Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht (5)

Z a h l e n t h e o r i e

(insbesondere additive Zahlentheorie, Diophantische Approximationen, Modulfunktionen)

1. bis 5. April 1963

In der Woche vom 1. bis 5. April 1963 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Tagung über Zahlentheorie unter der Leitung der Herren Professor Dr. H. KLINGEN und Professor Dr. Th. SCHNEIDER (beide Freiburg) statt. Obwohl einige Gäste abgesagt hatten, war die Tagung mit 38 Teilnehmern - darunter 14 aus dem Ausland - sehr gut besucht.

Die Vortragsthemen waren aus folgenden Gebieten: additive Zahlentheorie, analytische Zahlentheorie, Geometrie der Zahlen, diophantische Approximationen, Modulfunktionen. Aus den Vorträgen ergab sich ein guter Überblick über den heutigen Stand und die aktuellen Probleme der Zahlentheorie. Die Vorträge, die zahlreichen Diskussionsbemerkungen und persönliche mathematische Gespräche waren für alle Teilnehmer sehr anregend.

Nicht zuletzt förderte die freundliche Atmosphäre des Hauses und eine gemeinsame Wanderung bis zur Schneegrenze die persönlichen Kontakte.

Folgende Damen und Herren nahmen an der Tagung teil:

England: BIRCH, B.J., Cambridge; DAVENPORT, H., Cambridge; RANKIN, A., Glasgow

Frankreich: LUTZ, E., Grenoble;

Italien: BOMBIERI, E., Mailand

Niederlande: LEKKERKERKER, C.G., Amsterdam, van LINT, J.H., Eindhoven

Österreich: AIGNER, A., Graz; FLOR, P., Wien; PHILIPP, W., Wien; SCHMIDT, W., Wien

Ungarn: ERDÖS, P., Budapest

USA: LeVEQUE, W.J., Ann Arbor; LEWIS, D.J., Ann Arbor

Deutschland: CHRISTIAN, U., Göttingen; GOTTSCHLING, E., Berlin; GUNDLACH, K.B., Münster; HANEKE, W., Marburg; HELLING, H., Münster; HERRMANN, O., Heidelberg; HIRSCHELMANN, A., Gießen; HOFMEISTER, G., Berlin; HOHEISEL, G., Köln; KANOLD, H.J., Braunschweig; KLINGEN, H., Freiburg; KÖRNER, O., Marburg; LEUTBECHER, A., Münster; MÜLLER, M., Tübingen; PLÜNNECKE, H., Bonn; PUMPLÜN, D., Hamm; RIEGER, G.J., Ottobrunn; ROELCKE, W., Münster; SCHNEIDER, Th., Freiburg;

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht (5)

Z a h l e n t h e o r i e

(insbesondere additive Zahlentheorie, Diophantische Approximationen, Modulfunktionen)

1. bis 5. April 1963

In der Woche vom 1. bis 5. April 1963 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Tagung über Zahlentheorie unter der Leitung der Herren Professor Dr. H. KLINGEN und Professor Dr. Th. SCHNEIDER (beide Freiburg) statt. Obwohl einige Gäste abgesagt hatten, war die Tagung mit 38 Teilnehmern - darunter 14 aus dem Ausland - sehr gut besucht.

Die Vortragsthemen waren aus folgenden Gebieten: additive Zahlentheorie, analytische Zahlentheorie, Geometrie der Zahlen, diophantische Approximationen, Modulfunktionen. Aus den Vorträgen ergab sich ein guter Überblick über den heutigen Stand und die aktuellen Probleme der Zahlentheorie. Die Vorträge, die zahlreichen Diskussionsbemerkungen und persönliche mathematische Gespräche waren für alle Teilnehmer sehr anregend.

Nicht zuletzt förderte die freundliche Atmosphäre des Hauses und eine gemeinsame Wanderung bis zur Schneegrenze die persönlichen Kontakte.

Folgende Damen und Herren nahmen an der Tagung teil:

England: BIRCH, B.J., Cambridge; DAVENPORT, H., Cambridge; RANKIN, A., Glasgow

Frankreich: LUTZ, E., Grenoble;

Italien: BOMBIERI, E., Mailand

Niederlande: LEKKERKERKER, C.G., Amsterdam, van LINT, J.H., Eindhoven

Österreich: AIGNER, A., Graz; FLOR, P., Wien; PHILIPP, W., Wien SCHMIDT, W., Wien

Ungarn: ERDÖS, P., Budapest

USA: LeVEQUE, W.J., Ann Arbor; LEWIS, D.J., Ann Arbor

Deutschland: CHRISTIAN, U., Göttingen; GOTTSCHLING, E., Berlin; GUNDLACH, K.B., Münster; HANEKE, W., Marburg; HELLING, H., Münster; HERRMANN, O., Heidelberg; HIRSCHELMANN, A., Gießen; HOFMEISTER, G., Berlin; HOHEISEL, G., Köln; KANOLD, H.J., Braunschweig; KLINGEN, H., Freiburg; KÖHNER, O., Marburg; LAUTERCHER, A., Münster; MÜLLER, M., Tübingen; PLÜNNECKE, H., Bonn; RÜMPLEIN, D., Hamm; RIEGER, G.J., Ottobrunn; ROELCKE, W., Münster; SCHNEIDER, Th., Freiburg;

SCHWARZ, W., Freiburg; SPILKER, J., Freiburg; STÖHR, A., Berlin; WIRSING, E., Marburg; WOLF, A., Tübingen.

Die Tagung begann mit den Vorträgen über Modulfunktionen. Zwar sind die Modulfunktionen im Zusammenhang mit zahlentheoretischen Problemen entdeckt worden, doch zeigte sich, daß sie sich heute zu einer weitgehend selbständigen Theorie entwickelt haben. Im einzelnen wurden folgende Vorträge gehalten:

U. CHRISTIAN: Zur Theorie der Hilbert-Siegelschen Modulgruppen.
Der Quotientenraum der verallgemeinerten oberen Halbebene nach einer Kongruenzgruppe zur Hilbert-Siegelschen Modulgruppe wird im Satakeschen Sinne kompaktifiziert. Der kompakte Raum enthält im Fall des nicht-rationalen Zahlkörpers stets nicht uniformisierbare Punkte. Im rationalen Fall ergeben sich für Hauptkongruenzuntergruppen (mit einer Ausnahme) ebenfalls nicht-uniformisierbare Punkte.

O. HERRMANN: Eine neue Klasse von Gitterpunktproblemen im hyperbolischen Raum.
Die Resultate einer Arbeit über die Verteilung der Längen geodätischer Lote im hyperbolischen Raum werden verallgemeinert, indem noch eine Winkelbedingung hinzugefügt wird. Die Methoden und Ergebnisse sind im wesentlichen dieselben wie in der zitierten Arbeit.

A. LEUTBECHER: Zusammenhang zwischen den Werten von L-Reihen quadratischer Zahlkörper im Punkt s=1 mit Modulformen.
Bei der Summation eigentlicher L-reihen zu geraden Kongruenzidealklassencharakteren χ in quadratischen Zahlkörpern treten Strahlklasseninvarianten auf, die sich als Funktionale einer Modulform erweisen. Analog zum absolut-abelschen Fall (Hasse) läßt sich daraus eine Reduktionsformel für Vielfache des Führers von χ gewinnen. Ein Satz über Multiplikatorsysteme von Modulformen ergibt eine Teilbarkeitseigenschaft für die Klassenzahlen eines reell-quadratischen Zahlkörpers und eines quadratischen, nicht absolut abelschen Erweiterungskörpers.

H. KLINGEN: Zusammenhänge zwischen verschiedenen Modulfunktionen.
Am Beispiel der Siegelschen und Hermiteschen Modulfunktionen wird gezeigt, wie sich verschiedene Klassen von Modulfunktionen gemeinsam behandeln lassen. Man kann die Siegelsche Halbebene kanonisch in die Hermitesche einbetten. Es wird gezeigt, daß man den vollen Körper der Siegelschen Modulfunktionen als natürliche Projektion des Ringes derjenigen Hermiteschen Modulfunktionen erhält, die nicht identisch singulär auf der Siegelschen Untermannigfaltigkeit sind. Auf diese Weise subsumieren sich die Siegelschen unter die Hermiteschen Modulfunktionen.

K.B. GUNDLACH: Identitäten zwischen Modulformenzur Hilbertschen Modulgruppe.
Die Hilbertsche Modulgruppe Γ eines reell-quadratischen Zahlkörpers hat als Invarianzgebiet das Produkt zweier Exemplare der gewöhnlichen oberen Halbebene. Durch Hinzufügung der Variabelnvertauschung zu Γ erhält man die symmetrische Gruppe $\hat{\Gamma}$. Man erhält Relationen zwischen den Modulformen zu Γ und $\hat{\Gamma}$, wenn man durch geeignete Koppelung der beiden Veränderlichen zu Modulfunktionen einer Veränderlichen hinabsteigt. Ist z.B. $Q(\sqrt{5})$ der zugrundegelegte Zahlkörper, so ist der Körper der Modulfunktionen zu Γ eine quadratische Erweiterung des Funktionenkörpers zu $\hat{\Gamma}$, und ein primitives Element der Erweiterung läßt sich angeben.

W. ROELCKE: Zur Eigenwerttheorie der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene.
Der betrachtete Formentypus besteht aus den in der oberen Halbebene reell-analytischen Formen, die durch gewisse Transformationseigenschaften unter einer Grenzkreisgruppe 1. Art, durch Wachstumseigenschaften in den parabolischen Spitzen des Fundamentalbereichs und eine formal selbstadjungierte partielle Eigenwertdifferentialgleichung 2. Ordnung definiert sind. Das Eigenwertproblem wird in dem durch die übliche Metrisierung nahegelegten Hilbertraum nach spektraltheoretischen Gesichtspunkten untersucht. Insbesondere wird die Frage nach der Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen zum Punktspektrum und zum kontinuierlichen Spektrum positiv beantwortet.

Der zweite, umfangreichere Teil der Tagung behandelte zahlentheoretische Probleme; im einzelnen wurden folgende Vorträge gehalten:

B.J. BIRCH: Waring's problem in algebraic number-fields.
Sei K ein algebraischer Zahlkörper, $K_{\mathfrak{p}}$ eine $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung. Es wird gezeigt, daß jedes Element aus $K_{\mathfrak{p}}$, das sich als Summe k-ter Potenzen $\mathfrak{p}$-adisch ganzer Zahlen aus K darstellen läßt, schon eine Summe von höchstens G(k) k-ten Potenzen $\mathfrak{p}$-adisch ganzer Zahlen aus K ist. G(k) ist dabei eine nur von k abhängige Zahl. Es folgt, daß jede Zahl aus K, die überhaupt Summe von k-ten Potenzen ist, schon eine Summe von höchstens G*(k) k-ten Potenzen ist.

E. BOMBIERI: A new principle in the Geometry of Numbers and its applications to Diophantine approximation.
Mit einer Verfeinerung der Siegelschen analytischen Methode in der Geometrie der Zahlen werden Gitterpunktprobleme in Sternkörpern angegriffen. Als Anwendung erhält man unter anderem eine Verschärfung des Kroneckerschen Satzes über inhomogene diophantische Approximationen.

H. DAVENPORT: Diophantine equations in many variables.
Es wird ausführlich über Arbeiten von Birch, Lewis und Davenport berichtet, in denen mit analytischen Mitteln (Hardy-Littlewoodsche Methode) Bedingungen für die Lösbarkeit allgemeiner homogener diophantischer Gleichungen in genügend vielen Veränderlichen gegeben werden. Speziell zeigte der Vortragende, daß eine homogene kubische diophantische Gleichung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ in $n \geq 16$ Veränderlichen lösbar ist.

P. ERDÖS: Addition von Restklassen mod p.
Seien $e_1, \dots, e_k$ auf die Werte 0 oder 1 beschränkt. Sind $a_1, \dots, a_k$ verschiedene Restklassen mod p (p Primzahl), so ist, falls $k > 20\sqrt{p}$ ist, die Kongruenz (§) $e_1 a_1 + \dots + e_k a_k \equiv u \mod p$ für jedes u lösbar. Gilt für $p \longrightarrow \infty$ die Beziehung $k \cdot p^{-2/3} \longrightarrow \infty$, dann ist die Lösungszahl von (§) asymptotisch gleich $2^k \cdot p^{-1}$. Es wird noch eine Reihe von Vermutungen angegeben.

W. HANEKE: Verschärfung der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$.
Die Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ wird auf die Abschätzung von zweidimensionalen Exponentialsummen zurückgeführt. Durch geschickte Behandlung dieser Exponentialsummen wird die Min'sche Abschätzung

Der zweite, umfangreichere Teil der Tagung behandelte zahlentheoretische Probleme; im einzelnen wurden folgende Vorträge gehalten:

B.J. BIRCH: Waring's problem in algebraic number-fields.
Sei K ein algebraischer Zahlkörper, $K_{\mathfrak{p}}$ eine $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung. Es wird gezeigt, daß jedes Element aus $K_{\mathfrak{p}}$, das sich als Summe k-ter Potenzen $\mathfrak{p}$-adisch ganzer Zahlen aus K darstellen läßt, schon eine Summe von höchstens G(k) k-ten Potenzen $\mathfrak{p}$-adisch ganzer Zahlen aus K ist. G(k) ist dabei eine nur von k abhängige Zahl. Es folgt, daß jede Zahl aus K, die überhaupt Summe von k-ten Potenzen ist, schon eine Summe von höchstens G*(k) k-ten Potenzen ist.

E. BOMBIERI: A new principle in the Geometry of Numbers and its applications to Diophantine approximation.
Mit einer Verfeinerung der Siegelschen analytischen Methode in der Geometrie der Zahlen werden Gitterpunktprobleme in Sternkörpern angegriffen. Als Anwendung erhält man unter anderem eine Verschärfung des Kroneckerschen Satzes über inhomogene diophantische Approximationen.

H. DAVENPORT: Diophantine equations in many variables.
Es wird ausführlich über Arbeiten von Birch, Lewis und Davenport berichtet, in denen mit analytischen Mitteln (Hardy-Littlewoodsche Methode) Bedingungen für die Lösbarkeit allgemeiner homogener diophantischer Gleichungen in genügend vielen Veränderlichen gegeben werden. Speziell zeigte der Vortragende, daß eine homogene kubische diophantische Gleichung $f(x_1,\dots,x_n) = 0$ in $n \geq 16$ Veränderlichen lösbar ist.

P. ERDÖS: Addition von Restklassen mod p.
Seien $e_1,\dots,e_k$ auf die Werte 0 oder 1 beschränkt. Sind $a_1,\dots,a_k$ verschiedene Restklassen mod p (p Primzahl), so ist, falls $k > 2e\sqrt{p}$ ist, die Kongruenz $(\S)\ \ e_1a_1 + \dots + e_ka_k \equiv u \mod p$ für jedes u lösbar. Gilt für $p \longrightarrow \infty$ die Beziehung $k \cdot p^{-2/3} \longrightarrow \infty$, dann ist die Lösungszahl von (§) asymptotisch gleich $2^k \cdot p^{-1}$. Es wird noch eine Reihe von Vermutungen angegeben.

W. HANEKE: Verschärfung der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$.
Die Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ wird auf die Abschätzung von zweidimensionalen Exponentialsummen zurückgeführt. Durch geschickte Behandlung dieser Exponentialsummen wird die Min'sche Abschätzung

$\zeta(\frac{1}{2} + it) = O(t^{\frac{15}{92}+\varepsilon})$ zu $O(t^{\frac{6}{37}} \log t)$ verbessert.

G. HOFMEISTER: Über eine Teilmenge von Abschnittsbasen.
Der Rohrbach-Stöhrsche Reichweitenbegriff $n_h(k)$ (Ostmann, Additive Zahlentheorie) läßt sich enger fassen; die neue Reichweite $g_h(k)$ läßt sich gut nach unten und oben abschätzen; damit wird zugleich die beste bisher bekannte untere Abschätzung für die Reichweite $n_h(k)$ verbessert.

H.J. KANOLD: Elementare Betrachtungen zur Primzahltheorie.
Sei $0 < a \leq d$, $(a,d) = 1$. Es werden Ergebnisse (und Vermutungen) über die in der Folge $a+d, a+2d, \ldots, a+(d-1)d$ enthaltenen Primzahlen angegeben; z.B. gibt es für $d \geq \exp(1000)$ mindestens zwei aufeinanderfolgende Zahlen, von denen jede einen Primteiler $> d$ enthält.

O. KÖRNER: Über das Goldbach-Waringsche Problem in algebraischen Zahlkörpern.
Für die Anzahl $A_s(v)$ der Darstellungen einer ganzen Zahl v eines algebraischen Zahlkörpers K als Summe von s k-ten Potenzen totalpositiver Primzahlen aus K wird eine asymptotische Formel

$$\left(A_s(v) \sim \mathfrak{T}_s(v) \cdot J \cdot (N(v))^{\frac{s}{k}-1} \log^{-s} N(v)\right)$$

hergeleitet und die auftretende Singuläre Reihe $\mathfrak{T}_s(v)$ auf Positivität untersucht.

C.G. LEKKERKERKER: Homogene simultane Approximationen.
Seien x bzw. y Vektoren des r-dim. bzw. s-dimensionalen Raumes, $\varphi(x)$ bzw. $\psi(y)$ Distanzfunktionen beschränkter Sternkörper. Für die kritische Determinante $\Delta(K)$ des Sternkörpers

$$K = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \varphi^r(x) \quad \psi^s(y) \leq 1 \right\} \text{ gilt:}$$

$$\Delta^{-1}(K) = \sup_H \left(\liminf_{\psi(v)\to\infty} \varphi^r(H\,v - u) \quad \psi^s(v)\right),$$

wobei H alle reellen (r,s)-Matrizen durchläuft und u und v Vektoren mit ganzen Koordinaten sind.

W.J. Le VEQUE: Ein Satz über Gleichverteilung.
Sei $Z = \{z_n\}$ eine monoton nach ∞ strebende Folge reeller Zahlen, so daß $z_n - z_{n-1}$ monoton gegen Null strebt. Ist $z_{n-1} \leq u < z_n$, so setze man $\langle u \rangle_Z = \frac{u - z_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}$; die Folge y_k heißt "gleichverteilt mod Z", wenn

$\zeta(\frac{1}{2} + it) = O(t^{\frac{15}{92}+\varepsilon})$ zu $O(t^{\frac{6}{37}} \log t)$ verbessert.

O. HOFMEISTER: Über eine Teilmenge von Abschnittsbasen.
Der Rohrbach-Stöhrsche Reichweitenbegriff $n_h(k)$ (Ostmann, Additive Zahlentheorie) läßt sich enger fassen; die neue Reichweite $g_h(k)$ läßt sich gut nach unten und oben abschätzen; damit wird zugleich die beste bisher bekannte untere Abschätzung für die Reichweite $n_h(k)$ verbessert.

H.J. KANOLD: Elementare Betrachtungen zur Primzahltheorie.
Sei $0 < a \leq d$, $(a,d) = 1$. Es werden Ergebnisse (und Vermutungen) über die in der Folge $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(d-1)d$ enthaltenen Primzahlen angegeben; z.B. gibt es für $d \geq \exp(\exp 2)$ mindestens zwei aufeinanderfolgende Zahlen, von denen jede einen Primteiler $> d$ enthält.

O. KÖRNER: Über das Goldbach-Waringsche Problem in algebraischen Zahlkörpern.
Für die Anzahl $A_s(\nu)$ der Darstellungen einer ganzen Zahl ν eines algebraischen Zahlkörpers K als Summe von s k-ten Potenzen total-positiver Primzahlen aus K wird die asymptotische Formel

$$\left(A_s(\nu) \sim \mathfrak{S}_s(\nu) \cdot \Delta \cdot (N(\nu))^{\frac{s}{k}-1} \cdot \log^{-s} N(\nu) \right)$$

hergeleitet und die auftretende singuläre Reihe $\mathfrak{S}_s(\nu)$ auf Positivität untersucht.

C.G. LEKKERKERKER: Homogene simultane Approximationen.
Seien x bzw. y Vektoren des r-dim. bzw. s-dimensionalen Raumes, $\varphi(x)$ bzw. $\psi(y)$ Distanzfunktionen beschränkter Sternkörper. Für die kritische Determinante $\Delta(K)$ des Sternkörpers

$$K = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \varphi^r(x) \cdot \psi^s(y) \leq 1 \right\} \text{ gilt:}$$

$$\Delta^{-1}(K) = \sup_H \left(\liminf_{\psi(v) \to \infty} \varphi^r(H\,v - u) \cdot \psi^s(v) \right),$$

wobei H alle reellen (r,s)-Matrizen durchläuft und u und v Vektoren mit ganzen Koordinaten sind.

W.J. Le VEQUE: Ein Satz über Gleichverteilung.
Sei $Z = \{z_n\}$ eine monoton nach ∞ strebende Folge reeller Zahlen, so daß $z_n - z_{n-1}$ monoton gegen Null strebt. Ist $z_{n-1} \leq u < z_n$, so setze man $\langle u \rangle_Z = \frac{u - z_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}$; die Folge y_k heißt "gleichverteilt mod Z", wenn

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot N\left\{k \leq n;\ \langle y_k \rangle_Z \leq ß\right\} = ß$ für $0 \leq ß < 1$ ist.

Dann gilt: Ist $\{a_k\}$ eine Zahlenfolge mit der Eigenschaft

$a_{k+1} - a_k \geq \frac{c\, a_k}{k}$, dann ist für fast alle reellen x die Folge $\{a_k\, x\}$ "gleichverteilt mod Z".

D.J. LEWIS: Diophantine equations of additive type.

Sei $N(P)$ die Lösungsanzahl der diophantischen Gleichung
(§) $a_1 x_1^k + \ldots + a_s x_s^k = 0$ mit ganzen Koeffizienten a_i, die nicht alle vom gleichen Vorzeichen sind, unter geeigneten Bedingungen für die x_i. Für $s \geq s_1(k)$ gilt eine asymptotische Formel $N(P) \sim S \cdot P^ß$. Für $s \geq k^2 + 1$ ist die singuläre Reihe positiv. Als Folgerung ergibt sich, daß die Gleichung (§) für $s \geq k^2 + 1$, $k \geq 18$ unendlich viele Lösungen hat.

J.H. van LINT: Über die Anzahl der Zahlen $\leq x$, deren Primfaktoren Teiler von n sind.

Sei $f(n,m)$ die Anzahl der Zahlen $\leq m$, deren Primfaktoren Teiler von n sind. Sei $\alpha(n) = \prod_{p/n} p$. Es wird bewiesen,

daß $\sum_{n \leq x} f(n,x) \sim \sum_{n \leq x} f(n,n)$ gilt,

indem $\sum_{n \leq x} \frac{n}{\alpha(n)} = o\left(x \cdot \sum_{n \leq x} \frac{1}{\alpha(n)}\right)$ gezeigt wird.

H. PLÜNNECKE: Eigenschaften und Abschätzungen von Wirkungsfunktionen.

Sind A,B Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, A+B ihre Schnirelmannsumme, $\delta(A+B)$ die Dichte von A+B. Die finite Wirkungsfunktion von B ist definiert durch

$$\varphi(\alpha, B) = \operatorname*{fin}_{A,\, \delta(A) \geq \alpha} \delta(A+B).$$

Es werden verschiedene Eigenschaften und Abschätzungen dieser Wirkungsfunktion und ähnlicher Funktionen angegeben.

A. RANKIN: Difference sets.

Eine Menge von k verschiedenen Resten $d_1, \ldots, d_k$ mod r heißt (r,k,w) - Differenzmenge, wenn für jedes $d \not\equiv o$ mod r die Kongruenz $d_i - d_j \equiv d$ mod r genau w Lösungen hat. Es werden notwendige Kriterien für Differenzmengen hergeleitet, die in 8 von M.Hall's 12 ungelösten Fällen (Proc.AMS 7 (1956)) eine Entscheidung gestatten.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot N \left\{ k \leq n: \langle y_k \rangle_\beta \leq \beta \right\} = \beta \quad \text{für} \quad 0 \leq \beta < 1 \quad \text{ist.}$$

Dann gilt: Ist $\{a_k\}$ eine Zahlenfolge mit der Eigenschaft

$a_{k+1} - a_k \geq \frac{c\, a_k}{k \ldots}$, dann ist für fast alle reellen x die Folge $\{a_k x\}$ "gleichverteilt mod 2".

D.J. LEWIS: <u>Diophantine equations of additive type</u>.

Sei N(P) die Lösungsanzahl der diophantischen Gleichung
(§) $a_1 x_1^k + \ldots + a_s x_s^k = 0$ mit ganzen Koeffizienten a_i, die nicht alle vom gleichen Vorzeichen sind, unter geeigneten Bedingungen für die x_i. Für $s \geq s_1(k)$ gilt eine asymptotische Formel $N(P) \sim S\, P^s$. Für $s \geq k^2 + 1$ ist die singuläre Reihe positiv. Als Folgerung ergibt sich, daß die Gleichung (§) für $s \geq k^2 + 1$, $k \geq 18$ unendlich viele Lösungen hat.

J.H. van LINT: <u>Über die Anzahl der Zahlen $\leq m$, deren Primfaktoren Teiler von n sind</u>.

Sei f(n,m) die Anzahl der Zahlen $\leq m$, deren Primfaktoren Teiler von n sind. Sei $\alpha(n) = \prod_{p|n} p$. Es wird bewiesen,

daß $\sum_{n \leq x} f(n,x) \sim \sum_{n \leq x} f(x,n)$ gilt,

indem $\sum_{n \leq x} \frac{n}{\alpha(n)} = o(x \sum_{n \leq x} \frac{1}{\alpha(n)})$ gezeigt wird.

H. PLÜNNECKE: <u>Eigenschaften und Abschätzungen von Wirkungsfunktionen</u>.

Sind A,B Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, A+B ihre Schnittmengensumme, $\delta(A+B)$ die Dichte von A+B. Die finite Wirkungsfunktion von B ist definiert durch

$$\varphi(\alpha, B) = \underset{A,\, \delta A \geq \alpha}{\text{fin}} \delta(A+B).$$

Es werden verschiedene Eigenschaften und Abschätzungen dieser Wirkungsfunktion und ähnlicher Funktionen angegeben.

A. RANKIN: <u>Difference sets</u>.

Eine Menge von k verschiedenen Resten $d_1, \ldots, d_k$ mod r heißt (r,k,w) - Differenzmenge, wenn für jedes $d \not\equiv 0$ mod r die Kongruenz $d_i - d_j \equiv d$ mod r genau w Lösungen hat. Es werden notwendige Kriterien für Differenzmengen hergeleitet, die in 8 von M.Hall's 12 ungelösten Fällen (Proc.AMS 7 (1956)) eine Entscheidung gestatten.

G.J. RIEGER: Verbundene additive Darstellungen von Zahlenpaaren (einige Sätze vom Schnirelmannschen und Romanovschem Typ)

Mit Hilfe der Siebmethode werden Sätze vom folgenden Typ bewiesen: Die Anzahl der Zahlenpaare (m,n), so daß $m \leq x$, $n \leq x$ und $m = p_1 + p_2$, $n = p_1 + p_3$ (p_i Primzahlen) gilt, ist größer als $C \cdot x^2$ mit $C > 0$.

W. SCHMIDT: Zur Normalität bezüglich Matrizen.

Seien R, S (m,m)-Matrizen mit ganzen Elementen. Der Vektor u heißt normal bezüglich R, wenn die Folge $\{R^n u\}$ gleichverteilt mod 1 ist. Es werden Bedingungen für die Matrizen R, S angegeben, die dafür hinreichend sind, daß jedes bezüglich R normale u auch normal bezüglich S ist.

Th. SCHNEIDER: Anwendung diophantischer Approximationen auf diophantische Gleichungen.

Der Satz von Roth-Ridout über die Approximation algebraischer Zahlen durch rationale Zahlen $\frac{P}{Q}$ wird verschärft für den Fall, daß P und Q gewissen arithmetischen Bedingungen genügen. Als Anwendung ergeben sich weitgehende Verallgemeinerungen folgenden Satzes von Gelfond: Die diophantische Gleichung $a^x + b^y = c^z$ hat (von Trivialfällen abgesehen) nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y, z.

W. SCHWARZ: Bemerkung zu einem Satz von Erdös-Szekeres.

Bezeichnet a_n die Anzahl der abelschen Gruppen der Ordnung n, so wird das Fehlerglied $A^*(x) = \left(\sum_{n \leq x} a_n - \text{Hauptglieder} \right)$ nach oben abgeschätzt; weiter wird unter Annahme der Riemannschen Vermutung gezeigt, daß die Abschätzung $A^*(x) = O(x^{1/6 - \varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ falsch ist.

E. WIRSING: Das Restglied beim Beweis des Primzahlsatzes nach Selberg.

Aus einer Formel vom Typ der Selberg'schen

$$\left(\rho(y) = \frac{1}{y} \int_{0-}^{y} \rho(y-u)\, d\rho(u) + O\left(\frac{1}{y}\right) \text{ mit } \rho(y) = \sum_{n \leq \exp(y)} \frac{1-\Lambda(n)}{n} - 2C \right)$$

wird der Primzahlsatz mit einem Restglied gewonnen. Indem Selbergformel und Primzahlsatz durch Iteration wechselweise verschärft werden, erhält man $\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O(x \log^{-a} x)$ mit beliebigem a.

G.J. RIEGER: Verbundene additive Darstellungen von Zahlenpaaren (einige Sätze vom Schnirelmannschen und Romanovschen Typ)

Mit Hilfe der Siebmethode werden Sätze vom folgenden Typ bewiesen: Die Anzahl der Zahlenpaare (m,n), so daß $m \leq x$, $n \leq x$ und $m = p_1 + p_2$; $n = p_1 + p_3$ (p_i Primzahlen) gilt, ist grösser als $C \cdot x^2$ mit $C > 0$.

W. SCHMIDT: Zur Normalität bezüglich Matrizen.

Seien R,S (m,m)-Matrizen mit ganzen Elementen. Der Vektor u heißt normal bezüglich R, wenn die Folge $\{R^n u\}$ gleichverteilt mod 1 ist. Es werden Bedingungen für die Matrizen R,S angegeben, die dafür hinreichend sind, daß jedes bezüglich R normale u auch normal bezüglich S ist.

Th. SCHNEIDER: Anwendung einer verschärften Approximationen auf diophantische Gleichungen.

Der Satz von Roth-Ridout über die Approximation algebraischer Zahlen durch rationale Zahlen $\frac{P}{Q}$ wird verschärft für den Fall, daß P und Q gewissen arithmetischen Bedingungen genügen. Als Anwendung ergeben sich weitgehende Verallgemeinerungen folgenden Satzes von Gelfond: Die diophantische Gleichung $a^x + b^y = c^z$ hat (von Trivialfällen abgesehen) nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x,y,z.

W. SCHWARZ: Bemerkung zu einem Satz von Erdös-Szekeres.

Bezeichnet a_n die Anzahl der abelschen Gruppen der Ordnung n, so wird das Fehlerglied $A^*(x) = \left(\sum_{n \leq x} a_n - \text{Hauptglieder} \right)$ nach oben abgeschätzt; weiter wird unter Annahme der Riemannschen Vermutung gezeigt, daß die Abschätzung $A^*(x) = O(x^{1/6 - \varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ falsch ist.

E. WIRSING: Das Restglied beim Beweis des Primzahlsatzes nach Selberg.

Aus einer Formel vom Typ der Selbergschen

$$\left(\rho(y) = \frac{1}{y} \int_{0+}^{y} \rho(y-u)\, d\varphi(u) + O\left(\frac{1}{y}\right) \text{ mit } \varphi(y) = \sum_{n \leq \exp(y)} \frac{1-\Lambda(n)}{n} - 2C \right)$$

wird der Primzahlsatz mit einem Restglied gewonnen, indem Selbergformel und Primzahlsatz durch Iteration wechselweise verschärft werden, erhält man $\pi(x) = \text{li}\, x + O(x \log^{-a} x)$ mit beliebigem a.

A. WOLF: Über universelle und fast-universelle Polygonalzahlformen.
Es werden Formen der Gestalt $f = a\ g(x) + b\ g(y) + c\ g(z)$, $g(u) = \frac{1}{2}\ (3u^2-u)$, mit natürlochen Zahlen a,b,c als Koeffizienten und ähnliche Formen betrachtet. Eine Form heißt fast-universell, wenn jede natürliche Zahl bis auf endlich viele Ausnahmewerte sich durch diese Form darstellen läßt. Es wird untersucht, wieviele feast-universelle Formen mit 2 oder 3 Ausnahmewerten existieren.

W. Schwarz und J. Spilker
(Freiburg i. Br.)