Mathematisches Forschungsinstitut

Oberwolfach

Tagungsbericht (3)

Partielle Differentialgleichungen

18.-22. März 1963

Unter der Leitung von W. HAACK und G. HELLWIG (Berlin) fand in der Woche vom 18. bis 22. März 1963 eine Tagung über Partielle Differentialgleichungen im Oberwolfacher Institut statt. Das wissenschaftliche Programm bestand aus 21 Vorträgen, denen stets eine lebhafte Diskussion folgte. In kleineren Gruppen wurden die Probleme oft bis in die späten Abendstunden diskutiert.

Vom Institut in vorbildlicher Weise betreut, fühlten sich alle Teilnehmer sehr wohl, was der Tagung durch die herzliche Atmosphäre sehr zugute kam.

Teilnehmer:

Dänemark: E.Th. POULSEN - Aarhus

Frankreich: M. BRELOT - Paris
K.N. GOWRISANKARAN - Paris

Italien: G. FICHERA - Rom

Österreich: H. HORNICH - Wien

Polen: T. LEZANSKI - Warschau, z.Zt. Heidelberg

USA: R. COURANT - New York
Ch.R. de PRIMA - New York

Deutschland: J. BATT - Aachen
H. BRAKHAGE - Karlsruhe
G. BRUHN - Berlin
K. HABETHA - Berlin
W. HAACK - Berlin
G. HELLWIG - Berlin
St. HILDEBRANDT - Mainz
E. HÖLDER - Mainz
J. JAENICKE - Berlin
K. JÖRGENS - z.Zt. Aarhus
R. LEIS - Aachen
E. MEISTER - Saarbrücken
K. NICKEL - Karlsruhe
J. NITSCHE - Freiburg
G. PREIß - Karlsruhe
E. ROETMAN - Aachen
F. STUMMEL - Berlin
G. TAUTZ - Freiburg
H.-J. TÖPFER - Berlin
W. VELTE - Freiburg
W. WALTER - Karlsruhe
J. WEIDMANN - Heidelberg

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Partielle Differentialgleichungen
18.-22. März 1963

Unter der Leitung von W. HAACK und G. HELLWIG (Berlin) fand in der Woche vom 18. bis 22. März 1963 eine Tagung über Partielle Differentialgleichungen im Oberwolfacher Institut statt. Das wissenschaftliche Programm bestand aus 21 Vorträgen, denen stets eine lebhafte Diskussion folgte. In kleineren Gruppen wurden die Probleme oft bis in die späten Abendstunden diskutiert.
Vom Institut in vorbildlicher Weise betreut, fühlten sich alle Teilnehmer sehr wohl, was der Tagung durch die herzliche Atmosphäre sehr zugute kam.

Teilnehmer:

Dänemark:	E.Th. POULSEN - Aarhus
Frankreich:	M. BRELOT - Paris K.N. GOWRISANKARAN - Paris
Italien:	G. PICHERA - Rom
Österreich:	H. HORNICH - Wien
Polen:	T. LEZANSKI - Warschau, z.Zt. Heidelberg
USA:	R. COURANT - New York Ch.R. de PRIMA - New York
Deutschland:	J. BATT - Aachen H. BRAKHAGE - Karlsruhe G. BRUHN - Berlin K. HAMATRA - Berlin W. HAACK - Berlin G. HELLWIG - Berlin St. HILDEBRANDT - Mainz E. HÖLDER - Mainz J. JAENICKE - Berlin K. JÖRGENS - z.Zt. Aarhus R. LEIS - Aachen E. MEISTER - Saarbrücken K. NICKEL - Karlsruhe J. NITSCHE - Freiburg G. PREIß - Karlsruhe E. ROETMAN - Aachen F. STUMMEL - Berlin G. TAUTZ - Freiburg H.-J. TÖPFER - Berlin W. VELTE - Freiburg W. WALTER - Karlsruhe J. WEIDMANN - Heidelberg

H. WERNER - Hamburg
P. WERNER - Karlsruhe
E. WIENHOLTZ - Berlin
J. WLOKA - Heidelberg

Vortragsauszüge:

J. BATT: Ein Existenzbeweis für die BOLTZMANN-VLASOV-Gleichung bei gemittelter Dichte.

Ausgangspunkt ist das klassische Anfangswertproblem der Stellardynamik: Gegeben sei zur Zeit t = 0 die Anfangsverteilung $\phi_o = \phi_o(x,v)$. Gesucht ist die das betrachtete Sternsystem für alle $t \geq 0$ charakterisierende Verteilungsfunktion $\phi(t,x,v)$ als Lösung der BOLTZMANN-VLASOV-Gleichung:

$$\phi_t + v\,\nabla_x \phi - \nabla_x U(x,t)\,\nabla_v \phi = 0, \quad \phi(0,x,v) = \phi_o(x,v),$$

mit

$$U(x,t) = \int_{\mathcal{H}} \rho(y,t)\,\frac{dy}{|x-y|}, \quad \rho(x,t) = \int_V \phi(t,x,v)\,dv\,.$$

Eine angemessene Verallgemeinerung führt auf die Gleichung

$$(*) \qquad \phi_t + v\,\nabla_x \phi + \mathcal{L}[\phi(t)](x)\,\nabla_v \phi = 0$$

mit $\phi(0,x,v) = \phi_o(x,v)$. Hier bedeutet $\mathcal{L}$ eine auf dem Raum $L^1(\mathcal{H}\times V)$ definierte lineare Transformation. Es wird gezeigt, daß unter entsprechenden Voraussetzungen an $\mathcal{L}$ und ϕ_o die quadratische Gleichung (*) für alle $t \geq 0$ eine verallgemeinerte Lösung besitzt, unter weiteren Bedingungen sogar eine stetig differenzierbare; beide sind im wesentlichen eindeutig. Diese Eigenschaften sind für die Transformation

$$\mathcal{L}[\psi](x) = \int_{\mathcal{H}} \rho_\delta(y)\,\frac{x-y}{|x-y|^3}\,dy\,, \qquad \psi \in L^1,$$

mit

$$\rho_\delta(x) = \frac{3}{4\pi\delta^3}\int_{|u|\leq\delta} \rho(x+u)\,du, \quad \rho(x) = \int_V \psi(x,v)\,dv, \qquad \delta>0,$$

erfüllt. Also besitzt das Anfangswertproblem der Stellardynamik im wesentlichen genau eine Lösung für alle $t \geq 0$, wenn das Potential über eine mittlere Dichte berechnet wird.

M. BRELOT: Feine Grenzwerte und Winkelgrenzwerte.

Das bekannte Resultat von FATOU über die Randwerte einer harmonischen Funktion im Kreis ist von DOBB wesentlich verallgemeinert worden. In einem Greenschen Raum besitzt der Quotient v/u zweier positiver harmonischer Funktionen fast überall auf dem Martinschen Rand einen feinen Limes (fast überall im Sinne des Maßes der Mar-

tinschen Darstellung von u, feiner Limes ist der Grenzwert in der Martinschen Topologie mit Ausnahme einer Menge, die im Sinne von NAIM dünn ist). Dies gilt auch für superharmonische Funktionen. Jetzt gelang es, zusammen mit DOOB, die klassischen Resultate als Spezialfall wiederzugewinnen, obwohl ein Beispiel von CHOQUET zeigt, daß eine positive harmonische Funktion zwar einen Winkelgrenzwert im Sinne von FATOU, aber keinen feinen Limes besitzen kann. Dazu wird der Begriff der halbdünnen Mengen und entsprechend ein halbfeiner Grenzwert eingeführt. Jeder Winkelgrenzwert ist dann auch halbfeiner Grenzwert. Dies läßt sich auf breite Klassen elliptischer Differentialgleichungen verallgemeinern (vgl. Vortrag von GOWRISANKARAN).

G. BRUHN: Ein elliptisches System bei der Überschallströmung um Kegel.

Betrachtet wird die stationäre Strömung eines idealen Gases um einen Kegel, die bei konstanter Überschallanströmung eintritt. Fordert man konstanten Zustand längs jedes Strahles durch die Kegelspitze, so ergibt sich für die Strömung ein System von 5 quasilinearen Differentialgleichungen in zwei unabhängigen Variablen, zu erfüllen in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet um den Kegel. Der äußere Rand dieses Gebietes wird erst durch die Lösung selbst festgelegt. Das System läßt sich auf drei hyperbolische und zwei normalerweise elliptische Differentialgleichungen reduzieren. Demnach sind simultan drei Teilaufgaben zu lösen:

1. Bestimmung des Stoßrandes,
2. Anfangswertproblem für den hyperbolischen Teil,
3. Randwertproblem für den elliptischen Teil.

Unter Annahme der Kenntnis der Lösung von 1 und 2 wird 3 auf ein lineares System mit Cauchy-Riemannschem Hauptteil geschrieben. Mit Hilfe der Theorie von I.N. VEKUA wird die Lösbarkeit für zwei mögliche Randvorgaben diskutiert.

R. COURANT: Randwertprobleme für Minimalflächen.

Es wurden Fragen der Mehrdeutigkeit beim Problem von PLATEAU diskutiert und Beispiele von rektifizierbaren Jordankonturen gegeben, für welche mehr als abzählbar viele diskrete stabile Lösungen existieren. Dann wurden Typen von physikalisch motivierten Problemen beschrieben, in welchen ein System von Flächen kleinsten Gesamtinhalts gesucht wird, deren Ränder teils auf einem gegebenen tinschen Darstellung von u, feiner Limes ist der Grenzwert in der Martinschen Topologie mit Ausnahme einer Menge, die im Sinne von NAIM dünn ist). Dies gilt auch für superharmonische Funktionen. Jetzt gelang es, zusammen mit DOOB, die klassischen Resultate als Spezialfall wiederzugewinnen, obwohl ein Beispiel von CHOQUET zeigt, daß eine positive harmonische Funktion zwar einen Winkelgrenzwert im Sinne von FATOU, aber keinen feinen Limes besitzen kann. Dazu wird der Begriff der halbdünnen Mengen und entsprechend ein halbfeiner Grenzwert eingeführt. Jeder Winkelgrenzwert ist auch halbfeiner Grenzwert. Dies läßt sich auf breite Klassen elliptischer Differentialgleichungen verallgemeinern (vgl. Vortrag von GOWRISANKARAN).

G. BRUHN: <u>Ein elliptisches System bei der Überschallströmung um Kegel.</u>

Betrachtet wird die stationäre Strömung eines idealen Gases um einen Kegel, die bei konstanter Überschallanströmung eintritt. Fordert man konstanten Zustand längs jedes Strahles durch die Kegelspitze, so ergibt sich für die Strömung ein System von 5 quasilinearen Differentialgleichungen in zwei unabhängigen Variablen, zu erfüllen in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet um den Kegel. Der äußere Rand dieses Gebietes wird erst durch die Lösung selbst festgelegt. Das System läßt sich auf drei hyperbolische und zwei normalerweise elliptische Differentialgleichungen reduzieren. Demnach sind simultan drei Teilaufgaben zu lösen:

1. Bestimmung des Stoßrandes,
2. Anfangswertproblem für den hyperbolischen Teil,
3. Randwertproblem für den elliptischen Teil.

Unter Annahme der Kenntnis der Lösung von 1 und 2 wird 3 auf ein lineares System mit Cauchy-Riemannschem Hauptteil geschrieben. Mit Hilfe der Theorie von I.N. VEKUA wird die Lösbarkeit für zwei mögliche Randvorgaben diskutiert.

R. COURANT: <u>Randwertprobleme für Minimalflächen.</u>

Es wurden Fragen der Mehrdeutigkeit beim Problem von PLATEAU diskutiert und Beispiele von rektifizierbaren Jordankonturen gegeben, für welche mehr als abzählbar viele diskrete stabile Lösungen existieren. Dann wurden Typen von physikalisch motivierten Problemen beschrieben, in welchen ein System von Flächen kleinsten Gesamtinhalts gesucht wird, deren Ränder teils auf einem gegebenen

Komplex von Kurven liegen, teils innere Verzweigungslinien bilden, in welchen sich drei Minimalflächen des Systems unter dem Winkel $2\pi/3$ treffen. Insbesondere wurde die bekannte Konfiguration, die zum Würfel gehört, beschrieben und vereinfachte Modelle diskutiert, die zu den elementargeometrischen Steinerschen Minimumproblemen analog sind. Auch wurde die Beziehung zu isoperimetrischen Problemen erörtert.

Ch.R. de PRIMA: Differentiability and Regularity Properties of Solutions of Elliptic Equations.

Let $\mathcal{L} = (-1)^m \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} D^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D^\beta$ be an elliptic operator of order 2m on $G \subset R^n$, with $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\bar{G})$. The hypoellipticity of $\mathcal{L}$ is proved with the aid of the following lemma:
Let $L_\lambda = \sum_{|\gamma| = p} C_\gamma D^\gamma + \lambda$, $\lambda > 0$, be a constant coefficient elliptic operator of order p on R^n, with $\operatorname{Re}\{L_0(\xi)\} \geq |\xi|^p$; let M be a differential operator of order $\leq$ p with C^∞ coefficients in R^n. If $\sup\{\|M\phi\|_0 / \|\phi\|_p\} < \mu^{-1}$, where μ is a positive integer depending only on n and p and if S is any positive integer, then there exists $\lambda > 0$ so that $L_\lambda + M$ maps (1 - 1) H_{p+s} onto H_p for $|s| \leq S$. The H_k are the usual spaces of tempered distributions on R^n with

$$\|u\|_k^2 = \int (1 + |\xi|^2)^k \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi .$$

G. FICHERA: Elastostatics Problems with Ambiguous Boundary Conditions.

For an elastic body A the elastostatics problem is considered in the case that A is supported by a rigid frictionless surface S. If the possibility of the existence on a priori unknown subarea of S, where A is detached from S, is not excluded, then the corresponding boundary value problem presents "ambiguous boundary conditions" on the supporting surface S. In a point P of S two alternative boundary conditions expressed by inequalities must be satisfied, according that, in the point P, A leans on S, or A is detached from S. This boundary value problem of a new kind is investigated with the direct methods of the calculus of variations.

K.N. GOWRISANKARAN: Behaviour at the Fine Boundary of Generalized Superharmonic Functions.

Let H be a locally compact (non-compact), connected HAUSDORFF space having a countable base for open sets. On every open set is given a vector space of finite valued continuous functions (called harmonic)

satisfying the axioms 1,2,3; and D of M. BRELOT. An important particular case is given by the solutions of a partial differential equation of elliptic type. One considers the construction and study of a boundary of H, analogous to the minimal part of the classical MARTIN boundary. A DIRICHLET problem is posed for this new boundary. Under the assumption (A) that the class of resolutive functions includes a certain subset of continuous functions (for the above problem) one extends the classical results of DOOB (regarding the behaviour of the quotient of two positive superharmonic functions at the MARTIN boundary) to the axiomatic case. In particular the assumption (A) is proved to hold good when there is a "Green function" that is to say, every time the extremal potentials on H having the same support are proportional.

G. HELLWIG: <u>Über die Einstein-Kolmogoroffsche Differentialgleichung</u>.
Betrachtet wird die Gleichung: $-(a(x)u)_{xx}+(b(x)u)_x+u_t = 0$ in $0<x<\infty$, $0<t<\infty$ mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_o(x)$. Über die Koeffizienten werden die Voraussetzungen gemacht:

1. $a(x)$, $b(x)$ reellwertig, $a(x) \in C^2$, $b(x) \in C^1$ in $0<x<\infty$, $a(x) > 0$,
2. Für kleine x, $0 \leq x \leq \rho$ sei
   $a(x) = a_1x+a_2x^2 + \ldots$, $a_1 > 0$,
   $b(x) = b_o + b_1x + \ldots$,
3. Für große x, $x \geq R$ sei $a(x) = \alpha x$, $\alpha > 0$, $b(x) = \beta x + \gamma$. Ermittelt werden geeignete Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = \infty$.

St. HILDEBRANDT: <u>Alternierende Verfahren zur Lösung von Randwertaufgaben linearer partieller Differentialgleichungssysteme.</u>

Seien $\mathfrak{A}_i$, $i = 1,\ldots,N$ oder ad inf., Unterräume eines Hilbertraumes $\mathfrak{h}$ und P_i die Projektionen von $\mathfrak{h}$ auf $\mathfrak{A}_i$. Dann wird die schwache und starke Konvergenz von Folgen A_p von Operatoren der Form $A_p = P_{i_p} P_{i_{p-1}} \ldots P_{i_1}$ untersucht (vgl. die Arbeiten von SOBOLEW, MICHLIN, PFLUGER, BROWDER u.a.). Unter gewissen Voraussetzungen, die in den Anwendungen oft erfüllt sind, wird in elementarer Weise sogar die gleichmäßige Konvergenz von Operatoren der Form $A_p = (P_1P_2 \ldots P_N)^p$ bewiesen. Anschließend werden mittels der Methode der orthogonalen Projektion diese Ergebnisse auf Randwertaufgaben für Systeme linearer partieller Differentialgleichungen und auf die Konstruktion harmonischer Differentialformen angewandt.

Damit ergeben sich konstruktive Verfahren, die u.a. das alternierende Verfahren von SCHWARZ und die Balayagemethode von POINCARÉ umfassen.

E. HÖLDER: Behandlung der partiellen Differentialgleichungen eines bewegungsinvarianten Variationsproblems.

Die Differentialgleichungen eines bewegungsinvarianten Variationsproblems im euklidischen R^n (speziell n = 3) sind mit denen eines harmonischen Feldes verwandt, nur handelt es sich um vektorwertige Differentialformen 1. bzw. (n - 1)ten Grades für die relativen Komponenten der Schraubengeschwindigkeit der Trieder v_{hk} bzw. die Dyname der Schnittkräfte v^{hk}. Dementsprechend ist das absolute äußere Differential D und sein adjungiertes Differential D' zu verstehen. So ergeben sich im linearen Fall die Gleichungen $Dv_{hk} = 0$, $D'v^{hk} = 0$. Für diese Gleichungen sowie die vollständigen nichtlinearen Differentialgleichungen werden in mehrfach zusammenhängenden Bereichen Felder v_{hk} konstruiert, deren Integralvektoren, die Verschraubungen der Trieder, Perioden besitzen. Dies entspricht den Selbstspannungen im mehrfach zusammenhängenden Körper (den Volterraschen Distorsionen).

H. HORNICH: Koordinatenlose Differentialgleichungen.

Der Begriff einer Differentialgleichung läßt sich auch in einem allgemeinen metrischen Raum definieren, indem man in den Punkten eines solchen Raumes eine Richtung und die Ableitung einer Funktion in dieser Richtung erklärt. Das Hauptproblem dieser Verallgemeinerung besteht darin, die Existenztheoreme der mit Koordinaten arbeitenden Theorie auf solche Räume zu übertragen. Die Räume werden hier als kompakt, zusammenhängend und im Kleinen zusammenhängend vorausgesetzt. Auf diese wird dann die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen.

K. JÖRGENS: Über das Huygenssche Prinzip.

Sei Δ der Beltrami-Operator einer Riemann-Metrik von normaler hyperbolischer Signatur in 4 Variablen. Die Differentialgleichung $\Delta u + b^i u_i + cu = 0$ heißt "diffusionsfrei von der Ordnung m" (D m), wenn der logarithmische Anteil V(x,y) der Grundlösung im Punkte y von der Ordnung $^m/$klein ist. Die Bedingungen Dm wurden für $m \leq 4$ berechnet. Ist $R_{jk} = 0$ und gilt D 3, so können b^i und c durch Transformation der Differentialgleichung zu Null gemacht werden

Damit ergeben sich konstruktive Verfahren, die u.a. das alternierende Verfahren von SCHWARZ und die Balayagemethode von POINCARÉ umfassen.

E. HÖLDER: Behandlung der partiellen Differentialgleichungen eines bewegungsinvarianten Variationsproblems.

Die Differentialgleichungen eines bewegungsinvarianten Variationsproblems im euklidischen R^n (speziell $n = 3$) sind mit denen eines harmonischen Feldes verwandt, nur handelt es sich um vektorwertige Differentialformen 1. bzw. $(n - 1)$ten Grades für die relativen Komponenten der Schraubengeschwindigkeit der Trieder v_{hk} bzw. die Dyname der Schnittkräfte v^{hk}. Dementsprechend ist das absolute äußere Differential D und sein adjungiertes Differential D' zu verstehen. So ergeben sich im linearen Fall die Gleichungen $Dv_{hk} = 0$, $D'v^{hk} = 0$. Für diese Gleichungen sowie die vollständigen nichtlinearen Differentialgleichungen werden in mehrfach zusammenhängenden Bereichen Felder v_{hk} konstruiert, deren Integralvektoren, die Verschraubungen der Trieder, Perioden besitzen. Dies entspricht den Selbstspannungen im mehrfach zusammenhängenden Körper (den Volterraschen Distorsionen).

R. NOHEL: Koordinatenlose Differentialgleichungen.

Der Begriff einer Differentialgleichung läßt sich auch in einem allgemeinen metrischen Raum definieren, indem man in den Punkten eines solchen Raumes eine Richtung und die Ableitung einer Funktion in dieser Richtung erklärt. Das Hauptproblem dieser Verallgemeinerung besteht darin, die Existenztheoreme der mit Koordinaten arbeitenden Theorie auf solche Räume zu übertragen. Die Räume werden hier als kompakt, zusammenhängend und im Kleinen zusammenhängend vorausgesetzt. Auf diese wird dann die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen.

R. JÖRGENS: Über das Huygenssche Prinzip.

Sei Δ der Beltrami-Operator einer Riemann-Metrik von normaler hyperbolischen Signatur in 4 Variablen. Die Differentialgleichung $\Delta u + b^i u_i + cu = 0$ heißt "diffusionsfrei von der Ordnung m" (D m), wenn der logarithmische Anteil V(x,y) der Grundlösung im Punkte y von der Ordnung Λ^m klein ist. Die Bedingungen Dm wurden für $m \leqq 4$ berechnet. Ist $P_{jkm} = 0$ und gilt D 3, so können b^i und c durch Transformation der Differentialgleichung zu Null gemacht werden und es gilt auch D 4. Sind b^i und c identisch Null, so ist D 3 äquivalent der Differentialgleichung $\Delta R_{jk} = 2R^{lm}(R_{jlmk} - \frac{1}{4} g_{jk} R_{lm})$.

R. LEIS: <u>Eine Übertragung des Schwarzschen alternierenden Verfahrens auf Randwertprobleme der Helmholtzschen Schwingungsgleichung</u>.

In der Ebene sei ein glattes Kurvenstück S gegeben. Die Aufgabe, eine Potentialfunktion zu finden, die an den verschiedenen Seiten von S stetige Randwerte annimmt, läßt sich durch das alternierende Verfahren lösen. Dazu geht man von einer Funktion g_o auf einer Kurve, die die Endpunkte von S verbindet, aus, löst nacheinander eine Innenraum- und eine Außenraumaufgabe und erhält so die Funktion $g_2 = Kg_o + f$. Dabei hängt f nur von den Randwerten ab. Wegen $\|K\| < 1$ konvergiert die Neumannsche Reihe zu dieser Gleichung; die gesuchte Lösung der Randwertaufgabe ist durch $g = \lim g_{2n}$ festgelegt, wobei g_{2n} durch Iteration gebildet wird.

In der Theorie der Helmholtzschen Schwingungsgleichung gilt die Abschätzung $\|K\| < 1$ im allgemeinen jedoch nicht. Um auch hier die entsprechende Randwertaufgabe zu lösen, werden funktionalanalytische Methoden zur Diskussion von K herangezogen. Es wird für $g = Kg + f$ die Gültigkeit der Fredholmschen Alternative gezeigt, obwohl der auftretende Operator K nicht vollstetig ist.

T. LEZANSKI: <u>Nichtlineare Gleichungen vom Schrödinger-Typus</u>.

Sei jedem t aus (O,T) ein Hilbertscher Raum mit skalarem Produkt $(x,y)_t$ zugeordnet. $S_{t,t+\varepsilon}$ sei eine lineare Operation aus $H_{t+\varepsilon}$ in H_t, $S^{-1}_{t,t+\varepsilon}$ ist beschränkt vorausgesetzt und soll der Ungleichung $\left| \|S^{-1}_{t,t+\varepsilon}(x)\|_{t+\varepsilon} - \|x\|_t \right| = o(\varepsilon)$ genügen. Für abstrakte Funktionen x(t), $x(t) \in H_t$, definieren wir eine "Ableitung": $\frac{D}{dt} x(t) = \lim_{\varepsilon \to o} \frac{1}{\varepsilon} (S_{t,t+\varepsilon} x(t+\varepsilon) - x(t))$, und behandeln die Gleichungen vom Typus $\frac{D}{dt} x(t) = U(t,x(t))$, wobei U(t,x) eine nichtlineare Operation, $U \in (H_t \longrightarrow H_t)$, bedeutet. Die Anwendung auf die Gleichungen der Art $(d^2/dt^2)f(t) + Af(t) = U(A^{1/2}f,f)$ wird angegeben, wobei $Af \in (H \longrightarrow H)$ eine selbstadjungierte, positiv definite Operation in einem Hilbertraum H ist.

E. MEISTER: Ein Randwertproblem aus der Theorie instationärer Unterschallströmungen durch Gitter schwingender Profile.

Das Störpotential für eine instationäre Unterschallströmung durch ein gestaffeltes Streckengitter endlicher Teilung mit halbunendlich tiefen, unabhängig voneinander schwingenden Profilen wird auf eine Funktion reduziert, die Lösung des zweiten Randwertproblems der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mit $k > 0$ ist. u genüge außerdem der Periodizitätsbedingung: $u(x+T\sin\lambda\ ,\ y+T\cos\lambda\ ) = e^{i\sigma} u(x,y)$ (T = Abstand der Profilkanten, λ = Staffelungswinkel). Nach Abspalten endlich vieler, für $x \longrightarrow -\infty$ nicht abklingender Glieder der Fourierentwicklung von u vor dem Gitter wird das Neumann-Problem für das Restpotential mittels der Laplace-Transformation in eine Funktionalgleichung vom Wiener-Hopf-Typ transformiert, die mit dem bekannten Verfahren gelöst wird. Die Fourierkoeffizienten der abgespaltenen Glieder werden bis auf einen durch eine asymptotische Bedingung im Unendlichen festgelegt. Durch Rücktransformation erhält man eine einparametrige Lösungsschar für u in Gestalt von Faltungsintegralen. Der noch freie Parameter kann dadurch festgelegt werden, daß gefordert wird, daß zwischen den Profilen alle Störungen ins Unendliche auslaufen.

F. STUMMEL: Über ein allgemeines iteratives Verfahren zur Lösung des Dirichletproblems für lineare elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

In neuerer Zeit haben MORGENSTERN und BABUSKA das alternierende Verfahren von H.A. SCHWARZ, BROWDER das Balayage-Verfahren von POINCARÉ in die Hilbertraumformulierung der Dirichletaufgabe übertragen. In diese Gestalt gestatten diese Methoden die iterative Lösung des Dirichletproblems für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Man zeigt das, indem man die Lösung der Randwertaufgabe in einem geeignet gewählten Hilbertraum durch einen Projektionsoperator und das iterative Verfahren durch eine Folge von Operatoren beschreibt. Unter geeigneten Voraussetzungen ist diese Folge schwach konvergent gegen die gesuchte Lösung. Eine Reihe von iterativen Methoden zur näherungsweisen Lösung der Dirichletaufgabe, wie sie in der numerischen Analysis gebräuchlich sind, lassen sich als Spezialfall dieses allgemeinen iterativen Verfahrens auffassen.

W. WALTER: Eindeutigkeitsprobleme bei nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen.

Für parabolische Differentialgleichungen der Form $u_t = f(t,x,u,u_x,u_{xx})$ wird ein allgemeiner Abschätzungssatz hergeleitet mit folgender Gestalt: $|v - u| < \rho$, wobei u und v Lösungen der DGl. sind, $\rho(t,x)$ eine Lösung einer anderen DGl. $\rho_t = \omega(t,x,\rho,\rho_x,\rho_{xx})$, hierbei ist f mit ω durch einseitige Abschätzungen der Form $f(..,v+\rho,..) - f(..,v,..) \leq \omega(..,\rho,..)$ verknüpft. Es werden dann vier Anwendungen gegeben:

1. Aufgaben mit unendlichen Gebieten: Eindeutigkeit für $u_t = g(t,x,u,u_x) + \sum k_{ij}u_{ij}$ bei einer Wachstumsbedingung $|u| \leq k\exp(kx^2)$.
2. Aufgaben mit unstetigen Anfangswerten: Zugelassen wird eine Ausnahmemenge vom Maß 0, auf welcher keine Randwerte vorgegeben sind. Es wird Eindeutigkeit für Gleichungen der Form $u_t = g(t,x,u) + \Delta u$ bewiesen.
3. Aufgaben ohne Anfangswerte: Eindeutigkeit für Gleichungen der unter 2. behandelten Form bei Gebieten, die sich in t-Richtung nach $-\infty$ erstrecken.
4. Stabilitätsaussagen: Aussagen für $\lim u(t,x)$ bei $t \longrightarrow \infty$, Bedingungen für $u \longrightarrow 0$, falls die Randwerte für $t > 0$ Null sind.

H. WERNER: Zur Existenz von Flächen konstanter mittlerer Krümmung.

Es wird gezeigt, daß man zu einer beliebigen in einer Kugel vom Radius R gelegenen Jordankurve eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung H finden kann, die von dieser Kurve berandet wird, sofern $|RH| < 1/2$ ist. Dieser Satz wurde unter stärkeren Voraussetzungen zuerst von E. HEINZ bewiesen. Der erste Teil des Beweises gleicht seiner Struktur nach dem Beweis von HEINZ und stützt sich auf a-priori-Abschätzungen für ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen. Es gelingt, den Gültigkeitsbereich der Abschätzungen auf das angegebene Intervall auszudehnen. Damit erhält man den Satz für rektifizierbare Jordankurven. Die Befreiung von der Rektifizierbarkeit geschieht mit Hilfe eines Approximationsprozesses durch Benutzung der Eigenschaften des Poissonschen Integrals und der monotonen Funktionen.

P. WERNER: Außenraumprobleme in der Theorie akustischer und elektromagnetischer Wellenfelder.

Es wird ein uer Existenzbeweis für die bekannten Außenraumprobleme der Helmholtzschen Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und der Maxwellschen Gleichungen in der zeitunabhängigen Form $\nabla \times E - i \omega \mu H = 0$, $\nabla \times H + i \omega \varepsilon E = 0$ gegeben. Im Gegensatz zu den bisher bekannten Existenzbeweisen (KUPRADSE, WEYL, MÜLLER, LEIS im Fall der Schwingungsgleichung; MÜLLER, WEYL, SAUNDERS, CALDERÒN im Fall der Maxwellschen Gleichungen) wird kein Gebrauch von dem zweiten Fall der Fredholmschen Alternative gemacht. Hierdurch wird es möglich, in einfacher Weise eine Reihe von Abhängigkeitsaussagen für die Lösungen zu gewinnen. Zum Beispiel kann gezeigt werden, daß die Lösungen u der Außenraumprobleme der Schwingungsgleichung bei festen Daten in der abgeschlossenen Halbebene $\mathrm{Im}\, k \geqq 0$ analytisch von k abhängen. Insbesondere lassen sich die Grenzübergänge $\mathrm{Im}\, k \longrightarrow 0$ (Prinzip der Grenzabsorption) und $k \longrightarrow 0$ (Übergang zur Potentialtheorie) diskutieren. Entsprechende Aussagen ergeben sich für die Außenraumprobleme der Maxwellschen Gleichungen. Alle Existenz- und Abhängigkeitsuntersuchungen lassen sich auf den Fall variabler Koeffizienten k, ε, μ übertragen.

E. WIENHOLTZ: Zur Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems für die Wellengleichung im R_N.

Es wird die bekannte Huygens'sche Konstruktion der Lösung im Falle von drei Raumdimensionen mittels Superposition scharfer Kugelwellen wiederaufgegriffen und in eine bequeme Fassung gebracht. Es wird das Friedrich'sche Analogon zu scharfen Kugelwellen für ungerade Raumdimension einfach hergeleitet und damit die Huygenssche Konstruktion auf den Fall ungerader Raumdimension ausgedehnt.

J. WLOKA: Über korrekte Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen für vektorwertige Distributionen.

Sei $K(R_n, H)$ die lineare Hülle der Ableitungen im Distributionssinne von Funktionen aus $L^2(R_n, H)$, wobei H ein Hilbertraum ist. In K werden inhomogene, l neare Differentialg ichungssysteme $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - P(i \frac{\partial}{\partial x}, t) u(x,t) = f(x,t)$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ betrachtet und Klassen von u_0 und f angegeben, für welche das Anfangswertproblem korrekt gestellt ist.

K. Habetha (Berlin)

P. WERNER: Außenraumprobleme in der Theorie akustischer und elektromagnetischer Wellenfelder.

Es wird ein neuer Existenzbeweis für die bekannten Außenraumprobleme der Helmholtzschen Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und der Maxwellschen Gleichungen in der zeitunabhängigen Form $\nabla \times E - i\omega\mu H = 0$, $\nabla \times H + i\omega\varepsilon E = 0$ gegeben. Im Gegensatz zu den bisher bekannten Existenzbeweisen (KUPRADSE, WEYL, MÜLLER, LEIS im Fall der Schwingungsgleichung; MÜLLER, WEYL, SAUNDERS, CALDERON im Fall der Maxwellschen Gleichungen) wird kein Gebrauch von dem zweiten Fall der Fredholmschen Alternative gemacht. Hierdurch wird es möglich, in einfacher Weise eine Reihe von Abhängigkeitsaussagen für die Lösungen zu gewinnen. Zum Beispiel kann gezeigt werden, daß die Lösungen u der Außenraumprobleme der Schwingungsgleichung bei festen Daten in der abgeschlossenen Halbebene Im $k \geq 0$ analytisch von k abhängen. Insbesondere lassen sich die Grenzübergänge Im $k \to 0$ (Prinzip der Grenzabsorption) und $k \to 0$ (Übergang zur Potentialtheorie) diskutieren. Entsprechende Aussagen ergeben sich für die Außenraumprobleme der Maxwellschen Gleichungen. Alle Existenz- und Abhängigkeitsuntersuchungen lassen sich auf den Fall variabler Koeffizienten k, ε, μ übertragen.

E. WIENHOLTZ: Zur Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems für die Wellengleichung im R_n.

Es wird die bekannte Huygens'sche Konstruktion der Lösung im Falle von drei Raumdimensionen mittels Superposition scharfer Kugelwellen wiederaufgegriffen und in eine bequeme Fassung gebracht. Es wird das Friedrich'sche Analogon zu scharfen Kugelwellen für ungerade Raumdimension einfach hergeleitet und damit die Huygens'sche Konstruktion auf den Fall ungerader Raumdimension ausgedehnt.

J. WLOKA: Über korrekte Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen für vektorwertige Distributionen.

Sei $K(R_m, H)$ die lineare Hülle der Ableitungen im Distributionssinne von Funktionen aus $L^2(R_m, H)$, wobei H ein Hilbertraum ist. In K werden inhomogene, lineare Differentialgleichungssysteme $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - P(i \frac{\partial}{\partial x}, t) u(x,t) = f(x,t)$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ betrachtet und Klassen von u_0 und f angegeben, für welche das Anfangswertproblem korrekt gestellt ist.

K. Habetha (Berlin)