahlen definiert ist und deren Wert ein Quaternion oder eine CAYLEYsche Zahl ist. Es sei ferner $f(xy) = f(x)f(y)$. Wie charakterisiert man die Funktion $f(x) = x$?

O.TAUSSKY-TODD

17. Es sei $f(x)$ eine Funktion, die für Quaternionen oder CAYLEYsche Zahlen definiert ist und deren Wert eine reelle Zahl ist. Es sei weiter $f(xy) = f(x)f(y)$. Wie charakterisiert man die Funktion $f(x) = \text{norm } x$?

O.TAUSSKY-TODD

18. Es sei F eine genügend oft differenzierbare, assoziative Funktion. Ist die Fläche $z = F(x,y)$ isotherm?

B.SCHWEIZER

Die Tagung endete mit Schlußworten von Prof.A.OSTROWSKI, der zugleich im Namen der Teilnehmer deren herzlichsten Dank an die Institutsleitung für die Veranstaltung der Tagung zum Ausdruck brachte. Zugleich wurde betont, wie gut aufgehoben und freundlich betreut sich die Teilnehmer im Lorenzenhof fühlten.

Die Genugtuung der Teilnehmer über die ungewöhnlich anregende und fruchtbare Tagung war allgemein. Einhellig war der Wunsch, es möchten Tagungen über Funktionalgleichungen in regelmäßigen Abständen abgehalten werden. Als Zeitpunkt für die nächste Tagung wurde die erste Woche des Oktober 1963 ins Auge gefaßt.