

Tagungsbericht (5)

Z a h l e n t h e o r i e

(insbesondere additive Zahlentheorie, Diophantische Approximationen, Modulfunktionen)

1. bis 5. April 1963

In der Woche vom 1. bis 5. April 1963 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Tagung über Zahlentheorie unter der Leitung der Herren Professor Dr. H. KLINGEN und Professor Dr. Th. SCHNEIDER (beide Freiburg) statt. Obwohl einige Gäste abgesagt hatten, war die Tagung mit 38 Teilnehmern - darunter 14 aus dem Ausland - sehr gut besucht.

Die Vortragsthemen waren aus folgenden Gebieten: additive Zahlentheorie, analytische Zahlentheorie, Geometrie der Zahlen, diophantische Approximationen, Modulfunktionen. Aus den Vorträgen ergab sich ein guter Überblick über den heutigen Stand und die aktuellen Probleme der Zahlentheorie. Die Vorträge, die zahlreichen Diskussionsbemerkungen und persönliche mathematische Gespräche waren für alle Teilnehmer sehr anregend.

Nicht zuletzt förderte die freundliche Atmosphäre des Hauses und eine gemeinsame Wanderung bis zur Schneegrenze die persönlichen Kontakte.

Folgende Damen und Herren nahmen an der Tagung teil:

England: BIRCH, B.J., Cambridge; DAVENPORT, H., Cambridge;
RANKIN, A., Glasgow

Frankreich: LUTZ, E., Grenoble;

Italien: BOMBIERI, E., Mailand

Niederlande: LEKKERKERKER, C.G., Amsterdam, van LINT, J.H., Eindhoven

Österreich: AIGNER, A., Graz; FLOR, P., Wien; PHILIPP, W., Wien

Ungarn: ERDÖS, P., Budapest

USA: LeVEQUE, W.J., Ann Arbor; LEWIS, D.J., Ann Arbor

Deutschland: CHRISTIAN, U., Göttingen; GOTTSCHLING, E., Berlin;
GUNDLACH, K.B., Münster; HANEKE, W., Marburg;
HELLING, H., Münster; HERRMANN, O., Heidelberg;
HIRSCHELMANN, A., Gießen; HOFMEISTER, G., Berlin;
HOHEISEL, G., Köln; KANOLD, H.J., Braunschweig;
KLINGEN, H., Freiburg; KÖRNER, O., Marburg; LEUTBE-
CHER, A., Münster; MÜLLER, M., Tübingen; PLÜNNECKE,
H., Bonn; PUMPLÜN, D., Hamm; RIEGER, G.J., Ottobrunn;
ROELCKE, W., Münster; SCHNEIDER, Th., Freiburg;

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach
E 20 10 1959

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Mathematisches Forschungsinstitut

(insbesondere additive Zahlentheorie, Diophantische Approximationen, Modulformen)
1. bis 2. April 1959

In der Woche vom 1. bis 2. April 1959 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Tagung über Zahlentheorie unter der Leitung der Herren Professor Dr. H. KILMER und Professor Dr. Th. SCHNIEBER (beide Freiburg) statt. Obwohl einige Gäste abgefragt hatten, war die Tagung mit 38 Teilnehmern - darunter 14 aus dem Ausland - sehr gut besucht.

Die Vorträge waren aus folgenden Gebieten additive Zahlentheorie, analytische Zahlentheorie, Geometrie der Zahlen, diophantische Approximationen, Modulformen. Aus den Vorträgen ergab sich ein guter Überblick über den derzeitigen Stand der aktuellen Probleme der Zahlentheorie. Die Vorträge über Zahlentheorie waren Diskussionsbemerkungen und persönlichen Austauschgespräche waren für alle Teilnehmer sehr anregend.

Nicht zuletzt förderte die freundliche Atmosphäre des Hauses eine gemeinsame Wanderung, die zur Schneekette die persönlichen Kontakte.

Folgende Damen und Herren nahmen an der Tagung teil:

- England: BIRCH, B.J., Cambridge; DAVENPORT, H., Cambridge; HANKIN, A., Glasgow
- Frankreich: LINTZ, E., Grenoble
- Italien: BOMBIERI, R., Mailand
- Niederlande: LEEKKERKERK, G.G., Amsterdam; van LINT, U.G., Groningen
- Österreich: AIGNER, J., Graz; FLOR, F., Wien; PHILLIPS, W., Wien; SCHMIDT, W., Wien
- USA: LEVDOV, K.J., Ann Arbor; LEWIS, T.B., Ann Arbor
- Deutschland: CHRISTIAN, G., Göttingen; GÖTTSCHELOW, H., Berlin; HELLIG, H., Münster; HERRMANN, G., Heidelberg; HIRSCHMANN, H., Gießen; HOPFMEIER, G., Berlin; HORN, G., Köln; KANOLD, H.-J., Marburg; KILMER, H., Freiburg; KILMER, H., Marburg; KUNZE, A., Marburg; MÜLLER, M., Tübingen; PUNNINGER, H., Bonn; RÜMPEL, H., Hems; RIEGER, G., Göttingen; ROJOKI, J., München; SCHNIEBER, Th., Freiburg



SCHWARZ, W., Freiburg; SPILKER, J., Freiburg; STÖHR, A., Berlin;
WIRSING, E., Marburg; WOLF, A., Tübingen.

Die Tagung begann mit den Vorträgen über Modulfunktionen. Zwar sind die Modulfunktionen im Zusammenhang mit zahlentheoretischen Problemen entdeckt worden, doch zeigte sich, daß sie sich heute zu einer weitgehend selbständigen Theorie entwickelt haben. Im einzelnen wurden folgende Vorträge gehalten:

U. CHRISTIAN: Zur Theorie der Hilbert-Siegelschen Modulgruppen.
Der Quotientenraum der verallgemeinerten oberen Halbebene nach einer Kongruenzgruppe zur Hilbert-Siegelschen Modulgruppe wird im Satakeschen Sinne kompaktifiziert. Der kompakte Raum enthält im Fall des nicht-rationalen Zahlkörpers stets nicht uniformisierbare Punkte. Im rationalen Fall ergeben sich für Hauptkongruenzuntergruppen (mit einer Ausnahme) ebenfalls nicht-uniformisierbare Punkte.

O. HERRMANN: Eine neue Klasse von Gitterpunktproblemen im hyperbolischen Raum.

Die Resultate einer Arbeit über die Verteilung der Längen geodätischer Lote im hyperbolischen Raum werden verallgemeinert, indem noch eine Winkelbedingung hinzugefügt wird. Die Methoden und Ergebnisse sind im wesentlichen dieselben wie in der zitierten Arbeit.

A. LEUTBECHER: Zusammenhang zwischen den Werten von L-Reihen quadratischer Zahlkörper im Punkt $s=1$ mit Modulformen.

Bei der Summation eigentlicher L-reihen zu geraden Kongruenzidealklassencharakteren χ in quadratischen Zahlkörpern treten Strahlklasseninvarianten auf, die sich als Funktionale einer Modulform erweisen. Analog zum absolut-abelschen Fall (Hasse) läßt sich daraus eine Reduktionsformel für Vielfache des Führers von χ gewinnen. Ein Satz über Multiplikatorsysteme von Modulformen ergibt eine Teilbarkeitseigenschaft für die Klassenzahlen eines reell-quadratischen Zahlkörpers und eines quadratischen, nicht absolut abelschen Erweiterungskörpers.

SCHWARZ, W., Freiburg; SPIKER, J., Freiburg; STÖHR, A., Berlin;
TOWRING, E., Marburg; WOLF, A., Tübingen.

Die Tagung begann mit den Vorträgen über Mobilfunktionen. Es
sind die Mobilfunktionen im Zusammenhang mit zahlentheoretischen
Problemen erörtert worden, doch zeigte sich, daß sie sich heute
zu einer weitgehend selbständigen Theorie entwickelt haben. In
einzelnen wurden folgende Vorträge gehalten:

U. CHRISTIAN: Zur Theorie der Hilbert-Siegel'schen Mobilgruppen.
Der Quotientenraum der verallgemeinerten oberen Halbebene nach
einer Kongruenzgruppe zur Hilbert-Siegel'schen Mobilgruppe wird
im Satake'schen Sinne kompaktifiziert. Der kompakte Raum enthält
im Fall des nicht-rationalen Zahlkörpers stets nichttriviale
stationäre Punkte. Im rationalen Fall ergeben sich für die stationären
Grenzwertgruppen (mit einer Ausnahme) ebenfalls nichttriviale
stationäre Punkte.

O. HEERMANN: Eine neue Klasse von Gitterpunktproblemen im hyper-
bolischen Raum.

Die Resultate einer Arbeit über die Verteilung der Längen großer
fischer Lote im hyperbolischen Raum werden verallgemeinert. In-
dem noch keine Winkelbedingung hinzugefügt wird, die Methoden sind
Ergebnisse sind im wesentlichen dieselben wie in der zitierten
Arbeit.

A. LEUBNER: Zusammenhang zwischen den Minkowski- H -Reihen
in quadratischen Zahlkörpern im Hinblick auf die Mobil-
funktionen.

Bei der Summation eigenfunktionaler Reihen zweier Klassen
idealklassenspezifischer χ -quadratischer Zahlkörpern treten
Strahlklasseninvarianten auf, die sich als Funktionen einer
Modulform erweisen. Analog zum absolut-abelschen Fall (Hasse)
läßt sich daraus eine Reduktionsformel für die Verteilung der
Klassen von X gewinnen. Ein Satz über Multiplikationssysteme von
Modulformen ergibt eine Teilbarkeitscharakterisierung der Klassen-
zahlen eines reell-quadratischen Zahlkörpers und eines quadra-
tischen, nicht absolut-abelschen Erweiterungskörpers.



H. KLINGEN: Zusammenhänge zwischen verschiedenen Modulfunktionen.

Am Beispiel der Siegelschen und Hermiteschen Modulfunktionen wird gezeigt, wie sich verschiedene Klassen von Modulfunktionen gemeinsam behandeln lassen. Man kann die Siegelsche Halbebene kanonisch in die Hermitesche einbetten. Es wird gezeigt, daß man den vollen Körper der Siegelschen Modulfunktionen als natürliche Projektion des Ringes derjenigen Hermiteschen Modulfunktionen erhält, die nicht identisch singular auf der Siegelschen Untermannigfaltigkeit sind. Auf diese Weise subsumieren sich die Siegelschen unter die Hermiteschen Modulfunktionen.

K.B. GUNDLACH: Identitäten zwischen Modulformen zur Hilbertschen Modulgruppe.

Die Hilbertsche Modulgruppe Γ eines reell-quadratischen Zahlkörpers hat als Invarianzgebiet das Produkt zweier Exemplare der gewöhnlichen oberen Halbebene. Durch Hinzufügung der Variabelvertauschung zu Γ erhält man die symmetrische Gruppe $\hat{\Gamma}$. Man erhält Relationen zwischen den Modulformen zu Γ und $\hat{\Gamma}$, wenn man durch geeignete Koppelung der beiden Veränderlichen zu Modulfunktionen einer Veränderlichen hinabsteigt. Ist z.B. $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ der zugrundegelegte Zahlkörper, so ist der Körper der Modulfunktionen zu Γ eine quadratische Erweiterung des Funktionenkörpers zu $\hat{\Gamma}$, und ein primitives Element der Erweiterung läßt sich angeben.

W. ROELCKE: Zur Eigenwerttheorie der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene.

Der betrachtete Formtypus besteht aus den in der oberen Halbebene reell-analytischen Formen, die durch gewisse Transformationseigenschaften unter einer Grenzkreisgruppe 1. Art, durch Wachstumseigenschaften in den parabolischen Spitzen des Fundamentalbereichs und eine formal selbstadjungierte partielle Eigenwertdifferentialgleichung 2. Ordnung definiert sind. Das Eigenwertproblem wird in dem durch die übliche Metrisierung nahegelegten Hilbertraum nach spektraltheoretischen Gesichtspunkten untersucht. Insbesondere wird die Frage nach der Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen zum Punktspektrum und zum kontinuierlichen Spektrum positiv beantwortet.

H. KLINGEN: Zusammenhänge zwischen verschiedenen Modulfunktionen

Am Beispiel der Stegflächen und Hermiteschen Modulfunktionen wird gezeigt, wie sich verschiedene Klassen von Modulfunktionen gegeneinander verhalten lassen. Man kann die Stegfläche Halbebene kontinuitätlich in die Hermitesche einbetten. Es wird gezeigt, daß man den vollen Körper der Stegflächen Modulfunktionen als natürliche Projektion des Ringes derjenigen Hermiteschen Modulfunktionen erhält, die nicht identisch sind auf der Stegfläche. Zusammenhangsformeln sind. Auf diese Weise zusammenhängen die Stegflächen untereinander Hermiteschen Modulfunktionen.

K.B. GURDLACH: Identitäten zwischen Modulformen für Hilbertsche Modulgruppen

Die Hilbertsche Modulgruppe Γ einer reell-quadratischen Zahlkörper K über \mathbb{R} ist als Involutionen Γ des Produkts zweier Exemplare der gewöhnlichen oberen Halbebene \mathbb{H}^2 durch Hinwendung der Variablenvertauschung zu Γ erhält man die symmetrische Gruppe S_2 . Man erhält Relationen zwischen den Modulformen zu Γ und S_2 , wenn man durch geeignete Kopplung der beiden Veränderlichen zu Modulfunktionen einer Verdränglichen Γ über \mathbb{R} (z.B. S_2) überträgt. Ist Γ der zugrunde gelegte Zahlkörper, so ist der Körper der Modulfunktionen zu Γ eine quadratische Erweiterung des Funktionenkörpers zu Γ , und ein primitives Element der Erweiterung ist Γ angegeben.

W. HOEHNKE: Zur Eichwerttheorie der autonomen Formen in der Hyperbolischen Ebene

Der betrachtete Formtypus besteht aus den in der oberen Halbebene reell-analytischen Formen, die durch gewisse Transformations-eigenschaften unter einer Grenzkreisgruppe Γ über \mathbb{R} durch Wahrungseigenschaften in den parabolischen Spitzen des Fundamentalsystems und eine formal eiserne jüngere partielle Eichwerttheorie charakterisiert sind. Die Eichwerttheorie wird in dem durch die Eichwerttheorie nahegelegten Hilbert-Raum nach parabolischen Geradenpunkten untersucht. Insbesondere wird die Frage nach der Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen zum Punktspektrum und zum kontinuierlichen Spektrum positiv beantwortet.



Der zweite, umfangreichere Teil der Tagung behandelte zahlentheoretische Probleme; im einzelnen wurden folgende Vorträge gehalten:

B.J. BIRCH: Waring's problem in algebraic number-fields.

Sei K ein algebraischer Zahlkörper, K_{\wp} eine \wp -adische Erweiterung. Es wird gezeigt, daß jedes Element aus K_{\wp} , das sich als Summe k -ter Potenzen \wp -adisch ganzer Zahlen aus K darstellen läßt, schon eine Summe von höchstens $G(k)$ k -ten Potenzen \wp -adisch ganzer Zahlen aus K ist. $G(k)$ ist dabei eine nur von k abhängige Zahl. Es folgt, daß jede Zahl aus K , die überhaupt Summe von k -ten Potenzen ist, schon eine Summe von höchstens $G^*(k)$ k -ten Potenzen ist.

E. BOMBIERI: A new principle in the Geometry of Numbers and its applications to Diophantine approximation.

Mit einer Verfeinerung der Siegelschen analytischen Methode in der Geometrie der Zahlen werden Gitterpunktprobleme in Sternkörpern angegriffen. Als Anwendung erhält man unter anderem eine Verschärfung des Kroneckerschen Satzes über inhomogene diophantische Approximationen.

H. DAVENPORT: Diophantine equations in many variables.

Es wird ausführlich über Arbeiten von Birch, Lewis und Davenport berichtet, in denen mit analytischen Mitteln (Hardy-Littlewoodsche Methode) Bedingungen für die Lösbarkeit allgemeiner homogener diophantischer Gleichungen in genügend vielen Veränderlichen gegeben werden. Speziell zeigte der Vortragende, daß eine homogene kubische diophantische Gleichung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ in $n \geq 16$ Veränderlichen lösbar ist.

P. ERDÖS: Addition von Restklassen mod p .

Seien e_1, \dots, e_k auf die Werte 0 oder 1 beschränkt. Sind a_1, \dots, a_k verschiedene Restklassen mod p (p Primzahl), so ist, falls $k > 20 \sqrt{p}$ ist, die Kongruenz (§) $e_1 a_1 + \dots + e_k a_k \equiv u \pmod{p}$ für jedes u lösbar. Gilt für $p \rightarrow \infty$ die Beziehung $k \cdot p^{-2/3} \rightarrow \infty$, dann ist die Lösungszahl von (§) asymptotisch gleich $2^k \cdot p^{-1}$. Es wird noch eine Reihe von Vermutungen angegeben.

W. HANEKE: Verschärfung der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$.

Die Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ wird auf die Abschätzung von zweidimensionalen Exponentialsummen zurückgeführt. Durch geschickte Behandlung dieser Exponentialsummen wird die Min'sche Abschätzung

Der zweite, umfangreichere Teil der Tagung behandelte zahlentheoretische Probleme; im einzelnen wurden folgende Vorträge gehalten:

B. J. BIRCH: Varieties of rank 1 in algebraic number fields.

Sei K ein algebraischer Zahlkörper, K_0 eine g -klassische Erweiterung. Es wird gezeigt, daß jedes Element aus K_0 , das sich als Summe k -ter Potenzen g -adischer ganzer Zahlen aus K darstellen läßt, schon eine Summe von höchstens $G(k)$ k -ten Potenzen g -adischer ganzer Zahlen aus K ist. $G(k)$ ist dabei eine nur von k abhängige Zahl. Es folgt, daß jede Zahl aus K , die überhanpt Summe von k -ten Potenzen ist, schon eine Summe von höchstens $G^*(k)$ k -ten Potenzen ist.

E. BOMBIERI: A new principle in the geometry of numbers and its application to Diophantine approximation.

Mit einer Verfeinerung der Siegelischen methodischen Methode in der Geometrie der Zahlen werden Gitterpunktprobleme in Sternkörpern angegriffen. Als Anwendung erhält man unter anderem eine Verfeinerung des Kronecker'schen Satzes über inhomogene diophantische Approximationen.

H. DAVENPORT: Diophantine equations in many variables.

Es wird ausführlich über Arbeiten von Siegel, Landau und Davenport berichtet, in denen mit analytischen Mitteln (Henry-Littlewood'sche Methode) Bedingungen für die Lösbarkeit allgemeiner homogener diophantischer Gleichungen in hinreichend vielen Veränderlichen gegeben werden. Zunächst sollte der Vortragende, daß inhomogene diophantische Gleichungen $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ in n Variablen lösbar sind.

P. ERDŐS: Mittelwertsatz von Cauchy mod p .

Seien a_1, \dots, a_n auf die Werte 0 oder 1 beschränkt. Sind a_1, \dots, a_n verschiedene Restklassen mod p (p Primzahl), so ist falls $k > 2p \sqrt{p}$ ist, die Kongruenz $(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^k \equiv 0 \pmod{p}$ für jedes x lösbar. Gilt für $p \rightarrow \infty$ die Behauptung $k \cdot p^{-2} \rightarrow \infty$, dann ist die Häufigkeit von $(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^k \equiv 0 \pmod{p}$ gleich $2^k p^{-1}$. Es wird noch eine Reihe von Vermutungen angegeben.

W. HANKE: Verfeinerung der Abschätzung von $\sum_{d|n} \frac{1}{d}$.

Die Abschätzung von $\sum_{d|n} \frac{1}{d}$ wird auf $\frac{1}{2} \log n + O(1)$ verbessert. In der dimensionalen Exponentialsummen zurückgeführt, durch geschickte Behandlung dieser Exponentialsummen wird die Möbius'sche Abschätzung



$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O\left(t^{\frac{15}{92} + \varepsilon}\right)$ zu $O\left(t^{\frac{6}{37}} \log t\right)$ verbessert.

G. HOFMEISTER: Über eine Teilmenge von Abschnittsbasen.

Der Rohrbach-Stöhrsche Reichweitenbegriff $n_h(k)$ (Ostmann, Additive Zahlentheorie) läßt sich enger fassen; die neue Reichweite $g_h(k)$ läßt sich gut nach unten und oben abschätzen; damit wird zugleich die beste bisher bekannte untere Abschätzung für die Reichweite $n_h(k)$ verbessert.

H.J. KANOLD: Elementare Betrachtungen zur Primzahltheorie.

Sei $0 < a \leq d$, $(a, d) = 1$. Es werden Ergebnisse (und Vermutungen) über die in der Folge $a+d, a+2d, \dots, a+(d-1)d$ enthaltenen Primzahlen angegeben; z.B. gibt es für $d \geq \exp(1000)$ mindestens zwei aufeinanderfolgende Zahlen, von denen jede einen Primteiler $> d$ enthält.

O. KÖRNER: Über das Goldbach-Waringsche Problem in algebraischen Zahlkörpern.

Für die Anzahl $A_s(v)$ der Darstellungen einer ganzen Zahl v eines algebraischen Zahlkörpers K als Summe von s k -ten Potenzen total-positiver Primzahlen aus K wird eine asymptotische Formel

$$\left(A_s(v) \sim \mathcal{J}_s(v) \cdot J \cdot (N(v))^{\frac{s}{k} - 1} \log^{-s} N(v) \right)$$
 hergeleitet und die auftretende Singuläre Reihe $\mathcal{J}_s(v)$ auf Positivität untersucht.

C.G. LEKKERKERKER: Homogene simultane Approximationen.

Seien x bzw. y Vektoren des r -dim. bzw. s -dimensionalen Raumes, $\varphi(x)$ bzw. $\psi(y)$ Distanzfunktionen beschränkter Sternkörper.

Für die kritische Determinante $\Delta(K)$ des Sternkörpers

$$K = \left\{ (x, y) \mid \varphi^r(x) \psi^s(y) \leq 1 \right\} \text{ gilt:}$$
$$\Delta^{-1}(K) = \sup_H \left(\liminf_{\varphi(v) \rightarrow \infty} \varphi^r(Hv - u) \psi^s(v) \right),$$

wobei H alle reellen (r, s) -Matrizen durchläuft und u und v Vektoren mit ganzen Koordinaten sind.

W.J. Le VEQUE: Ein Satz über Gleichverteilung.

Sei $Z = \{z_n\}$ eine monoton nach ∞ strebende Folge reeller Zahlen, so daß $z_n - z_{n-1}$ monoton gegen Null strebt. Ist $z_{n-1} \leq u < z_n$, so

setze man $\langle u \rangle_Z = \frac{u - z_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}$; die Folge y_k heißt "gleichverteilt

mod Z ", wenn

$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + 0 \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + \dots$

H. J. KANTOR: Elementare Fortschritte zur Primzahltheorie.
Der Primzahlsatz von A. M. LITTLEWOOD (1914) ist ein zentraler Satz der Zahlentheorie. Er besagt, dass die Anzahl der Primzahlen kleiner als x asymptotisch $\frac{x}{\ln x}$ ist. In dieser Vorlesung werden die Grundlagen der Primzahltheorie besprochen, darunter die Verteilung der Primzahlen und die Bedeutung des Primzahlsatzes.

H. J. KANTOR: Elementare Fortschritte zur Primzahltheorie.
Set $G > a \geq b$, $(a, b) = 1$. Es werden die Folgen $(a + b), (a + 2b), (a + 3b), \dots$ betrachtet. Die Primzahltheorie beschäftigt sich mit der Verteilung der Primzahlen in diesen Folgen. Ein zentraler Satz ist der Primzahlsatz, der besagt, dass die Anzahl der Primzahlen kleiner als x asymptotisch $\frac{x}{\ln x}$ ist.

O. KÖNIG: Über die Verteilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen.
Die Verteilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen ist ein zentrales Thema der Zahlentheorie. In dieser Vorlesung werden die Grundlagen der Primzahltheorie besprochen, darunter die Verteilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und die Bedeutung des Primzahlsatzes.

$$\left(\frac{1}{2} + 1 \right) + 0 \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + \dots$$

O. G. LEBESGUE: Homomorphismen und Approximationen.
Seien x bzw. y Vektoren des n - bzw. m -dimensionalen reellen oder komplexen Vektorraums V bzw. W . Die Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist ein Homomorphismus, wenn $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (bzw. \mathbb{C}) und $x, y \in V$ gilt.

$$K = \{ (x, y) \mid \psi^0(x) \psi^0(y) \leq 1 \} \text{ gilt}$$

Wobei H eine reelle $(n \times m)$ -Matrix durchläuft und u und v Vektoren mit ganzzahligen Koordinaten sind.

H. J. KANTOR: Die Verteilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen.
Die Verteilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen ist ein zentrales Thema der Zahlentheorie. In dieser Vorlesung werden die Grundlagen der Primzahltheorie besprochen, darunter die Verteilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und die Bedeutung des Primzahlsatzes.



$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot N \left\{ k \leq n; \langle y_k \rangle_Z \leq \beta \right\} = \beta$ für $0 \leq \beta < 1$ ist.

Dann gilt: Ist $\{a_k\}$ eine Zahlenfolge mit der Eigenschaft

$a_{k+1} - a_k \geq \frac{c a_k}{k}$, dann ist für fast alle reellen x die Folge $\{a_k x\}$ "gleichverteilt mod Z ".

D.J. LEWIS: Diophantine equations of additive type.

Sei $N(P)$ die Lösungsanzahl der diophantischen Gleichung
(§) $a_1 x_1^k + \dots + a_s x_s^k = 0$ mit ganzen Koeffizienten a_i , die nicht alle vom gleichen Vorzeichen sind, unter geeigneten Bedingungen für die x_i . Für $s \geq s_1(k)$ gilt eine asymptotische Formel $N(P) \sim S \cdot P^\beta$. Für $s \geq k^2 + 1$ ist die singuläre Reihe positiv. Als Folgerung ergibt sich, daß die Gleichung (§) für $s \geq k^2 + 1$, $k \geq 18$ unendlich viele Lösungen hat.

J.H. van LINT: Über die Anzahl der Zahlen $\leq x$, deren Primfaktoren Teiler von n sind.

Sei $f(n, m)$ die Anzahl der Zahlen $\leq m$, deren Primfaktoren Teiler von n sind. Sei $\alpha(n) = \prod p$. Es wird bewiesen,

daß $\sum_{n \leq x} f(n, x) \sim \frac{p/n}{\sum_{n \leq x} f(n, n)}$ gilt,

indem $\sum_{n \leq x} \frac{n}{\alpha(n)} = o\left(x \cdot \sum_{n \leq x} \frac{1}{\alpha(n)}\right)$ gezeigt wird.

H. PLÜNNECKE: Eigenschaften und Abschätzungen von Wirkungsfunktionen.

Sind A, B Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, $A+B$ ihre Schnirelmannsumme, $\delta(A+B)$ die Dichte von $A+B$. Die finite Wirkungsfunktion von B ist definiert durch

$$\varphi(\alpha, B) = \frac{\text{fin}}{A, |A| \geq \alpha} \delta(A+B).$$

Es werden verschiedene Eigenschaften und Abschätzungen dieser Wirkungsfunktion und ähnlicher Funktionen angegeben.

A. RANKIN: Difference sets.

Eine Menge von k verschiedenen Resten $d_1, \dots, d_k \pmod r$ heißt (r, k, w) -Differenzmenge, wenn für jedes $d \not\equiv 0 \pmod r$ die Kongruenz $d_i - d_j \equiv d \pmod r$ genau w Lösungen hat. Es werden notwendige Kriterien für Differenzmengen hergeleitet, die in 8 von M.Hall's 12 ungelösten Fällen (Proc.AMS 7 (1956)) eine Entscheidung gestatten.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot n \left\{ k \leq n; \langle y_k \rangle \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right\} = a$ ist $0 < a < 1$ ist.

Dann gilt: Ist $\{a_k\}$ eine Folge mit der Eigenschaft $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0$.
 $\{a_k \cdot x\}$ "gleichverteilend".

D. J. LEWIS: Die partielle Summation der Additionstypen.

Sei $N(P)$ die Lösungsmenge der Diophantischen Gleichung $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, wobei P ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Die Anzahl der Lösungen $N(P, x)$ für $x \leq x$ ist $O(x^{\lambda})$ für ein $\lambda < 1$.
Für $a > 0$ gilt eine asymptotische Formel für die Anzahl der Lösungen $N(P, x)$ für $x \leq x$ mit $x \equiv a \pmod{1}$.
Die Verteilung der Lösungen $N(P, x)$ für $x \leq x$ ist $O(x^{\lambda})$ für ein $\lambda < 1$.
Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(P, x)}{x^{\lambda}} = c$ für ein $c > 0$.

J. H. VAN LINT: Über die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in Primfaktoren.

Sei $f(n, m)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in Primfaktoren x, y, z mit $x \leq x$ und $y \leq y$.
Es gilt $f(n, m) = O(x^{\lambda})$ für ein $\lambda < 1$.
Für $a > 0$ gilt eine asymptotische Formel für die Anzahl der Lösungen $f(n, m)$ für $x \leq x$ mit $x \equiv a \pmod{1}$.
Die Verteilung der Lösungen $f(n, m)$ für $x \leq x$ ist $O(x^{\lambda})$ für ein $\lambda < 1$.
Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(n, m)}{x^{\lambda}} = c$ für ein $c > 0$.

H. PUNNICK: Eigenschaften der Abschätzung von $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$.

Sei A, B Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, $A+B$ ihre Summe.
Die Funktion $\psi(x, A+B)$ ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x = a+b$ mit $a \in A, b \in B$.
Es gilt $\psi(x, A+B) = O(x^{\lambda})$ für ein $\lambda < 1$.
Für $a > 0$ gilt eine asymptotische Formel für die Anzahl der Lösungen $\psi(x, A+B)$ für $x \leq x$ mit $x \equiv a \pmod{1}$.
Die Verteilung der Lösungen $\psi(x, A+B)$ für $x \leq x$ ist $O(x^{\lambda})$ für ein $\lambda < 1$.
Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x, A+B)}{x^{\lambda}} = c$ für ein $c > 0$.

A. RANKIN: Difference sets.

Sei M eine Menge von k verschiedenen Resten $0, 1, \dots, q-1$ mod q .
Die Funktion $D(M, w)$ ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x = a+b$ mit $a, b \in M$.
Es gilt $D(M, w) = O(w^{\lambda})$ für ein $\lambda < 1$.
Für $a > 0$ gilt eine asymptotische Formel für die Anzahl der Lösungen $D(M, w)$ für $w \leq w$ mit $w \equiv a \pmod{1}$.
Die Verteilung der Lösungen $D(M, w)$ für $w \leq w$ ist $O(w^{\lambda})$ für ein $\lambda < 1$.
Es gilt $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{D(M, w)}{w^{\lambda}} = c$ für ein $c > 0$.



G.J. RIEGER: Verbundene additive Darstellungen von Zahlenpaaren
(einige Sätze vom Schnirelmannschen und Romanovschem Typ)
Mit Hilfe der Siebmethode werden Sätze vom folgenden Typ bewiesen: Die Anzahl der Zahlenpaare (m,n) , so daß $m \leq x$, $n \leq x$ und $m = p_1 + p_2$, $n = p_1 + p_3$ (p_i Primzahlen) gilt, ist größer als $C \cdot x^2$ mit $C > 0$.

W. SCHMIDT: Zur Normalität bezüglich Matrizen.

Seien R, S (m,m) -Matrizen mit ganzen Elementen. Der Vektor u heißt normal bezüglich R , wenn die Folge $\{R^n u\}$ gleichverteilt mod 1 ist. Es werden Bedingungen für die Matrizen R, S angegeben, die dafür hinreichend sind, daß jedes bezüglich R normale u auch normal bezüglich S ist.

Th. SCHNEIDER: Anwendung diophantischer Approximationen auf diophantische Gleichungen.

Der Satz von Roth-Ridout über die Approximation algebraischer Zahlen durch rationale Zahlen $\frac{P}{Q}$ wird verschärft für den Fall, daß P und Q gewissen arithmetischen Bedingungen genügen. Als Anwendung ergeben sich weitgehende Verallgemeinerungen folgenden Satzes von Gelfond: Die diophantische Gleichung $a^x + b^y = c^z$ hat (von Trivialfällen abgesehen) nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y, z .

W. SCHWARZ: Bemerkung zu einem Satz von Erdős-Szekeres.

Bezeichnet a_n die Anzahl der abelschen Gruppen der Ordnung n , so wird das Fehlerglied $A^*(x) = \left(\sum_{n \leq x} a_n - \text{Hauptglieder} \right)$ nach oben abgeschätzt; weiter wird unter Annahme der Riemannschen Vermutung gezeigt, daß die Abschätzung $A^*(x) = O(x^{1/6 - \epsilon})$ für jedes $\epsilon > 0$ falsch ist.

E. WIRSING: Das Restglied beim Beweis des Primzahlsatzes nach Selberg.

Aus einer Formel vom Typ der Selberg'schen

$$\left(\rho(y) = \frac{1}{y} \int_0^y \rho(y-u) d\rho(u) + O\left(\frac{1}{y}\right) \text{ mit } \rho(y) = \sum_{n \leq \exp(y)} \frac{1 - \Lambda(n)}{n} - 2\epsilon \right)$$

wird der Primzahlsatz mit einem Restglied gewonnen. Indem Selbergformel und Primzahlsatz durch Iteration wechselweise verschärft werden, erhält man $\pi(x) = \text{li } x + O(x \log^{-a} x)$ mit beliebigem a .

G.J. RIEGER: Verbundene additive Erzeugnisse von Zahlengittern
 (einige Sätze von Scharfstein und Hecke)
 Mit Hilfe der Störmethode werden Sätze von folgendem Typ bewiesen:
 Die Anzahl der Zahlengitterpunkte (m, n) , so dass $n \leq x$ und
 $m = p_1 + p_2, n = p_1 + p_2$ (p_1, p_2 Primzahlen) gilt, ist größer als
 $C \cdot x^2$ mit $C > 0$.

W. SCHMIDT: Zur Normalität reeller Matrizen
 Seien R, S (m, n) -Matrizen mit ganzzahligen Elementen. Der Rest n heißt
 normal bezüglich R , wenn die Folge $\{R^k\}$ gleichverteilt mod 1
 ist. Es werden Bedingungen für die Matrix R angegeben, die
 dafür hinreichend sind, dass jedes bezüglich R normale n -tupel nor-
 mal bezüglich S ist.

Th. SCHNEIDER: Anwendung der Approximationstheorie auf die
 diophantischen Gleichungen

Der Satz von Roth-Rothow über die Approximation algebraischer
 Zahlen durch rationale Zahlen wird verallgemeinert. Man zeigt,
 dass P und Q gewisse arithmetische Bedingungen genügen, dann
 werden ergeben. Die diophantischen Gleichungen $F(x, y) = 0$
 (von Trivialitäten abgesehen) nur endlich viele Lösungen in
 den Zahlen x, y .

W. SCHWARTZ: Bemerkung zu einem Satz von Erdős-Szekeres
 Bezeichnet n die Anzahl der abelschen Gruppen der Ordnung n , so
 wird das Polynom $A(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \log A(x)$ - Hauptglied
 oben abgeschätzt. Unter Annahme der Riemannschen Ver-
 mutung ergibt sich die Abschätzung $A(x) = O(x^{1/2})$.

E. WIRSING: Das Verhalten beim Beweis des Primzahlgesetzes nach
 Selberg

Aus einer Formel vom Typ der Selbergschen

$$P(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \log P(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
 wird der Primzahlgesetz mit einem Restglied gewonnen. In dem Sel-
 bergformel und Primzahlgesetz durch Ersetzung $\log x$ durch $\log x + O(x^{-1/2})$ mit der
 schließt werden, erhält man $\log x = O(x^{-1/2})$ mit der
 liebigen ϵ .



A. WOLF: Über universelle und fast-universelle Polygonalzahlenformen.

Es werden Formen der Gestalt $f = a g(x) + b g(y) + c g(z)$,
 $g(u) = \frac{1}{2} (3u^2 - u)$, mit natürlichen Zahlen a, b, c als Koeffizienten
und ähnliche Formen betrachtet. Eine Form heißt fast-universell,
wenn jede natürliche Zahl bis auf endlich viele Ausnahmewerte sich
durch diese Form darstellen läßt. Es wird untersucht, wieviele
fast-universelle Formen mit 2 oder 3 Ausnahmewerten existieren.

(ingen) eine Arbeitsgemeinschaft über "Fastperiodische Funktionen"
statt. Teilnehmer waren:

W. Schwarz und J. Spilker
(Freiburg i. Br.)

Mailand: L. AMERIO, G. PROUSE, M. RIOCI, S. ZAJDMAN

Kairo: R. DOSS

Wien: P. FLOR Mainz: G. HELMBERG

Göttingen: H.D. DOMBROWSKI, H. GÜNZLER, K. HORNEFFER, W. MAAK

Es wurden die nachfolgend referierten Vorträge gehalten.

P. FLOR: "Fastperiodische" Folgen mit endlichem Wertebereich.

Untersucht werden Struktureigenschaften folgender Klassen von
Folgen mit endlichem Wertesystem: die rekurrenten Folgen von Morse
und Hedlund (Bezeichnung R), die fastperiodischen Folgen von
Morse und Hedlund (MH), die Folgen, deren Konstantzmengen fast-
periodische Mengen im Sinne Knesers sind (K), weiter f.p. Folgen
im Birkhoffschen Sinn (B): $\{\alpha\}_n$ sei eine Bohr-f.p. Folge,
 $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k$ Zahlen, die unter den α_n nicht vorkommen,
 c_0, \dots, c_k seien irgendwelche Objekte. Dann sei $a_n = c_0$ (für $\alpha_n < \beta_1$),
 $a_n = c_t$ (für $\beta_t < \alpha_n < \beta_{t+1}$), $a_n = c_k$ (für $\beta_k < \alpha_n$). Für alle vier
Klassen spielt die Natur der Werte keine Rolle. Die Klassen um-
fassen die periodischen Folgen und sind gegenüber periodischer
Auswahl von Teilfolgen abgeschlossen. Die Produktbildung, die den
Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ die Folge $\{(a_n, b_n)\}$ zuordnet, ist innerhalb
der Klassen B, MH und K stets ausführbar. Zwischen den Klassen
bestehen die Inklusionen $K \supset B$ und $MH \supset K$, ob $MH \supset B$ gilt, ist
nicht bekannt. Weitere Inklusionen bestehen nicht.

G. HELMBERG: Ein Zusammenhang zwischen Fourierreihen und Verteilungen fastperiodischer Funktionen.

Es sei $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i \alpha_k x}$ eine f.p. Funktion, $\{B_j; 1 \leq j\}$ eine

Basis für den von den Fourierreihen $\alpha_j (j=1, 2, \dots)$ aufge-
spannten Modul über dem rationalen Zahlkörper \mathbb{Q} und

A. WOLFF: Über universelle und fast-universelle \mathbb{Z} -Moduln

Es werden Formen der Gestalt $f = a_0(x) + a_1(y) + a_2(z) + a_3(w) + a_4(v)$,
 $f(w) = \frac{1}{2}(2x^2 - y^2)$, mit natürlichen Zahlen a_i , $a_i \geq 0$ die Koeffizienten
 und ähnliche Formen betrachtet. Eine Form heißt fast-universell,
 wenn jede natürliche Zahl bis auf endlich viele Ausnahmewerte sich
 durch diese Form darstellen läßt. Es wird untersucht, wieviele
 fast-universelle Formen mit 2 oder 3 Ausnahmewerten existieren.

W. Schwarz und G. Seltzer
 (Freiburg i. Br.)