1962,1

Math. Forschungsinstitut
Oberwolfach
E 20/01015

Mathematisches Forschungsinstitut

Oberwolfach

Bericht (1)

Arbeitstagung des Frankfurter Seminars
3. bis 7. Januar 1963

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand eine Arbeitstagung unter Leitung von Herrn Professor Dr. R. BAER statt, an der außer seinen Frankfurter Schülern auch Herr Professor Dr. D.G. HIGMAN (Ann Arbor, USA) teilnahm, der zur Zeit als Gastprofessor in Frankfurt weilt. Insgesamt wurden zehn Vorträge über verschiedene Themen gehalten, denen augenblicklich besonderes Interesse in diesem Kreis entgegengebracht wird. Die Diskussionen, die sich an diese Vorträge anschlossen, waren sehr rege. Insbesondere verdanken die Teilnehmer Herrn Professor HIGMAN eine Reihe von wertvollen Anregungen.

Folgende Damen und Herren nahmen teil:

R. BAER, W. BENZ, B. FISCHER, P. GROSSE, H. HEINEKEN, Frau U. HEINEKEN, D. HELD, Chr. HERING, O.H.KEGEL, W. LIEBERT, H. LÜNEBURG, H. MÄURER, H. MERTES, G. MICHLER, J. RUST, H. SALZMANN, A. SCHLEIERMACHER, K. STRAMBACH, J. WALBAUM, H. WALTER, J. WEIDIG, D. WÖLK (alle Frankfurt a.M.) und D.G. HIGMANN (Ann Arbor).

Es folgen Kurzberichte über die Vorträge, die von den einzelnen Herren selbst verfaßt wurden.

W. LIEBERT: Endomorphismenringe von endlichen abelschen Gruppen.

Satz: Die folgenden Eigenschaften I - IV eines endlichen p-Ringes E mit 1 vom Exponenten p^k sind äquivalent:

I $E \cong EA$, A endliche abelsche p-Gruppe vom Range n.

II (1) $p^{k-1}E$ ist einziges minimales zweiseitiges Ideal in E

(2) Es existiert eine Zerlegung $1 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i$, ρ_i primitive Idempotente mit $o(\rho_1) \geq o(\rho_2) \geq \dots \geq o(\rho_n)$ und $p^{k-1}\rho_i \neq o$ für $1 \leq i \leq m-1$ mit der Eigenschaft

a) für mindestens ein ρ_e mit $p^{k-1}\rho_e \neq o$ ist $(\rho_e E \rho_i)_+$ zyklisch für alle i

Math. Forschungsinstitut Oberwolfach E 20/

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

B e r i c h t

Arbeitstagung des Frankfurter Seminars
3. bis 7. Januar 1965

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand eine Arbeitstagung unter Leitung von Herrn Professor Dr. R. BAER statt, an der außer seinen Frankfurter Schülern auch Herr Professor Dr. D.G. HIGMAN (Ann Arbor; USA) teilnahm, der zur Zeit als Gastprofessor in Frankfurt weilt. Insgesamt wurden zehn Vorträge über verschiedene Themen gehalten, denen augenblicklich besonderes Interesse in diesem Kreis entgegengebracht wird. Die Diskussionen, die sich an diese Vorträge anschlossen, waren sehr rege. Insbesondere verdanken die Teilnehmer Herrn Professor HIGMAN eine Reihe von wertvollen Anregungen.

Folgende Damen und Herren nahmen teil:

R. BAER, W. BENZ, B. FISCHER, F. GROSSE, H. HEINEKEN, Frau U. HEINEKEN, D. HELD, Chr. HERING, O.H.KEGEL, W. LIEBERT, H. LÜNEBURG, H. MÄURER, H. MERTENS, G. MICHLER, J. RUST, H. SALZMANN, A. SCHLEIERMACHER, K. STRAMBACH, J. WAISAUM, H. WALTER, J. WEIDIG, D. WÖRK (alle Frankfurt a.M.) und D.G. HIGMAN (Ann Arbor).

Es folgen Kurzberichte über die Vorträge, die von den einzelnen Herren selbst verfaßt wurden.

W. LIEBERT: Endomorphismenringe von endlichen abelschen Gruppen.

Satz: Die folgenden Eigenschaften I - IV eines endlichen p-Ringes E mit 1 vom Exponenten p^k sind äquivalent:

I $E \cong EA$, A endliche abelsche p-Gruppe vom Range m.

II (1) $p^{k-1}E$ ist einziges minimales zweiseitiges Ideal in E

(2) Es existiert eine Zerlegung $1 = \sum_{i=1}^{m} e_i$, e_i primitive Idempotente mit $o(e_1) \geq o(e_2) \geq \dots \geq o(e_m)$ und $p^{k-1} E_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq m-1$ mit der Eigenschaft

(3) Für mindestens ein e_j mit $p^{k-1} e_j \neq 0$ ist $(e_j E e_j)$ zyklisch für alle i

b) für alle j mit $m \leq j \leq n-1$ hat der Ring $U_j = (\sum_{i=j}^{n} \rho_i E)\sum_{i=j}^{n} \rho_i$
als einziges minimales zweiseitiges Ideal
$(o(\rho_j) - 1)\, U_j$.

III (1) $R\alpha E = o$ für alle $\alpha \in E$ mit $p^{k-1}\alpha \neq o$

(2) Es existiert ein primitives Idempotent ρ in E mit $p^{k-1}\rho \neq o$ derart, daß $o(E) = p^{\eta}$ mit $\eta = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)e_i$, wenn $(\rho E)_+$ vom Typ $(p^{e_1}, p^{e_2}, \ldots , p^{e_n})$ ist mit $e_1 \geq e_2 \geq \ldots \geq e_n$.

IV (1) $R\alpha E = o$ für alle $\alpha \in E$ mit $p^{k-1}\alpha \neq o$

(2) Es existiert eine Zerlegung $1 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i$ der 1 in primitive Idempotente ρ_i derart, daß für mindestens ein ρ_j mit $p^{k-1}\rho_j \neq o$ gilt

a) $o(\mathfrak{E}E) = o\,[A(\rho_j E)_+]$

b) im Falle $p = 2$ ist $(\rho_j E \rho_i)_+$ zyklisch für alle i.

Bezeichnungen:

EA = voller Endomorphismenring der abelschen Gruppe A

AA = Automorphismengruppe von A

$\mathfrak{E}$E = Einheitengruppe des Ringes E

RJ = Rechtsannullator von J in E, wenn $J \leq E$.

D. HIGMAN: $H^p(SL(V),V) = ?$

V = a vector space of finite dimension n over a field k.

SL(V) = the group of all determinant 1 linear transformations of V.

$H^p = H^p(SL(V),V)$.

Results:

1. $H^1 = 0$ unless $n = 2$ and $\chi(k) = 2$ or $n = 3$ and $k = F_2$.

2. If $n = 2$, $\chi(k) = 2$ and k is perfect, then $\dim_k H^1 = 1$.

3. If $n = 3$, $k = F_2$, then $\dim_k H^1 = 1$.

4. If $\chi(k) \neq 2$, then $H^p = 0$ for all $p > 0$ and finite k.

Don't know H^2 for $n = 2$ and $k = F_2$.

Have similar results for other classical groups.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

R. BAER: Rang und reduzierter Rang einer Gruppe.

Rang rG der Gruppe G = Minimalzahl der Elemente eines Erzeugendensystems von G.

Reduzierter Rang r_oG = Minimalzahl der Klassen konjugierter Elemente eines Erzeugendensystems von G.

JG = Durchschnitt aller maximalen Normalteiler von G.

SATZ: $r(G/G') = r_oG$,

wenn

(a) G der einzige $G = X\,JG$ erfüllende Normalteiler X von G ist,

und

(b) G/JG ein direktes Produkt einer abelschen Gruppe und endlich vieler einfacher Gruppen ist.

Keine der Bedingungen (a) und (b) ist entbehrlich; (a) ist eine Folge der Maximalbedingung für Normalteiler, während (b) aus der Minimalbedingung für Normalteiler folgt. Die Bedingungen (a) und (b) sind wesentlich schwächer als die angegebenen Extremalbedingungen; doch ist gewiss die Minimalbedingung für Normalteiler allein nicht ausreichend.

H. MERTES: Ringe mit Boole'schem Idealverband.

Nach R.L. BLAIR /1/ besitzt ein Ring R genau dann einen komplementären Idealverband, wenn R diskrete direkte Summe einfacher Ringe ist. Dieses Ergebnis erlaubt folgende Spezialisierung: Ein Ring R besitzt genau dann einen Boole'schen Idealverband, wenn R diskrete direkte Summe einfacher Ringe ist mit der Einschränkung, daß, falls einfache Nullringe als Summanden in der diskreten direkten Summe vorkommen, keine zwei dieser Nullringe isomorph sind.

/1/ R.L. BLAIR, Ideal lattices and the structure of rings, TAMS 75 (1953), 136-153.

H. LÜNEBURG: Eine Kennzeichnung der endlichen Desarguesschen Ebenen ungerader Ordnung.

Eine endliche projektive Ebene der ungeraden Ordnung $q > 11$ ist genau dann desarguessch, wenn sie eine Kollineationsgruppe G besitzt, die zur $PGL(2,q)$ isomorph ist, und wenn alle Involutionen aus G Perspektivitäten sind. Daß die Bedingung über q unerläßlich ist, sieht man an dem Beispiel der Hughes-Ebenen, deren Ordnung gleich q^2 ist, und die eine Kollineationsgruppe besitzen, die zur $PGL(2,q)$ isomorph ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

R. BAER: Rang und reduzierter Rang einer Gruppe.

Rang rG der Gruppe G = Minimalzahl der Elemente eines Erzeugendensystems von G.

Reduzierter Rang r_0G = Minimalzahl der Klassen konjugierter Elemente eines Erzeugendensystems von G.

JG = Durchschnitt aller maximalen Normalteiler von G.

SATZ: $r(G/G') = r_0G$,

wenn

(a) G der einzige $G = X\,JG$ erfüllende Normalteiler X von G ist,

und

(b) G/JG ein direktes Produkt einer abelschen Gruppe und endlich vieler einfacher Gruppen ist.

Keine der Bedingungen (a) und (b) ist entbehrlich; (a) ist eine Folge der Maximalbedingung für Normalteiler, während (b) aus der Minimalbedingung für Normalteiler folgt. Die Bedingungen (a) und (b) sind wesentlich schwächer als die angegebenen Extremalbedingungen; doch ist gewiss die Minimalbedingung für Normalteiler allein nicht ausreichend.

E. MERTES: Ringe mit Boole'schem Idealverband.

Nach R.L. BLAIR /1/ besitzt ein Ring R genau dann einen komplementären Idealverband, wenn R diskrete direkte Summe einfacher Ringe ist. Dieses Ergebnis erlaubt folgende Spezialisierung:

Ein Ring R besitzt genau dann einen Boole'schen Idealverband, wenn R diskrete direkte Summe einfacher Ringe ist mit der Einschränkung, daß, falls einfache Nullringe als Summanden in der diskreten direkten Summe vorkommen, keine zwei dieser Nullringe isomorph sind.

/1/ R.L. BLAIR, Ideal lattices and the structure of rings, TAMS 75 (1953), 136-153.

H. LÜNEBURG: Eine Kennzeichnung der endlichen Desarguesschen Ebenen ungerader Ordnung.

Eine endliche projektive Ebene der ungeraden Ordnung $q > 11$ ist genau dann desarguessch, wenn sie eine Kollineationsgruppe G besitzt, die zur PGL(2,q) isomorph ist, und wenn alle Involutionen aus G Perspektivitäten sind. Daß die Bedingung über q unerläßlich ist, sieht man an dem Beispiel der Hughes-Ebenen, deren Ordnung gleich q^2 ist, und die eine Kollineationsgruppe besitzen, die zur PGL(2,q) isomorph ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

D. HELD: Engelbedingungen und direkte Produkte von Gruppen teilerfremder Ordnung.

Sind π und π' komplementäre Primzahlmengen, so betrachten wir die folgende Eigenschaft einer endlichen Gruppe G:

(a) Ist x ein primäres π-Element und y ein primäres π'-Element einer endlichen Gruppe G, so kommt die 1 in den beiden Folgen $x^{(i)} o\, y$ und $y^{(i)} o\, x$ vor.

Eine Gruppe T heißt D-Gruppe, wenn jede Untergruppe von T Normalteiler von T ist.

SATZ: Besitzt die endliche Gruppe G die Eigenschaft (a), so ist G das direkte Produkt einer π-Gruppe und einer π'-Gruppe, wenn G wenigstens einer der folgenden Bedingungen genügt:

(I) G ist π-auflösbar;

(II) Die 2-Sylowuntergruppen von G sind D-Gruppen.

Zum Beweis dieses Satzes wird folgendes tiefliegende Ergebnis von W. FEIT und J. THOMPSON verwendet:

Alle endlichen Gruppen ungerader Ordnung sind auflösbar (vgl. Outlines of the One-hour and Half-hour Addresses, ICM, Stockholm 1962).

H. HEINEKEN: Gruppen mit periodischer Kommutatoroperation.

Sei $xoy = x^{(1)}oy = x^{-1}y^{-1}xy$, und sei $x^{(i+1)}oy = xo(x^{(i)}oy)$. Die Kommutatoroperation einer Gruppe G heiße periodisch, wenn eine Relation der Form $x^{(m+n)}oy = x^{(n)}oy$ für alle x,y aus G gilt; m und n seien unabhängig von x,y. Zum Beispiel erfüllen alle endlichen Gruppen eine solche Bedingung; für die symmetrische Gruppe über drei Objekten heißt sie $x^{(4)}oy = x^{(2)}oy$.

Für endliche Gruppen kann man zeigen:

1. Gilt in G die Bedingung $x^{(m+1)}oy = xoy$, so ist G abelsch.
2. Gilt in G die Bedingung $x^{(1+n)}oy = x^{(n)}oy$, so ist G nilpotent.
3. G erfülle die Bedingung $x^{(m+n)}oy = x^{(n)}oy$ und enthalte keine Elemente der Ordnung 2. Dann ist G nilpotent, wenn eine der folgenden Bedingungen zusätzlich gilt:
   a) m ist ungerade
   b) $(m,o(G)) = 1$
   c) $m = 2p$, p Primzahl, und entweder
      c1) $(o(G),p) = 1$, oder c2) $(o(G),3) = 1$ für $2p+1 = 3^t$
      $(o(G),q) = 1$ für $2p+1 = q$ ist Primzahl
      (sonst ist keine Zusatzannahme nötig).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

D. HELD: Engelbedingungen und direkte Produkte von Gruppen teilerfremder Ordnung.

Sind π und π' komplementäre Primzahlmengen, so betrachten wir die folgende Eigenschaft einer endlichen Gruppe G:

(a) Ist x ein primäres π-Element und y ein primäres π'-Element einer endlichen Gruppe G, so kommt die 1 in den beiden Folgen $x^{(i)} \circ y$ und $y^{(i)} \circ x$ vor.

Eine Gruppe T heißt D-Gruppe, wenn jede Untergruppe von T Normalteiler von T ist.

SATZ: Besitzt die endliche Gruppe G die Eigenschaft (a), so ist G das direkte Produkt einer π-Gruppe und einer π'-Gruppe, wenn G wenigstens einer der folgenden Bedingungen genügt:

(I) G ist π-auflösbar;

(II) Die 2-Sylowuntergruppen von G sind D-Gruppen.

Zum Beweis dieses Satzes wird folgendes tiefliegende Ergebnis von W. FEIT und J. THOMPSON verwendet:

Alle endlichen Gruppen ungerader Ordnung sind auflösbar (vgl. Outlines of the One-hour and Half-hour Addresses, ICM, Stockholm 1962).

H. HEINEKEN: Gruppen mit periodischer Kommutatoroperation.

Sei $x \circ y = x^{(1)} \circ y = x^{-1}y^{-1}xy$, und sei $x^{(i+1)} \circ y = x \circ (x^{(i)} \circ y)$. Die Kommutatoroperation einer Gruppe G heiße periodisch, wenn eine Relation der Form $x^{(m+n)} \circ y = x^{(n)} \circ y$ für alle x, y aus G gilt; m und n seien unabhängig von x, y. Zum Beispiel erfüllen alle endlichen Gruppen eine solche Bedingung; für die symmetrische Gruppe über drei Objekten heißt sie $x^{(4)} \circ y = x^{(2)} \circ y$.

Für endliche Gruppen kann man zeigen:

1. Gilt in G die Bedingung $x^{(m+1)} \circ y = x \circ y$, so ist G abelsch.

2. Gilt in G die Bedingung $x^{(1+n)} \circ y = x^{(n)} \circ y$, so ist G nilpotent.

3. G erfülle die Bedingung $x^{(m+n)} \circ y = x^{(n)} \circ y$ und enthalte keine Elemente der Ordnung 2. Dann ist G nilpotent, wenn eine der folgenden Bedingungen zusätzlich gilt:

a) n ist ungerade

b) $(m, o(G)) = 1$

c) $m = 2p$, p Primzahl, und entweder

(1) $(o(G), p) = 1$, oder (2) $(o(G), 3) = 1$ für $2p+1 = 3^t$

$(o(G), q) = 1$ für $2p+1 = q$ ist Primzahl

(sonst ist keine Zusatzannahme nötig).

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

d) $m = 4p$, p Primzahl, und entweder

d1) $(o(G),p) = 1$ oder

d2) $(o(G),3) = 1$ und

$(o(G),5) = 1$ für $4p+1 = 5^t$

$(o(G),q_i) = 1$ für $4p+1 = q_1$, $2p+1 = q_2$,

wenn die q_i Primzahlen sind

4) Gilt in G die Bedingung $x^{(m+n)}oy = x^{(n)}oy$ und gilt $(2^m-1,o(G)) = 1$, so ist G auflösbar und die 2-Sylowgruppe Normalteiler von G.

G. MICHLER: Radikale Ideale und Minimalbedingungen für Hauptrechtsideale.

Sei B das untere Nilradikal von Baer, L das Radikal von Levitzki, N das obere Nilradikal, J das Radikal von Jacobson, E das Radikal von Behrens und F das Radikal von Fuchs eines assoziativen Ringes P.

Satz: Für einen Ring P sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $B = L = N$

(2) Alle Ketten von sternregulären Hauptrechtsidealen der Form $(a)_R \supseteq (a^2)_R \supseteq \ldots$ brechen ab.

(3) Alle Ketten von sternregulären Hauptlinksidelaen der Form $(a)_L \supseteq (a^2)_L \supseteq \ldots$ brechen ab.

Satz: Für einen Ring P sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $B = J$

(2) P/B erfüllt die Minimalbedingung für sternreguläre Rechtsideale.

(3) P/B erfüllt die Minimalbedingung für sternreguläre Hauptrechtsideale.

Folgerung: Für einen Ring, der die Minimalbedingung für sternreguläre Hauptrechtsideale erfüllt, gilt stets:

$B = L = N = J \subseteq F$

Satz: Für einen Ring P sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $B = E$

(2) Die Minimalbedingung ist in P/B für alle Rechtsideale erfüllt, die in E/B liegen.

(3) Die Minimalbedingung ist in P/B für alle Hauptrechtsideale erfüllt, die in E/B liegen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

O.H. KEGEL: Transitive, lokal-endliche Permutationsgruppen, deren Elemente $\neq 1$ höchstens zwei Fixpunkte haben.

Erfüllt die lokal-endliche Permutationsgruppe G die folgenden Bedingungen:

a) G ist transitiv; jedes Element $\neq 1$ hat höchstens zwei Fixpunkte;

b) Die Untergruppe G_a, die ein Symbol a festläßt, ist nicht-trivial;

c) G ist keine Frobeniusgruppe;

dann ist G_a eine Frobeniusgruppe. Es gilt $\underline{N}G_a = G_a$; ein Frobeniuskomplement von G_a läßt zwei Elemente a,b fest, ist also von der Form $G_{a,b}$; es ist $(\underline{N}G_{a,b}:G_{a,b}) = 2$. - Der Zentralisator eines jeden nichttrivialen Elements aus dem Frobeniuskern F_a von G_a liegt ganz in F_a.

Fordert man weiter die Gültigkeit der Bedingung

d) in F_a gibt es eine nicht-triviale Involution, so gilt der

SATZ: G ist sogar zweifach oder dreifach transitiv; und zwar ist G isomorph einer der einfachen Gruppen von Suzuki oder LF(2,K) über einem absolut algebraischen Körper der Charakteristik 2.

W. BENZ: Über die Grundlagen der Laguerregeometrie.

Ähnlich wie in einer früheren Arbeit (Math.Ann. 134,237-247(1958)) für die Möbiusgeometrie geschehen, wird hier für den Fall der Laguerregeometrie eine Verallgemeinerung des Unterbaues (gemeint sind die Axiome I bis VI des zweiten Teiles von "van der Waerden, Smid: Math.Ann. 11o, 753-776 (1935)") des loc.cit. für die Laguerregeometrie gegebenen Axiomensystems vorgeschlagen zu dem Zweck, Laguerregeometrien über gewissen nichtkommutativen Körpern mit einbeziehen zu können. Eine Reihe von Eigenschaften von "Laguerre-Ebenen" wurde angegeben und insbesondere eine Charakterisierung des Begriffs der Laguerre-Ebene, die auf affingeometrischen, jedoch nicht auf laguerregeometrischen Begriffen beruht.

H. Lüneburg (Frankfurt a.M.)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©