Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Die Axiomatik im Geometrieunterricht der Gymnasien

21. bis 25. Oktober 1962

Die Tagung "Die Axiomatik im Geometrieunterricht der Gymnasien" vom 21. bis 25. Oktober 1962 in Oberwolfach stand unter der Leitung der Professoren M. BARNER und K. FLADT (Freiburg). An der Tagung nahmen insgesamt 29 Personen aktiv teil, darunter, weil die Tagung den deutschen Belangen gewidmet war, als einziger Ausländer Professor FREUDENTHAL (Utrecht). Die Teilnehmer im einzelnen:

ARZT, Gymn.-Professor, K., Tübingen
BARNER, Prof. Dr. M., Freiburg
BOTSCH, OSt.Dir., Heidelberg
DILLER, J., Kiel
DZEWAS, Dr. J., Hamburg
FABER, OSt.Dir., Mainz
FLADT, Prof. Dr. K., Freiburg
FREUDENTHAL, Prof. Dr. H., Utrecht
GALL, OSchulrat H., Düsseldorf
GÖTZ, Gymn.-Professor W., Stuttgart
GRIESEL, Dr. H., Letmathe
HOLLAND, St.R. G., Göttingen
KIRSCH, Dr. A., Göttingen
KRAFT, OSt.Dir. A., Bad Hersfeld
KUNLE, Dr. H., Karlsruhe
LENZ, Prof. Dr. H., München
LÖFFLER, Präs.Dr.E., Stuttgart
LIERMANN, Dr. H., Berlin
RAITH, Gymn.-Professor F., Freiburg
RÖHRL, E., Stuttgart
SCHWEIZER, OSt. Dir.W., Tübingen
SEEBACH, OSt.Rat Prof. Dr. K., München
SIMONIS, OSchulrat P., Düsseldorf
SPERNER, Prof. Dr. E., Hamburg
STEINER, H. G., Münster
STRUNZ, Dr. K., Würzburg
WIGAND, St.Rat K., Krefeld
WOLFF, OSt.Dir.Dr. G., Düsseldorf
FLOHR, Dr. F., Freiburg

An jedes der insgesamt 12 Referate schloß sich eine meist lebhafte Diskussion, den Abschluß der Tagung bildete eine grundsätzliche Aussprache. Wissenschaftler und Schulmänner tauschten Anregungen und Erfahrungen aus, von denen ein Niederschlag im Geometrieunterricht zu erwarten ist, besonders da viele leitende Schulmänner, Schulbuchverfasser und Seminarleiter anwesend waren.

Die Referate behandelten etwa zur Hälfte vorwiegend didaktische und pädagogische Probleme, zur Hälfte brachten sie Anregungen für teils schulgerechte, teils streng axiomatische Begründungen des Geometrie- und Algebraunterrichts. In den Diskussionen war das Hauptproblem, wie weit in der Mittelstufe dem Schüler ein axiomatischer Aufbau bewußt gemacht werden kann. Professor FREUDENTHAL hielt jedes fixierte geometrische Axiomensystem für unfruchtbar, weil es zu kompliziert ist. Er empfahl, die axiomatische Methode auf die leichter zugänglichen algebraischen Bereiche zu beschränken, weil in den nicht kategorischen Systemen eher umfassende, in vielen Bereichen der Mathematik verwendbare Ergebnisse erzielt werden können. Einige Teilnehmer, darunter Professor FLADT und Professor SPERNER, vertraten dagegen die Ansicht, daß eine auf Axiomen aufgebaute Geometrie, allerdings ohne strenge, rein formale Deduktionen, schon auf der Mittelstufe mit Erfolg betrieben werden könne. In dieser Grundfrage der Tagung brachte auch die abschließende Aussprache keine Einigung, wohl aber eine gewisse Annäherung und Klarstellung der verschiedenen Standpunkte.

F. RAITH (Freiburg): <u>Was soll der Geometrieunterricht auf den Gymnasien</u>?

Die Mathematik war bereits ein wesentliches Bildungselement im Quadrivium. Der beweisende Durchgang zu den Sätzen, das Wesentliche des Euklid, wurde allerdings bald vernachlässigt, nur die Ergebnisse wurden gelehrt. Eine Reform setzte erst im 19. Jahrh. ein. Der völlige Sinnwandel wissenschaftlicher Geometrie in den letzten Jahrzehnten führte zu radikalen Erneuerungsansätzen. Die Erkenntnisse der Jugendpsychologie schränken solche Pläne in mehrfacher Weise ein. Der Unterricht muß phasengerecht und genetisch sein. Das Fragen nach Grundlagen ist wichtiger als Mitteilen des fertigen Systems. Jeder Entwicklungsphase ist eine eigene Geometrie zuzubilligen. Geometrie auf der Schule ist etwas immer wieder anderes, neues im Durchgang durch Entwicklungsphasen.

H. FREUDENTHAL (Utrecht): Was ist Axiomatik und welchen formenden Wert kann sie haben?

Man unterscheidet die euklidische, die vollständige (etwa Hilbertsche) und die unvollständige, koordinierende Axiomatik, z.B. der modernen Algebra. Diese letzte Art ist heute die wichtigste. Während früher Erziehung Übertragung von gesicherten Kulturgütern war, wird sie heute, auch in der Mathematik, immer mehr als Anregung zur Neuschöpfung des Überlieferten aufgefaßt. Die dazu notwendige Mathematisierung nicht-mathematischen Rohstoffes läßt sich gerade an der Geometrie sehr gut erlernen. Im traditionellen Unterricht wird jedoch der Stoff schon mathematisiert angeboten: Der Mathematikunterricht hat die - abzulehnende - Neigung, die didaktische Ordnung der Niveaus umzukehren.

Der Schüler muß also Axiome selbst erfinden und das zu axiomatisierende Gebiet erst überschauen. Eine befriedigende Axiomatisierung der Geometrie für die Schule steht noch aus. Für die Axiomatik auf der Schule erscheint aber die Theorie der Gruppen und Körper geeigneter.

K. FLADT (Freiburg): Die Axiomatik von CHOQUET.

Das in der Literatur bekannte Axiomensystem von CHOQUET verwendet explizit die reellen Zahlen. Es enthält Inzidenz-, Anordnungs-, Maß- und Spiegelungsaxiome. Vielleicht ist es auf der Oberstufe verwendbar.

H. LENZ (München): Geometrische Axiomatik im Hochschulunterricht.

Herr Lenz setzte sich kritisch mit der Gestaltung von drei Geometrievorlesungen an Hochschulen auseinander. In der analytischen Geometrie schlug er eine abstrakte lineare Vektoralgebra vor, über die man dann in der Terminologie der affinen Geometrie sprechen kann. Umgekehrt kann man auch nach ARTIN affine Ebenen algebraisieren. Eine Einführung der Metrik durch Orthogonalitätsaxiome erscheint für die Anfängervorlesung zu schwer. In der Projektiven Geometrie ist eine Behandlung von Räumen auch unendlicher Dimension mit den Axiomen von VEBLEN-YOUNG erprobt. Für die Grundlagen der Geometrie bleibt die Wahl zwischen dem Hilbertschen und dem Bachmannschen Aufbau.

E. SPERNER (Hamburg): Anregungen aus der Axiomatik für den Geometrieunterricht. Translationen und euklidisches Verhalten.

Herr SPERNER griff auf das Axiomensystem zurück, das er in Der Mathematikunterricht 5, 1959, Heft 3, S. 5 ff. veröffentlicht hat. Aus ihm leitete er einige Eigenschaften der Translationen oder Rückungen längs einer Geraden ab, die auch in der absoluten Geometrie gelten, und zeigte danach ihre weiteren typisch euklidischen Eigenschaften auf. Das Referat gab viele Anregungen für die Verwendung von Bewegungen im elementaren Geometrieunterricht.

K. STRUNZ (Würzburg): Pädagogische Leitlinien beim Aufbau eines axiomatisierten Mathematikunterrichts.

Von grundsätzlicher Bedeutung ist die Ambivalenz pädagogischer Wege und Ziele, der Übergang zu einem Unwert, die polare Synthese. Zu den einzelnen Polaritäten im Mathematikunterricht gehören Anschaulichkeit und Abstraktion, Aufstieg zur Generalisierung und Beschäftigung mit Einzelfragen, Esprit und logische Zucht. Das Leistungswissen wird durch das Bildungswissen überformt, wobei der axiomatisierte Unterricht zu dieser Überformung einen großen Beitrag liefern kann.

K. FABER (Mainz): Wie läßt sich die Axiomatik auf der Mittelstufe vorbereiten?

Es wurden zunächst die Schwierigkeiten erläutert, die im Unterricht bei der axiomatischen Methode auftreten. Der auf Tätigkeit eingestellte Quartaner verschafft sich durch Konstruieren einen gewissen Erfahrungsschatz. Der Schüler muß dann die Notwendigkeit eines Beweises einsehen. Es muß eine Ausgangsbasis geschaffen werden, zu der man durch das Arbeiten mit den Zeichengeräten kommt. Als Beweismittel wird die Spiegelung verwendet.

H. GRIESEL (Letmathe): Lokales Ordnen und Bereitstellen einer Basis im Geometrieunterricht der Mittelstufe.

Herr GRIESEL benutzt für die Weckung des Beweisbedürfnisses den Satz über die Winkelsumme im Dreieck. Das Beziehungsgefüge der Winkelsätze läßt sich überblicken und lokal ordnen. Durch Analyse der Zeichenhilfsmittel gewinnt man ein System von Sätzen, das als Basis für den weiteren Geometrieunterricht verwendet werden kann. Da nicht jedes System geeignet ist, wurden einige Forderungen für schulgemäße Ausgangssysteme aufgestellt. Der weitere Aufbau der Geometrie unter dem Aspekt des lokalen Ordnens wurde skizziert.