Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht (4)

Funktionentheorie einer Veränderlichen
24. bis 29. März 1963

Unter der Leitung der Herren Professoren H. GRUNSKY (WÜRZBURG) und H. WITTICH (Karlsruhe) fand in Oberwolfach Ende März 1963 eine Tagung über Funktionentheorie einer Veränderlichen statt. Es war seit längerer Zeit die erste solche Tagung. Nur 1951 und 1955 haben in Oberwolfach ähnliche Tagungen stattgefunden (1955 über angewandte Funktionentheorie). Die Teilnehmer begrüßen dankbar die Gelegenheit, im Oberwolfacher Institut mit so vielen Kollegen ihres engeren Fachgebietes intensiven wissenschaftlichen Gedankenaustausch pflegen zu können. Besonders herzlich begrüßt wurden die Gäste, die aus Übersee gekommen waren. Leider mußten einige der eingeladenen Mathematiker wegen Visumsschwierigkeiten absagen.

Liste der Teilnehmer:

L. AHLFORS, Cambridge / Mass.
F. BAGEMIHL, Detroit
I.N. BAKER, London
M.L. CARTWRIGHT, Cambridge / G.B.
U. CLAUß, Würzburg
E.F. COLLINGWOOD, Alnwick
A. DINGHAS, Berlin
P. ERDÖS, Budapest
D. GAIER, Gießen
F.W. GEHRING, Ann Arbor
H. GRUNSKY, Würzburg
K. HABETHA, Berlin
G. af HÄLLSTRÖM, Abo
H. HOLMANN, Münster
H. HORNICH, Wien
A. HUBER, Zürich
F. HUCKEMANN, Gießen
W. JANOWSKI, Łodz
Th. KÖVARI, London
H. KUHN, Karlsruhe
O. LEHTO, Helsinki
W. MEYER-KÖNIG, Stuttgart
E. MUES, Karlsruhe
A. PFLUGER, Zürich
G. PIRANIAN, Ann Arbor
R. de POSSEL, Paris
H.L. ROYDEN, Stanford
S. SCHOTTLÄNDER, Hannover
H. TIETZ, Hannover
C. ULUÇAY, Ankara
H. WITTICH, Karlsruhe

Es folgen die Vortragsauszüge in der Reihenfolge, wie die Vorträge gehalten wurden:

E.F. COLLINGWOOD: Cluster set theorems for functions of a complex variable.

Der Begriff der Häufungsmenge (cluster set) läßt sich anwenden auf jede Funktion, die einen vollständigen metrischen Raum in einen anderen abbildet. In der Funktionentheorie interessiert man sich für Häufungsmengen in Randpunkten des Definitionsgebietes. Folgende 3 Gruppen von Sätzen für beliebige Funktionen lassen sich in der Funktionentheorie anwenden: 1. Sätzeüber Schnitte, 2. Sätze über Symmetrieeigenschaften, 3. Sätze über Maximaleigenschaften. In einem auch historischen Überblick wurde über die 2. und 3. Gruppe gesprochen. Aus den Sätzen der Gruppe 3 folgt z.B.: f(z) sei im Einheitskreis meromorph und habe radiale Grenzwerte auf einer Menge der Kategorie II; dann bilden diese Grenzwerte eine Menge von positivem linearen Maß.

F. BAGEMIHL: An approximation theorem for normal meromorphic functions.

Es sei f(z) eine nichtkonstante, normale, meromorphe Funktion im Einheitskreis, und es sei die Menge der Zielwerte vom harmonischen Maß 0, dann existiert eine residuale Teilmenge S (das Komplement D - S ist von 1. Kategorie) des Einheitskreisrandes D vom Maß 2π mit folgender Eigenschaft: Falls $\zeta \in S$ und falls Λ eine stetige Kurve im Einheitskreis ist, die in ζ endet, deren Tangente in ζ nicht mit der des Kreisrandes zusammenfällt, dann kommt f(z) auf dieser Kurve Λ jedem Wert beliebig nahe.
Wenn man nur annimmt, daß die Menge der Zielwerte von linearem Maß 0 ist, dann existiert auch eine Residualmenge S mit den oben erwähnten Eigenschaften, es entfällt aber die Behauptung, daß S vom Maß 2π ist.

G. PIRANIAN: Tsujische Funktionen mit Juliaschen Strecken.

Eine meromorphe Funktion in $|z| < 1$ heißt Tsujische Funktion, wenn die sphärische Länge des Bildes des Kreises $|z| = r$ eine beschränkte Funktion von r ist. Eine Strecke in $|z| < 1$ mit einem Endpunkt auf $|z| = 1$ heißt Juliasche Strecke für f, wenn f in jedem die Strecke enthaltenden Dreieck alle Werte mit höchstens 2 Ausnahmen unendlich oft annimmt.
Bei einer Tsujischen Funktion existiert der Streckenlimes für fast alle Punkte $e^{i\vartheta}$ entlang fast allen dort mündenden Strecken, und sein Wert ist in fast allen Punkten von der Wahl der Strecke unabhängig. W. Seidel hat die Frage erörtert, inwiefern trotzdem

Juliasche Strecken vorkommen können. An einem Beispiel wurde gezeigt, daß gleichzeitig an fast allen Punkten $e^{i\vartheta}$ alle Strecken Juliasche Strecken sein können.

I.N. BAKER: Iterationen von analytischen Funktionen.

Die Iterierten $f_n(z)$, $n = 1,2,\ldots$ der ganzen oder rationalen Funktionen $f(z) = f_1(z)$ werden folgendermaßen definiert: $f_{n+1}(z) = f(f_n(z))$. In der Theorie von Fatou und Julia betrachtet man die Menge $\mathfrak{F}(f) = [z \mid \{f_n(z)\}$ nicht normal in jeder Umgebung von $z]$. $\mathfrak{F}(f)$ ist perfekt, ist nicht leer, besteht aus Häufungspunkten der Fixpunkte (ζ ist Fixpunkt n-ter Ordnung, falls gilt $f_n(\zeta) = \zeta$ aber $f_j(\zeta) \neq \zeta$ für $j<n$) und befriedigt $f(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}$ und $f_{-1}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ teilt die z-Ebene in Gebiete $\mathcal{G}_i$ ein, in denen $\{f_n(z)\}$ normal ist. Es wurden skizziert:

1. Die Konstruktion einer transzendenten Funktion $f(z)$, die mindestens ein mehrfach zusammenhängendes Normalgebiet hat, (wird in der Math. Zeitschrift erscheinen).
2. Der Satz: Falls $f(z)$ ganz und nichtlinear, existieren - bis auf höchstens ein n - Fixpunkte n-ter Ordnung.

H. HORNICH: Funktionalgleichungen bei analytischen Funktionen.

Sei $f(z)$ ganz und nichtlinear. Bestimmt man zu jedem z alle Werte ζ mit $f(z) = f(\zeta)$, so seien die Werte der i.a. unendlich vieldeutigen Funktionen $\zeta(z)$ gleich $\varphi_0(z) = z, \varphi_1(z), \ldots$. Diese sind entweder getrennte Funktionen oder gehen durch analytische Fortsetzung auseinander hervor. Ein Beispiel, bei dem beide Fälle vorkommen, ist $f(z) = e^{e^z}$. Für jedes $\varphi(z)$ ist $f(\varphi(z)) = f(z)$ eine Funktionalgleichung für $f(z)$. Weiter wurde $R(z) = \operatorname{Min}_{k>1} |\varphi_k(z) - z|$ betrachtet.

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\varphi_k(z)} \right|^{\lambda}$ für ein $\lambda > 0$, so ist $f(z)$ höchstens vom Minimaltypus der Ordnung λ.

S. SCHOTTLÄNDER: Sternartige Zerlegung eindeutiger Funktionen.

Die Verallgemeinerung der Aussage, daß eine Funktion Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion ist, lautet: Jede Funktion $f(z)$, deren Definitionsbereich invariant ist gegenüber Drehungen um den Winkel $\frac{2\pi}{k}$ (um den Ursprung), läßt sich darstellen in der Form

$$(*) \qquad f(z) = \sum_{\varsigma=0}^{k-1} z^{\varsigma} \varphi_{\varsigma}(z^k), \qquad k \text{ natürliche Zahl.}$$

Die Zerlegungsfunktionen $\varphi_\varsigma(w)$ sind eindeutig bestimmt durch

$\varphi_\varsigma(w) = \frac{1}{k} \sum_{\sigma=0}^{k-1} (\xi^\sigma z)^{-\varsigma} f(\xi^\sigma z)$ $(\varsigma = 0,1,\ldots,k-1)$, wobei $\xi = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)$ und z eine beliebige k-te Wurzel aus $w \neq 0$ ist.

Anwendung: Es läßt sich eine Beziehung zwischen Orthogonalpolynomen mit "k-strahligem" Stern und klassischen Orthogonalpolynomen herstellen, und entsprechende Funktionsdarstellungen lassen sich ineinander überführen.

O. LEHTO: Bemerkungen über die Charakterisierung analytischer und quasikonformer Funktionen.

Nach Definition besitzt eine Funktion verallgemeinerte L^p-Ableitungen, $p \geq 1$, im Gebiet G, falls f in G absolut stetig auf Geraden ist und die Ableitungen f_x, f_y (oder f_z, $f_{\bar{z}}$) lokal zu L^p gehören. Gilt außerdem die Cauchy-Riemannsche Gleichung $f_{\bar{z}} = 0$ fast überall in G, heißt f eine L^p-Lösung dieser Gleichung. Man beweist leicht, daß eine L^1-Lösung von $f_{\bar{z}} = 0$ analytisch ist.

Mit Hilfe dieses Resultats kann ein analoger Satz für quasikonforme Funktionen bewiesen werden. Eine Funktion heißt K-quasikonform, wenn sie eine Darstellung $F \circ H$ gestattet, wo H ein K-quasikonformer Homöomorphismus und F eine analytische Funktion ist. Für hinreichend großes q ist dann eine L^q-Lösung der Beltramischen Gleichung $f_{\bar{z}} = \kappa(z) f_z$, wo κ meßbar und $|\kappa| \leq \frac{K-1}{K+1}$, eine K-quasikonforme Funktion. Definiert man p(K) als die obere Grenze derjenigen Zahlen p, für die alle K-quasikonformen Abbildungen L^p-Ableitungen haben und q(K) durch $\frac{1}{p(K)} + \frac{1}{q(K)} = 1$, so gilt dieses Resultat für $q > q(K)$.

Der genaue Wert von q(K) ist nicht bekannt; man weiß nur, daß q(K) für $1 \leq K < \infty$ von 1 bis 2 wächst. Die Vermutung wurde erwähnt, daß $q(K) = \frac{2K}{K+1}$.

Die Gedanken des Vortrages werden in ein Buch über quasikonforme Abbildungen, das im Springer-Verlag erscheinen soll, mit aufgenommen.

L. AHLFORS: Quasikonforme Spiegelungen.

L sei eine geschlossene Jordankurve durch ∞. Die Ebene werde durch sie in die beiden Teile Ω und Ω^* zerlegt. Wir nehmen an, es existiere eine quasikonforme Spiegelung λ, λ von Ω auf Ω^*. Es sei U die obere (bzw. U* die untere) Halbebene, dann existiert eine konforme Abbildung f (bzw. f*), die U auf Ω (bzw. U* auf Ω^*) abbildet. Es ist nun $f^{*-1}\lambda f$ eine quasikonforme Abbildung von U auf U*, die eine monotone Abbildung $h = f^{*-1} f$ der reellen Achse

auf sich induziert. Es ergaben sich folgende Aussagen:

1. Notwendig und hinreichend, daß L eine quasikonforme Spiegelung zuläßt, ist, daß $h(x)$ zu einer quasikonformen Abbildung von U auf U* fortgesetzt werden kann. Das ist wiederum dann und nur dann der Fall, wenn für alle reellen x und t und ein $\varrho \neq 0, \infty$ gilt:

$$\varrho^{-1} < \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} < \varrho \quad .$$

2. L gestattet eine quasikonforme Spiegelung dann und nur dann, wenn eine Konstante C existiert, so daß $\overline{P_1P_2} \leq C\overline{P_1P_3}$ für alle Punkte P_1, P_2, P_3, die in dieser Reihenfolge auf L liegen.

F.W. GEHRING: <u>The Carathéodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space.</u>

Es wurde in diesem Vortrag über ein Analogon zum Konvergenz-Theorem von Carathéodory (Math.Ann. <u>72</u>, 1912, S.1o7 ff) berichtet und zwar für quasikonforme Abbildungen im Raum. Der Beweis stützt sich auf folgende Verzerrungseigenschaft:

Es existiert eine in $0 \leq t < 1$ stetige, monoton wachsende Funktion $\theta(t) = \theta_K(t)$ mit $\theta(o) = 0$ und folgender Eigenschaft:

Es sei $y(x)$ eine K-quasikonforme Abbildung von D auf D', falls nun $P \in D$, dann gilt $\dfrac{|y(Q)-y(P)|}{\varrho(y(P),\partial D')} \leq \theta\left(\dfrac{|Q-P|}{\varrho(P,\partial D)}\right)$ für alle Q mit $|Q-P| < \varrho(P,\partial D)$.

Es ist $\varrho(P,\partial D)$ der Abstand von P zum Rand von D.

Es häng $\theta(t)$ nur von K und t, nicht aber von y oder D ab. - Diese Verzerrungseigenschaft kann man auch benutzen, um quasikonforme Abbildungen im Raum und in der Ebene zu charakterisieren.

G. af HÄLLSTRÖM: <u>Wertverteilungssätze in bezug auf gewisse innere Abbildungen ebener Gebiete.</u>

Es sei $w(z)$ eine innere Transformation des Gebietes D, das für wachsendes λ durch Näherungsgebiete Δ_λ mit Jordanrändern G_λ ausgeschöpft wird. Ist $n(\lambda,a)$ die Anzahl der a-Stellen in Δ_λ und

$$\mu(\lambda,a) = \frac{1}{2\pi} \int_{G_\lambda} \frac{|w_a|^2 \; d \arg w}{1 + |w_a|^2} \quad \text{mit } w_a = \frac{1+\bar{a}w}{w-a} \qquad w_\infty = w \;,$$

so beweist man

$$\mu(\lambda,a) + n(\lambda,a) = A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{W(a)} n(\lambda,a)\,dW(a) \;,$$

wo $W(a)$ die a-Kugel ist. - Wird auf G_λ eine Dichte dh erklärt, so daß $s(z) = \lambda + ih$ ($h \bmod 2\pi$) eine stetige Funktion wird, dann kann man in gewöhnlicher Weise $N(\lambda,a)$ und $T(\lambda)$ definieren, ebenso

$$m(\lambda,a) = -\frac{1}{2\pi} \int_{G_\lambda} \log[w(z),a]\;dh.$$

Treffen noch in kompakten Teilgebieten geeignete Hölderbedingungen zu, ist $m(\lambda, a)$ endlich und es gilt ein "erster Hauptsatz" $m(\lambda,a) + N(\lambda,a) = T(\lambda) + E(\lambda,a)$. Dabei können über das Restglied $E(\lambda,a)$ gewisse Aussagen gemacht werden.
(Acta A.Aboens.XXI,9,1958; Mich.M.J. 9,S.241-248,1962).

M.L. CARTWRIGHT: The zeros of a certain integral function.

Anselone hatte nach den Nullstellen der folgenden Funktion $F(z)$ gefragt:
$$F(z) = e^{z} - 1 - \int_{-1}^{+1} e^{zt} f(t)\, dt = e^{z} - 1 - F_1(z).$$
Dabei ist $f(t)$ noch nicht festgelegt. Man kann leicht zeigen, daß $F_1(re^{i\vartheta}) = o(e^{r|\cos\vartheta|})$ für $r \longrightarrow \infty$; daraus folgt, daß in der Nähe der Nullstellen von $e^{z}-1$ auch Nullstellen von $F(z)$ liegen. Es wurde die Frage nach den weiteren Nullstellen von $F(z)$ behandelt. Dabei wurden Ergebnisse von Titchmarsh benutzt, und es ergab sich u.a. $n(r,0) \sim \frac{2r}{\pi}$, d.h., daß $F(z)$ ungefähr $\frac{r}{\pi}$ Nullstellen zusätzlich zu den oben erwähnten hat.

U. CLAUß: Über eine spezielle Klasse im Einheitskreis meromorpher Funktionen.

Es gibt in $|z| < 1$ eine aus abzählbar vielen positiven Punktmassen bestehende Belegung der Gesamtmasse 1, die für $|z| \geq 1$ das Potential $\log \frac{1}{|z|}$ erzeugt. Es sei $p(z)$ das Potential, das von dieser Belegung und von der Masse -1 im Nullpunkt erzeugt wird; es gilt dann $p(z) \equiv 0$ für $|z| \geq 1$.
Durch $f(z) = -\frac{\partial p}{\partial x} + i\,\frac{\partial p}{\partial y}$ ist eine in $|z| < 1$ meromorphe Funktion definiert. Die Anzahlfunktion der Pole $N(r,\infty)$ von $f(z)$ ist nicht beschränkt. Man kann zeigen, daß Verteilungen existieren, so daß $N(r,\infty) = c \log \frac{1}{1-r}$ (für $c > 2$). Für behandelte spezielle Verteilungen gilt: $m(r,\infty) \longrightarrow 0$, also ist $N(r,\infty) = T(r)$; $m(r,a)$ ist beschränkt für $a \neq 0$; nur Null ist in gewisser Weise ein Ausnahmewert, Null ist einziger Zielwert; und mindestens in speziellen Fällen gilt $m(r,0) = \log \frac{1}{\delta(r)}$, wobei $\delta(r)$ die in $r < |z| < 1$ befindliche Masse sei. Es gilt $\delta(r) \longrightarrow 0$; i.a. verschwindet aber doch der Defekt von Null.

R. de POSSEL: Caracterisation du polygone fondamental d'une variété conforme non prolongeable.

Satz: Eine Riemannsche Fläche ist dann und nur dann nicht fortsetzbar, wenn folgende 2 Bedingungen erfüllt sind:
1. Eine einfach geschlossene Kurve trennt nie ein schlichtartiges

Treffen noch in kompakten Teilgebieten geeignete Hölderbedingungen zu, ist $m(\lambda,a)$ endlich und es gilt ein "erster Hauptsatz" $m(\lambda,a) + N(\lambda,a) = T(\lambda) + E(\lambda,a)$. Dabei können über das Restglied $E(\lambda,a)$ gewisse Aussagen gemacht werden.
(Acta A.Aboens.XXI,9,1958; Mich.M.J. 9,S.241-248,1962).

M.L. CARTWRIGHT: <u>The zeros of a certain integral function</u>.

Anselone hatte nach den Nullstellen der folgenden Funktion $F(z)$ gefragt:

$$F(z) = e^z - 1 - \int_{-1}^{+1} e^{zt} f(t)\, dt = e^z - 1 - F_1(z).$$

Dabei ist $f(t)$ noch nicht festgelegt. Man kann leicht zeigen, daß $F_1(re^{i\varphi}) = o(e^{r|\cos\varphi|})$ für $r \to \infty$; daraus folgt, daß in der Nähe der Nullstellen von e^z-1 auch Nullstellen von $F(z)$ liegen. Es wurde die Frage nach den weiteren Nullstellen von $F(z)$ behandelt. Dabei wurden Ergebnisse von Titchmarsh benutzt, und es ergab sich u.a. $n(r,0) \sim \frac{2r}{\pi}$, d.h., daß $F(z)$ ungefähr $\frac{r}{\pi}$ Nullstellen zusätzlich zu den oben erwähnten hat.

U. CLAUS: <u>Über eine spezielle Klasse im Einheitskreis meromorpher Funktionen</u>.

Es gibt in $|z| < 1$ eine aus abzählbar vielen positiven Punktmassen bestehende Belegung der Gesamtmasse 1, die für $|z| \geq 1$ das Potential $\log \frac{1}{|z|}$ erzeugt. Es sei $p(z)$ das Potential, das von dieser Belegung und von der Masse - 1 im Nullpunkt erzeugt wird; es gilt denn $p(z) \equiv 0$ für $|z| \geq 1$.
Durch $f(z) = -\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial y}$ ist eine in $|z| < 1$ meromorphe Funktion definiert. Die Anzahlfunktion der Pole $N(r,\infty)$ von $f(z)$ ist nicht beschränkt. Man kann zeigen, daß Verteilungen existieren, so daß $N(r,\infty) = c \log \frac{1}{1-r}$ (für $c > 2$). Für behandelte spezielle Verteilungen gilt: $m(r,\infty) \to 0$, also ist $N(r,\infty) = T(r)$; $m(r,a)$ ist beschränkt für $a \neq 0$; nur Null ist in gewisser Weise ein Ausnahmewert, Null ist einziger Zielwert; und mindestens in speziellen Fällen gilt $m(r,o) = \log \frac{1}{\delta(r)}$, wobei $\delta(r)$ die in $r < |z| < 1$ befindliche Masse sei. Es gilt $\delta(r) \to o$; i.a. verschwindet aber doch der Defekt von Null.

R. de POSSEL: <u>Caractérisation du polygone fondamental d'une variété conforme non prolongeable</u>.

<u>Satz:</u> Eine Riemannsche Fläche ist dann und nur dann nicht fortsetzbar, wenn folgende 2 Bedingungen erfüllt sind:
1. Eine einfach geschlossene Kurve trennt nie ein schlichtartiges

Gebiet ab, das nicht einem Kreis homöomorph ist.

2. Die Seiten des Fundamentalpolygons im Einheitskreis seien gebildet aus Kreisbögen von Kreisen, die auf dem Kreisrand C senkrecht stehen und die auf C enden. Durch diese Kreisbögen werden auf C Bögen δ_i ausgeschnitten. Bedingung ist nun, daß diese δ_i immer eine Menge vom maximalen Typ bilden.

Zur Definition einer Menge von maximalem Typ ist folgendes zu sagen: Auf dem Rand C des offenen Einheitskreises D befinde sich eine Menge von Kreisbögen δ_i. D werde nun auf ein Gebiet Δ, das ganz in einer offenen Kreisscheibe D' mit Rand Γ' liegt, abgebildet. Dabei sollen die Bögen δ_i auf Kreisbögen δ_i' von Γ' abgebildet werden. Die Menge der δ_i heißt nun von maximalem Typ, wenn -für jede solche Abbildung- Δ mit D' übereinstimmt.-Veröffentlicht in Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris août 1959, 249 und Journal de mathématiques 1962.

H.L. ROYDON: <u>Bounded analytic functions on a Riemann surface</u>.

Es wurde der Beweis folgenden Satzes skizziert: Es sei W eine Riemannsche Fläche mit kompaktem Rank Γ; sei AB(W) die Familie der Funktionen, die beschränkt und analytisch auf $W \cup \Gamma$ sind; W genüge dem AB-Maximum-Prinzip, d.h. jede Funktion $f \in AB(W)$ nehme ihr Maximum auf Γ an. Es existiert dann eine kompakte R.Fläche W_o und eine analytische Abbildung $\varphi : W \longrightarrow W_o$, so daß jede Funktion $f \in AB(W)$ von der Form $g \circ \varphi$ ist, wobei g analytisch in einer Umgebung von $\varphi[W]$ auf W_o ist. - Ein kurzer Bericht über diese Arbeit wird in "Annales Academiae Scientiarium Fennicae" erscheinen.

H. HOLMANN: <u>Analytische Relationen auf Riemannschen Flächen</u>.

X sei eine Riemannsche Fläche, R eine Äquivalenzrelation auf X (die nicht alle Punkte von X identifiziert). Man sagt, daß X/R auf kanonische Weise eine Riemannsche Fläche ist, wenn gilt:

1. Die kanonische Projektion $\pi : X \longrightarrow X/R$ ist holomorph.
2. Für jede R-saturierte offene Menge U in X und jede R-invariante holomorphe Funktion f auf U ist $f \circ \pi^{-1}$ holomorph auf $\pi(U) \subset X/R$.

<u>Satz</u>: X/R ist auf kanonische Weise eine Riemannsche Fläche

$\Longleftrightarrow$ R ist offen und analytisch

$\Longleftrightarrow$ R ist stetig und analytisch.

Dabei heißt R analytisch, wenn der Graph $C_R \subset X \times X$ von R in $X \times X$ analytisch ist. - Ist A eine Teilmenge von X, so bezeichnet R(A)

die R-saturierte Hülle von A. R heißt dann stetig, wenn für jede konvergente Folge $\{x_\nu\}$ auf X mit $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0$ gilt: $\lim_{\nu\to\infty} R(x_\nu) = R(x_0)$. Ein ähnlicher Satz gilt auch für die von einer Automorphismengruppe G erzeugte Äquivalenzrelation R_G.

A. DINGHAS: Das Denjoy-Carlemansche Problem für harmonische Funktionen im E^n.

Es sei $u(x_1,\dots,x_n) = u(P)$ eine harmonische Funktion im euklidischen Raum $E^n (n>2)$, S_r die Kugel $x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2$, $M(r) = \operatorname{Max}_{P\in S_r} u(P)$.

1. Als Analogon zum Wimanschen Satz wird $\underline{\lim}_{r\to\infty} \dfrac{\log M(r)}{\log r}$ nach unten abgeschätzt.
2. Der Satz von Denjoy-Carleman-Ahlfors lautet für n=2: w(z) sei holomorph und habe N verschiedene endliche Zielwerte, dann gilt für $u(z) = |w(z)|$: $\underline{\lim}_{r\to\infty} \dfrac{\log M(r)}{r^{N/2}} > 0$. Für $n>2$ ergibt sich eine analoge Aussage: Zur harmonischen Funktion u(P) wird definiert die Menge $E_0' = \{P \mid P\in E^n,\ |P|>r_0,\ u(P)>0\}$. Es sei möglich, die Menge E_0' durch N punktfremde Gebiete $G_1,\dots,G_N$ mit gewissen weiteren Eigenschaften zu überdecken. Dann wird - durch eine Funktion von n und N - γ abgeschätzt, so daß gilt $\underline{\lim}_{r\to\infty} \dfrac{M(r)}{r^\gamma} > 0$.

Veröffentlicht in: Det Kgl. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter, 1962, Nr. 7.

A. PFLUGER: Kontraktive Operatoren und die Poisson-Stieltjesschen Integraldarstellung.

Satz: Zu jedem kontraktiven linearen Operator A ($\|A\|\le 1$) eines Hilbertraumes H existiert eine wachsende Schar von Operatoren S_φ ($0\le\varphi\le 2\pi$) mit $S_0 = 0$, $S_{2\pi} = E$ (Identität) und $S_{\varphi-0} = S_\varphi$ (für $0<\varphi\le 2\pi$), so daß

$$(A^n x, y) = \int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\, d(S_\varphi x, y) \qquad x,y\in H,\quad n=0,1,2\dots$$

Diese Spektraldarstellung ist bekannt für unitäre Operatoren ($\|A\| = 1$). Es sei nun A ein kontraktiver Operator, dann folgt der Satz aus der Tatsache, daß $((\lambda+A)(\lambda-A)^{-1}x,x)$ eine für $|\lambda|>1$ holomorphe Funktion von λ mit positivem Realteil ist für jedes $x\in H$. Man wendet dann die Poisson-Stieltjessche Integraldarstellung für solche Funktionen an.

Es wurde schließlich gezeigt, daß sich der Satz auch ohne Rückgriff auf komplexwertige Funktionen beweisen läßt. Die Poisson-Stieltjessche Integraldarstellung gilt nämlich in einem viel allgemeineren Sinn: unter gewissen Voraussetzungen gilt sie für Abbildie R-saturierte Hülle von A. R heißt dann stetig, wenn für jede konvergente Folge $\{x_\nu\}$ auf X mit $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0$ gilt: $\lim_{\nu\to\infty} R(x_\nu) = R(x_0)$. Ein ähnlicher Satz gilt auch für die von einer Automorphismengruppe G erzeugte Äquivalenzrelation R_G.

A. DINGHAS: Das Denjoy-Carlemansche Problem für harmonische Funktionen im E^n.

Es sei $u(x_1,\dots,x_n) = u(P)$ eine harmonische Funktion im euklidischen Raum $E^n (n>2)$, S_r die Kugel $x_1^2+ \dots +x_n^2 = r^2$, $M(r) = \underset{P\in S_r}{\mathrm{Max}}\, u(P)$.

1. Als Analogon zum Wimanschen Satz wird $\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{\log r}$ nach unten abgeschätzt.
2. Der Satz von Denjoy-Carleman-Ahlfors lautet für n=2: w(z) sei holomorph und habe N verschiedene endliche Zielwerte, dann gilt für $u(z) = |w(z)|$: $\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^{N/2}} > 0$. Für n>2 ergibt sich eine analoge Aussage: Zur harmonischen Funktion u(P) wird definiert die Menge $E_0^+ = \{P \mid P\in E^n,\ |P|>r_0,\ u(P)>0\}$. Es sei möglich, die Menge E_0^+ durch N punktfremde Gebiete $G_1,\dots,G_N$ mit gewissen weiteren Eigenschaften zu überdecken. Dann wird - durch eine Funktion von n und N - γ abgeschätzt, so daß gilt $\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r^\gamma} > 0$.

Veröffentlicht in: Det Kgl. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter, 1962, Nr. 7.

A. PFLUGER: Kontraktive Operatoren und die Poisson-Stieltjesschen Integraldarstellung.

Satz: Zu jedem kontraktiven linearen Operator A ($\|A\|\le 1$) eines Hilbertraumes H existiert eine wachsende Schar von Operatoren S_φ ($0\le\varphi\le 2\pi$) mit $S_0 = 0$, $S_{2\pi} = E$ (Identität) und $S_{\varphi-0} = S_\varphi$ (für $0<\varphi\le 2\pi$), so daß

$$(A^n x,y) = \int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\, d(S_\varphi x,y) \qquad \begin{array}{l} x,y\in H \\ n=0,1,2,\dots \end{array}$$

Diese Spektraldarstellung ist bekannt für unitäre Operatoren ($\|A\| = 1$). Es sei nun A ein kontraktiver Operator; dann folgt der Satz aus der Tatsache, daß $((\lambda+A)(\lambda-A)^{-1}x,x)$ eine für $|\lambda|>1$ holomorphe Funktion von λ mit positivem Realteil ist für jedes $x\in H$. Man wendet dann die Poisson-Stieltjessche Integraldarstellung für solche Funktionen an.

Es wurde schließlich gezeigt, daß sich der Satz auch ohne Rückgriff auf komplexwertige Funktionen beweisen läßt. Die Poisson-Stieltjessche Integraldarstellung gilt nämlich in einem viel allgemeineren Sinn: unter gewissen Voraussetzungen gilt sie für Abbildungen $U(z)$ vom Einheitskreis in einen Banach-Raum.

H. GRUNSKY: Über Extremaleigenschaften gewisser konformer Normalgestalten mehrfach zusammenhängender Gebiete.

Nach de la Vallée-Poussin und Julia (193o-1932) läßt sich jedes Gebiet der Zusammenhangszahl k+1 konform so auf ein Gebiet $\mathfrak{Z}$ abbilden, daß ein Polynom k-ten Grades auf jeder der Randkomponenten Z_K konstanten Betrag hat

$$|\mathfrak{P}(z)| = \Big|\prod_{K=1}^{k} (z-b_K)\Big| = C_K \text{ für } z \in Z_K \qquad K = 0,1,\dots,k$$

Z_o trenne ∞ von dem Gebiet $\mathfrak{Z}$. Durchläuft $\mathfrak{M}$ eine Schar konform verwandter beschränkter Gebiete, wobei die auf die Kapazität 1 normierten äußeren Randkomponenten sich entsprechen und ist b_K $(K = 1,\dots,k)$ ein beliebiger Punkt in der beschränkten Komplementärkomponente $\mathfrak{M}_K$, r_K ihr innerer Bildradius in bezug auf b_K, so nimmt

$$\prod_{K=1}^{k} r_K \prod_{K\neq\lambda} |b_K - b_\lambda|$$

sein Maximum für die eingangs geschilderte Normalgestalt an. Verallgemeinerungen. (Wird veröffentlicht im Journal de Mathémat.)

D. GAIER: Konforme Abbildung auf Normalgebiete durch Lösung von Minimalproblemen mit direkten Methoden.

1. Allgemeines Minimalproblem. Der Rand C von G sei analytisch. Sei $L_2(G) = \{f \,|\, \iint_G |f|^2 \, db < \infty$, f hat eindeutiges Integral in G$\}$, und es sei $H(z) \not\equiv 0$ in $\bar{G}$ regulär mit eindeutigem Integral in G. Ist $\mathfrak{K}$ die Klasse aller $f \in L_2(G)$ mit $(f,H) = 1$, so wird $\|f\|$ in $\mathfrak{K}$ zum Minimum m genau dann, wenn $f = m^2 H$. Mit den Komponentenfunktionen $\varphi_K(z)$: $1, z;\ (z-\alpha_1)^{-2}, (z-\alpha_2)^{-2}, \dots, (z-\alpha_{p-1})^{-2}, z^2;\ (z-\alpha_1)^{-3}, \dots, z^3; \dots$ (in jedem der p-1 endlichen Komplementärgebiete sei ein Punkt α_K gewählt) sucht man in

$$\mathfrak{K}_n : \Big\{ P = \sum_{j=o}^{n} c_j \varphi_j \text{ mit } (P,H) = 1 \Big\}$$

die Norm $\|P\|$ minimal gleich m_n zu machen. In dem linearen Gleichungssystem zur Bestimmung des minimalen P sind die Koeffizienten $\gamma_K = (\varphi_K, H)$ enthalten. - Für die Approximation von H(z) durch P_n und m_n gilt

$$\left| \frac{P_n(z)}{m_n^2} - H(z) \right| \leq A \rho^n \qquad (z \in \bar{G};\ 0 < \rho < 1).$$

2. Spezielle Wahl von H(z). Solche Normalabbildungen können approximiert werden, für die es ein H(z) gibt, so daß die $\gamma_K = (\varphi_K, H)$ die Funktion H nicht mehr enthalten.-"Konstruktive Methoden

der konformen Abbildung" wird der Titel eines Ergebnisberichtes (im Springer-Verlag) des Vortragenden sein.

F. HUCKEMANN: Ein Lemma über den Modul von Vierecken.

Sei $M>0$, $\vartheta\geq 1$, $0<\delta<1$ und $Q(\delta,M)$ das Rechteck $-\delta M<\operatorname{Re} z<(1-\delta)M$, $0<\operatorname{Im} z<1$. Die Transformation $\zeta = z$ für $\operatorname{Re} z\leq 0$, $\zeta=\vartheta z$ für $\operatorname{Re} z>0$ bildet $Q(\delta,M)$ ab auf ein Sechseck $H(\delta,M;\vartheta)$. Bei festem δ,M bezeichne $\mu(\vartheta)$ den Modul von $H(\delta,M;\vartheta)$ bezüglich der Parallelseiten auf $\operatorname{Re}\zeta = -\delta M, \vartheta(1-\delta)M$.

Dann gilt das Lemma (Omnibus-Lemma):

1. $\mu(\vartheta)$ ist eigentlich monoton in $1\leq\vartheta$,
2. $\lim\limits_{\vartheta\to\infty}\mu(\vartheta)=\infty$.

Das Lemma hat folgende Anwendungen:

1. Zerlegung eines Vierecks in zwei Vierecke, deren Moduln bei festem Verhältnis maximal sind.
2. Analoge Zerlegung eines Ringgebietes in zwei Ringgebiete, die beide einen Punkt nicht enthalten.
3. Zerlegung eines symmetrischen dreifach zusammenhängenden Gebietes in 3 Ringgebiete gleichen und maximalen Moduls.

P. ERDÖS: Einige Probleme über Polynome.

$f_n(z)=\prod\limits_{\nu=1}^{n}(z-z_\nu)$ sei ein Polynom n-ten Grades, E_n das Lemniskatengebiet, für das gilt $|f_n(z)|\leq 1$.

In einer Arbeit zusammen mit Herzog und Piranian (Journal d'Analyse Band 6) wurden analytische und geometrische Eigenschaften von E_n untersucht. Einige der damals noch offenen Fragen wurden inzwischen von Pommerenke (Michigan Math. Journal Band 8) gelöst. Es wurde u.a. über folgende Ergebnisse und noch offene Fragen gesprochen: Bieberbach hat gezeigt, daß E_n einen Flächeninhalt $\leq\pi$ hat. - Es ist bewiesen, daß E_n sich durch Kreisscheiben überdecken läßt, so daß die Summe der Radien $\leq 2e$. Man vermutet, daß die Schranke 2 ist; diese Schranke ließe sich aber nicht mehr verbessern. - $74n^2$ ist eine obere Schranke für die Bogenlänge der Kurve $|f_n(z)| = 1$. Es besteht die Frage, ob schon cn eine solche Schranke ist, denn es sieht so aus, als sei die Bogenlänge maximal für z^n-1; und sie ist in diesem Fall nur etwas größer als 2n. -

C. ULUÇAY: On Bieberbach's conjecture.

Der Vortrag war folgendem Satz gewidmet:

Sei S die Klasse der in $|z|<1$ holomorphen und schlichten Funktionen $f(z) = z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$,
V_n der Bereich der Koeffizienten $a_2,\dots,a_n$ aller $f(z)\in S$ im $(2n-2)$-dimensonalen Raum,
$\sigma(z) = z + \sigma_2z^2 + \dots + \sigma_nz^n + \dots \in S$ mit $\sigma_n > 0$ eine Extremalfunktion hinsichtlich des n-ten Koeffizienten σ_n, (es ist dann $(\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1},\sigma_n)\in\partial V_n$)
dann gilt: $(\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1})\in\partial V_{n-1}$.
Als Korollar folgt daraus: $\sigma(z)$ ist die Koebe-Funktion mit $\sigma_n = n$.

W. JANOWSKI: <u>Sur quelques problèmes extrémaux dans la famille des fonctions univalentes bornées.</u>

Es wurden holomorphe, schlichte Funktionen der folgenden Art betrachtet: (1) $F(z) = z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots \qquad |z|<1$

(2) $\phi(\zeta) = \zeta + B_0 + \frac{B_1}{\zeta} + \dots \qquad |\zeta|>1$.

Die Konstanten M und m genügen folgenden Bedingungen: $M>1$, $0\le m<1$.
F_M sei die Familie der Funktionen (1), für die gilt $|F(z)|<M$; entsprechend sei ϕ_m die Familie der Funktionen (2) mit $|\phi(z)|>m$. Eine Anzahl Eigenschaften der Funktionen aus F_M und ϕ_m wurden angegeben. Z.T. sind diese veröffentlicht in Arbeiten des Vortragenden und von Z. Charzyński aus den Jahren 1950-1958.

F.W. GEHRING: <u>A distortion theorem for univalent functions.</u>

Es sei $w(z)$ eine konforme Abbildung von $|z|<1$, die auch auf dem Kreisrand $|z| = 1$ noch stetig ist. Dieser Kreisrand wird auf eine Kurve der Länge ℓ abgebildet. Nach einem Satz von Fejer und F. Riesz wird dann der Durchmesser $|x|<1$, $y = 0$ auf eine Kurve abgebildet, deren Länge $\le \frac{1}{2}\ell$.
In diesem Vortrag wurde nun über folgenden ähnlichen Satz gesprochen:
Es sei $w(z)$ eine konforme Abbildung von $|z|<1$, die auf dem Halbkreisrand $|z| = 1$, $y>0$ noch stetig ist; wird nun dieser Halbkreisrand auf eine Kurve der Länge ℓ abgebildet, dann ist das Bild des Durchmessers $|x|<1$, $y = 0$ eine Kurve der Länge ℓ'. Dabei ist $\ell' \le A\ell$, A ist eine Konstante, für die gilt $\pi \le A < 74$. Der Beweis stützt sich auf die Lösung des Problems von Carleman-Milloux und auf den Verzerrungssatz von Koebe. (Veröffentlicht im J.de Math. 1962 als Arbeit von F.W. Gehring und K. Hayman).

U. Clauß (Würzburg)