

Tagungsbericht

Die Axiomatik im Geometrieunterricht der Gymnasien

21. bis 25. Oktober 1962

Die Tagung "Die Axiomatik im Geometrieunterricht der Gymnasien" vom 21. bis 25. Oktober 1962 in Oberwolfach stand unter der Leitung der Professoren M. BARNER und K. FLADT (Freiburg). An der Tagung nahmen insgesamt 29 Personen aktiv teil, darunter, weil die Tagung den deutschen Belangen gewidmet war, als einziger Ausländer Professor FREUDENTHAL (Utrecht). Die Teilnehmer im einzelnen:

ARZT, Gymn.-Professor, K., Tübingen	WIGAND, St.Rat K., Krefeld
BARNER, Prof. Dr. M., Freiburg	WOLFF, Ost.Dir.Dr. G., Düsseldorf
BOTSCH, Ost.Dir., Heidelberg	FLOFR, Dr. F., Freiburg
DILLER, J., Kiel	
DZEWAS, Dr. J., Hamburg	
FABER, Ost.Dir., Mainz	
FLADT, Prof. Dr. K., Freiburg	
FREUDENTHAL, Prof. Dr. H., Utrecht	
GALL, OSchulrat H., Düsseldorf	
GÖTZ, Gymn.-Professor W., Stuttgart	
GRIESEL, Dr. H., Letmathe	
HOLLAND, St.R. G., Göttingen	
KIRSCH, Dr. A., Göttingen	
KRAFT, Ost.Dir. A., Bad Hersfeld	
KUNLE, Dr. H., Karlsruhe	
LENZ, Prof. Dr. H., München	
LÖFFLER, Präs.Dr.E., Stuttgart	
LIERMANN, Dr. H., Berlin	
RAITH, Gymn.-Professor F., Freiburg	
RÖHRL, E., Stuttgart	
SCHWEIZER, Ost Dir.W., Tübingen	
SEEBACH, Ost.Rat Prof. Dr. K., München	
SIMONIS, OSchulrat P., Düsseldorf	
SPERNER, Prof. Dr. E., Hamburg	
STEINER, H. G., Münster	
STRUNZ, Dr. K., Würzburg	

1962, 12

Math. Forschungsgemeinschaft
Oberwolfach
E 20 / 1962

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tätigkeitsbericht

Die Axiomatik im Geometrieunterricht der Gymnasien

21. bis 25. Oktober 1962

Die Tagung "Die Axiomatik im Geometrieunterricht der Gymnasien" vom 21. bis 25. Oktober 1962 in Oberwolfach stand unter der Leitung der Professoren M. BARNER und K. PLATT (Freiburg). An der Tagung nahmen insgesamt 29 Personen aktiv teil, darunter, weil die Tagung den deutschen Beiträgen gewidmet war, als einziger Ausländer Professor KREUDENHALL (Utrecht). Die Teilnehmer im

- ARST, Gymn.-Professor, K., Tübingen
- BARNER, Prof. Dr. M., Freiburg
- BOTSCH, Ost-Dir., Heidelberg
- DIERER, J., Kiel
- DZEWAS, Dr. J., Hamburg
- FABER, Ost-Dir., Mainz
- PLATT, Prof. Dr. K., Freiburg
- KREUDENHALL, Prof. Dr. H., Utrecht
- GALL, Osehnitzer, H., Düsseldorf
- GÖTTI, Gymn.-Professor, W., Stuttgart
- GRIBBEL, Dr. H., Barmen
- HOLLAND, St. R. G., Göttingen
- KIRSCH, Dr. H., Göttingen
- KRATZ, Ost-Dir., A., Bad Homburg
- KUNZE, Dr. H., Karlsruhe
- LEWY, Prof. Dr. H., München
- LÖPFLER, Prof. Dr. E., Stuttgart
- LIEBMAN, Dr. H., Berlin
- RAITH, Gymn.-Professor, F., Freiburg
- RÖHL, E., Stuttgart
- SCHWEIZER, Ost-Dir., W., Tübingen
- SEEBACH, Ost-Dir., Prof. Dr. K., München
- SIMONIS, Osehnitzer, F., Düsseldorf
- SPENNER, Prof. Dr. E., Hamburg
- STEINER, H. G., Münster
- STRUNK, Dr. K., Wuppertal



An jedes der insgesamt 12 Referate schloß sich eine meist lebhafteste Diskussion, den Abschluß der Tagung bildete eine grundsätzliche Aussprache. Wissenschaftler und Schulmänner tauschten Anregungen und Erfahrungen aus, von denen ein Niederschlag im Geometrieunterricht zu erwarten ist, besonders da viele leitende Schulmänner, Schulbuchverfasser und Seminarleiter anwesend waren.

Die Referate behandelten etwa zur Hälfte vorwiegend didaktische und pädagogische Probleme, zur Hälfte brachten sie Anregungen für teils schulgerechte, teils streng axiomatische Begründungen des Geometrie- und Algebraunterrichts. In den Diskussionen war das Hauptproblem, wie weit in der Mittelstufe dem Schüler ein axiomatischer Aufbau bewußt gemacht werden kann. Professor FREUDENTHAL hielt jedes fixierte geometrische Axiomensystem für unfruchtbar, weil es zu kompliziert ist. Er empfahl, die axiomatische Methode auf die leichter zugänglichen algebraischen Bereiche zu beschränken, weil in den nicht kategorischen Systemen eher umfassende, in vielen Bereichen der Mathematik verwendbare Ergebnisse erzielt werden können. Einige Teilnehmer, darunter Professor FLADT und Professor SPERNER, vertraten dagegen die Ansicht, daß eine auf Axiomen aufgebaute Geometrie, allerdings ohne strenge, rein formale Deduktionen, schon auf der Mittelstufe mit Erfolg betrieben werden könne. In dieser Grundfrage der Tagung brachte auch die abschließende Aussprache keine Einigung, wohl aber eine gewisse Annäherung und Klarstellung der verschiedenen Standpunkte.

F. RAITH (Freiburg): Was soll der Geometrieunterricht auf den Gymnasien?

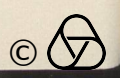
Die Mathematik war bereits ein wesentliches Bildungselement im Quadrivium. Der beweisende Durchgang zu den Sätzen, das Wesentliche des Euklid, wurde allerdings bald vernachlässigt, nur die Ergebnisse wurden gelehrt. Eine Reform setzte erst im 19. Jahrh. ein. Der völlige Sinnwandel wissenschaftlicher Geometrie in den letzten Jahrzehnten führte zu radikalen Erneuerungsansätzen. Die Erkenntnisse der Jugendpsychologie schränken solche Pläne in mehrfacher Weise ein. Der Unterricht muß phasengerecht und genetisch sein. Das Fragen nach Grundlagen ist wichtiger als Mitteilen des fertigen Systems. Jeder Entwicklungsphase ist eine eigene Geometrie zuzubilligen. Geometrie auf der Schule ist etwas immer wieder anderes, neues im Durchgang durch Entwicklungsphasen.

An jedes der insgesamt 12 Beiträge schloß sich eine meist lebhaft diskutierte Diskussion an. Der Abschluß der Tagung bildete eine gewandte Abschlussansprache. Wissenschaftler und Schulmänner tauschten Anregungen und Erfahrungen aus, von denen ein Niederschlag im Geometrieunterrichtsbericht zu erwarten ist, besonders zu viele leitende Schulmänner, Schulbuchverleger und Seminarleiter anwesend waren.

Die Referate behandelten etwa zur Hälfte vorwiegend didaktische und pädagogische Probleme, zur Hälfte brachten sie Anregungen für die schülergerechte, teils streng axiomatische Begründung der Geometrie- und Algebraunterrichts. In den Diskussionsbeiträgen war das Hauptproblem, wie weit in der Mittelschule der Schüler ein axiomatischer Aufbau bewirkt gemacht werden kann. Professor FRIEDRICH HILBERT hielt dabei folgende geometrische Axiomensysteme für am besten geeignet, weil es am kompliziertesten ist. Er empfiehlt, die axiomatische Methode auf die leichter zugänglichen algebraischen Bereiche zu beschränken, weil in den nicht kategorischen Systemen eher umfassen, in vielen Bereichen der Mathematik verwendbare Ergebnisse erzielt werden können. Einige Teilnehmer, darunter Professor WILHELM KILMANN, vertreten dagegen die Ansicht, daß eine auf Axiomen aufgebaute Geometrie, allerdings ohne strenge, rein logische Deduktionen, schon auf der Mittelschule mit Erfolg betrieben werden könne. In dieser Grundfrage der Tagung sprach auch die abschließende Ansprache keine Klärung, wohl aber eine gewisse Annäherung und Klarstellung der verschiedenen Standpunkte.

F. HILBERT (Preiburg): Die Rolle der Axiomatik im Geometrieunterricht

Die Mathematik war bereits ein wesentlicher Bestandteil im Schulunterricht. Der beweisende Durchgang zu den Sätzen des Vektorrechnung des Euklid, wurde allerdings bald vernachlässigt, nur die Ergebnisse wurden gelehrt. Eine Reform setzte erst im 19. Jahrhundert ein. Der völlige Sinnwandel wissenschaftlicher Geometrie in den letzten Jahrzehnten führte zu radikalen Erwerbsverhältnissen. Die Erkenntnisse der Logikpsychologie schränken solche Pläne in mehrfacher Weise ein. Der Unterricht muß phasengerecht und genetisch sein. Das Erzeugen nach Grundlagen ist wichtiger als Mittelteil des letzten Systems. Jeder Entwicklungsphase ist eine eigene Geometrie zuzuschreiben. Geometrie auf der Schule ist etwas immer wieder anderes, neues im Durchgang durch Entwicklungsphasen.



H. FREUDENTHAL (Utrecht): Was ist Axiomatik und welchen formenden Wert kann sie haben?

Man unterscheidet die euklidische, die vollständige (etwa Hilbertsche) und die unvollständige, koordinierende Axiomatik, z.B. der modernen Algebra. Diese letzte Art ist heute die wichtigste. Während früher Erziehung Übertragung von gesicherten Kulturgütern war, wird sie heute, auch in der Mathematik, immer mehr als Anregung zur Neuschöpfung des Überlieferten aufgefaßt. Die dazu notwendige Mathematisierung nicht-mathematischen Rohstoffes läßt sich gerade an der Geometrie sehr gut erlernen. Im traditionellen Unterricht wird jedoch der Stoff schon mathematisiert angeboten: Der Mathematikunterricht hat die - abzulehnende - Neigung, die didaktische Ordnung der Niveaus umzukehren.

Der Schüler muß also Axiome selbst erfinden und das zu axiomatisierende Gebiet erst überschauen. Eine befriedigende Axiomatisierung der Geometrie für die Schule steht noch aus. Für die Axiomatik auf der Schule erscheint aber die Theorie der Gruppen und Körper geeigneter.

K. FLADT (Freiburg): Die Axiomatik von CHOQUET.

Das in der Literatur bekannte Axiomensystem von CHOQUET verwendet explizit die reellen Zahlen. Es enthält Inzidenz-, Anordnungs-, Maß- und Spiegelungsaxiome. Vielleicht ist es auf der Oberstufe verwendbar.

H. LENZ (München): Geometrische Axiomatik im Hochschulunterricht.

Herr Lenz setzte sich kritisch mit der Gestaltung von drei Geometrievorlesungen an Hochschulen auseinander. In der analytischen Geometrie schlug er eine abstrakte lineare Vektoralgebra vor, über die man dann in der Terminologie der affinen Geometrie sprechen kann. Umgekehrt kann man auch nach ARTIN affine Ebenen algebraisieren. Eine Einführung der Metrik durch Orthogonalitätsaxiome erscheint für die Anfängervorlesung zu schwer. In der Projektiven Geometrie ist eine Behandlung von Räumen auch unendlicher Dimension mit den Axiomen von VEBLEN-YOUNG erprobt. Für die Grundlagen der Geometrie bleibt die Wahl zwischen dem Hilbertschen und dem Bachmannschen Aufbau.

H. FREUDENTHAL (Utrecht): Zur Axiomatik der euklidischen Geometrie

Man unterscheidet die euklidische, die vollständige (etwa 1870-1875) (euklidische) und die unvollständige, koordinierende Axiomatik, z.B. der modernen Algebra. Diese letzte Art ist heute die weitestgehende. Während früher die Darstellung von geometrischen Körpern im Vordergrund stand, wird heute, auch in der Mathematik, immer mehr die Anziehung zur Neuordnung der Überlieferungen aufgeführt. Die dann notwendige mathematische nicht-axiomatische Herleitung lässt sich gerade an der Geometrie sehr gut erkennen. In traditionellen Unterricht wird jedoch der Stoff schon mathematischer angeordnet. Der Mathematikunterricht hat die - ablaufende - Neigung, die didaktische Ordnung der Niveau umzukehren.

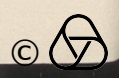
Der Schüler mag also Axiome selbst erfinden und das zu axiomatisierende Gebiet erst heraussuchen. Eine vollständige Axiomatisierung der Geometrie für die Schule steht noch aus. Für die Axiomatik soll der Schüler erscheinen aber die Theorie der Gruppen und Körper geistiger.

K. FLADT (Freiburg): Die Axiomatik der Geometrie

Das in der Literatur bekannte Axiomensystem von CHOQUET verwendet explizit die reellen Zahlen. Es enthält Inzidenz-, Anordnungs-, Maß- und Spiegelungsaxiome. Vielleicht ist es auf der Oberstufe verwendbar.

H. LENS (München): Die Axiomatik der Hochschulmathematik

Herr Lens setzte sich kritisch mit der Gestaltung von drei Geometrievorlesungen an Hochschulen auseinander. In der analytischen Geometrie schick er eine abstrakte lineare Vektoralgebra vor. Über die man dann in der Familienfolge der affinen Geometrie sprechen kann. Umgekehrt kann man auch eine affine Ebene abstrakt darstellen. Eine Einführung der Metrik durch Orthogonalität axiome erscheint für die Anfangsvorlesung zu schwer. In der Projektiven Geometrie ist eine Behandlung von Büscheln, Ebenen, geraden Dimension mit den Axiomen von VEBER-YOUNG ergiebig. Für die Grundlagen der Geometrie bietet die Wahl zwischen der Hilbertschen und der Borchmannschen Art.



E. SPERNER (Hamburg): Anregungen aus der Axiomatik für den Geometrieunterricht. Translationen und euklidisches Verhalten.

Herr SPERNER griff auf das Axiomensystem zurück, das er in Der Mathematikunterricht 5, 1959, Heft 3, S. 5 ff. veröffentlicht hat. Aus ihm leitete er einige Eigenschaften der Translationen oder Rückungen längs einer Geraden ab, die auch in der absoluten Geometrie gelten, und zeigte danach ihre weiteren typisch euklidischen Eigenschaften auf. Das Referat gab viele Anregungen für die Verwendung von Bewegungen im elementaren Geometrieunterricht.

K. STRUNZ (Würzburg): Pädagogische Leitlinien beim Aufbau eines axiomatisierten Mathematikunterrichts.

Von grundsätzlicher Bedeutung ist die Ambivalenz pädagogischer Wege und Ziele, der Übergang zu einem Unwert, die polare Synthese. Zu den einzelnen Polaritäten im Mathematikunterricht gehören Anschaulichkeit und Abstraktion, Aufstieg zur Generalisierung und Beschäftigung mit Einzelfragen, Esprit und logische Zucht. Das Leistungswissen wird durch das Bildungswissen überformt, wobei der axiomatisierte Unterricht zu dieser Überformung einen großen Beitrag liefern kann.

K. FABER (Mainz): Wie läßt sich die Axiomatik auf der Mittelstufe vorbereiten?

Es wurden zunächst die Schwierigkeiten erläutert, die im Unterricht bei der axiomatischen Methode auftreten. Der auf Tätigkeit eingestellte Quartaner verschafft sich durch Konstruieren einen gewissen Erfahrungsschatz. Der Schüler muß dann die Notwendigkeit eines Beweises einsehen. Es muß eine Ausgangsbasis geschaffen werden, zu der man durch das Arbeiten mit den Zeichengeräten kommt. Als Beweismittel wird die Spiegelung verwendet.

H. GRIESEL (Letmathe): Lokales Ordnen und Bereitstellen einer Basis im Geometrieunterricht der Mittelstufe.

Herr GRIESEL benutzt für die Weckung des Beweisbedürfnisses den Satz über die Winkelsumme im Dreieck. Das Beziehungsgefüge der Winkelsätze läßt sich überblicken und lokal ordnen. Durch Analyse der Zeichenhilfsmittel gewinnt man ein System von Sätzen, das als Basis für den weiteren Geometrieunterricht verwendet werden kann. Da nicht jedes System geeignet ist, wurden einige Forderungen für schulgemäße Ausgangssysteme aufgestellt. Der weitere Aufbau der Geometrie unter dem Aspekt des lokalen Ordners wurde

skizziert.