Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

(6)

Tagungsbericht

Fastperiodische Funktionen
7. bis 11. April 1963

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand vom 7. bis 11. April 1963 unter der Leitung von Professor Dr. W. MAAK (Göttingen) eine Arbeitsgemeinschaft über "Fastperiodische Funktionen" statt. Teilnehmer waren:

Mailand: L. AMERIO, G. PROUSE, M. RICCI, C. VAGHI, A. VASCONI, S. ZAIDMAN

Kairo: R. DOSS

Wien: P. FLOR   Mainz: G. HELMBERG

Göttingen: H.D. DOMBROWSKI, H. GÜNZLER, K. HORNEFFER, W. MAAK

Es wurden die nachfolgend referierten Vorträge gehalten.

P. FLOR: "Fastperiodische" Folgen mit endlichem Wertebereich.
Untersucht werden Struktureigenschaften folgender Klassen von Folgen mit endlichem Wertsystem: die rekurrenten Folgen von Morse und Hedlund (Bezeichnung R), die fastperiodischen Folgen von Morse und Hedlund (MH), die Folgenden, deren Konstanzmengen fastperiodische Mengen im Sinne Knesers sind (K), weiter f.p. Folgen im Birkhoffschen Sinn (B): $\{\alpha\}_n$ sei eine Bohr-f.p.Folge, $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k$ Zahlen, die unter den α_n nicht vorkommen, $c_o, \dots, c_k$ seien irgendwelche Objekte. Dann sei $a_n = c_o$ (für $\alpha_n < \beta_1$), $a_n = c_t$ (für $\beta_t < \alpha_n < \beta_{t+1}$), $a_n = c_k$ (für $\beta_k < \alpha_n$). Für alle vier Klassen spielt die Natur der Werte keine Rolle. Die Klassen umfassen die periodischen Folgen und sind gegenüber periodischer Auswahl von Teilfolgen abgeschlossen. Die Produktbildung, die den Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ die Folge $\{(a_n, b_n)\}$ zuordnet, ist innerhalb der Klassen B, MH und K stets ausführbar. Zwischen den Klassen bestehen die Inklusionen $R \supset B$ und $MH \supset K$, ob $MH \supset B$ gilt, ist nicht bekannt. Weitere Inklusionen bestehen nicht.

G. HELMBERG: Ein Zusammenhang zwischen Fourierreihen und Werteverteilungen fastperiodischer Funktionen.

Es sei $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\alpha_k x}$ eine f.p. Funktion, $\{\beta_1 : 1 \in L\}$ eine Basis für den von den Fourierexponenten $\alpha_k (k=1,2,\dots)$ aufgespannten Modul über dem rationalen Zahlkörper P und

$\alpha_k = \sum_{l \in L_k} b_{kl} \beta_l$ ($b_{kl} \in P$, $L_k \subset L$, L_k endlich) für k=1,2,...

Ferner seien $\{\beta'_l : l \in L\}$ und $\{\gamma'_l : l \in L\}$ zwei Familien beliebiger reeller Zahlen, sowie $\alpha'_k = \sum_{l \in L_k} b_{kl} \beta'_l$ und $\delta'_k = \sum_{l \in L_k} b_{kl} \gamma'_l$ für k=1,2,... Der von den Funktionen $e^{i\alpha_k x}$ (k=1,2,...) aufgespannte (im Banachraum aller fp. Funktionen) abgeschlossene Modul fpr. Funktionen über dem komplexen Zahlkörper K sei mit M_f bezeichnet. Für ein trigonometrisches Polynom

$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\alpha_k x} \in M_f$ sei $g'(x)$ definiert durch $g'(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\alpha'_k} e^{i\alpha'_k x}$. Für jede gegen f gleichmäßig konvergierende Folge trigonometrischer Polynome $f_n \in M_f$ konvergiert die Folge der trigonometrischen Polynome f'_n gleichmäßig gegen ein und dieselbe f.p. Funktion f' und es gilt $\|f'\| \leq \|f\|$. Sind alle $\beta'_l (l \in L)$ unabhängig über P, dann haben f und f' die gleiche Werteverteilung μ_f. Einer nicht konstanten Funktion f ist damit eine Klasse fpr. Funktionen f' mit gleicher Werteverteilung wie f zugeordnet, die die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Die beliebige Wahl der Zahlen β'_l und γ'_l erlaubt es, mit Hilfe dieser Sätze auch (z.T. von BOHR und BOCHNER stammende) Sätze über Existenz und Konvergenz von Fourierreihen zu beweisen.

L. AMERIO: <u>Linear almost periodic equations in Hilbert spaces.</u>

Let Y and X be two Hilbert spaces, X separable, dense in Y; moreover let the immersion of X in Y be continuous. Consider the linear functional equation

$$(1) \quad \int_J \left\{ (x'(t),h'(t))_Y - a(t,x(t),h(t)) + b(t,x'(t),h(t)) \right\} dt = \int_J (f(t),x(t))_Y \, dt$$

where x(t), h(t), f(t) satisfy, for every compact Δ, the conditions:

$x(t) \in L^2(\Delta,X)$, $x'(t) \in L^2(\Delta,Y)$,

$h(t) \in L^2(\Delta,X)$, $h'(t) \in L^2(\Delta,Y)$, h(t) has a compact support;

$f(t) \in L^2(\Delta,Y)$.

Equation (1) must be satisfied for any test function h(t).

Moreover a(t,u,v), b(t,u,v) are sesqui-linear forms defined on $X \times X$, $Y \times X$, uniformly bounded in any compact Δ.

Let us consider now the Hilbert spaces:
$L_o^2(X) = L^2(\Delta_o, X)$, $\Delta_o = [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$; $L_o^2(Y)$;
W_o: $w = \{ w(\eta);\ \eta \in \Delta_o,\ w(\eta) \in L_o^2(X),\ w'(\eta) \in L_o^2(Y) \}$.
Then x(t) (and h(t)) can be considered as a continuous vector valued function, from $J = (-\infty, \infty)$ to W_o, with the norm:

$$\|x(t)\|_{W_o} = \left\{ \int_{\Delta_o} \|x(t+\eta)\|_X^2 \, d\eta + \int_{\Delta_o} \|x'(t+\eta)\|_Y^2 \, d\eta \right\}^{\frac{1}{2}}$$

In the same way, f(t) can be considered as a continuous function from J to $L_o^2(Y)$.
Under a proper definition of almost periodicity for the forms a(t,u,v), b(t,u,v) and supposing, moreover, that f(t) is $L_o^2(Y)$ - w.a.p. one obtains an extension of FAVARD's theorems (on ordinary differential a.p. equations) by proving the existence, uniqueness and W_o-almost periodicity of a minimal solution.

G. PROUSE: <u>Almost-periodic solutions of the Navier-Stokes equation in 2 dimensions.</u>

Consider the Navier-Stokes system in the unknown functions $x_j(\xi_1, \xi_2, t)$ and $p(\xi_1, \xi_2, t)$

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} x_i \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} - \mu \Delta x_j = - \frac{\partial p}{\partial \xi_j} + \gamma_j \quad (j=1,2); \quad \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_j} = 0.$$

To the system is associated a "weak" system (Ω = open set in the (ξ)-plane):

$$\int_J \Big\{ -(x(t), h'(t))_{L^2(\Omega)} + b(x(t), x(t), h(t)) + \mu (x(t), h(t))_{H_o^1(\Omega)} - (\gamma(t), h(t))_{L^2(\Omega)} \Big\} dt = 0 .$$

If X is a Hilbert space, we put $L_o^2(X) = L^2(-1, o, X)$. The following theorems can be proved.

<u>Th.1</u>: If f(t) is L^2-bounded in J, then there exists at least one weak solution $\tilde{x}(t)$ which is L^2-bounded in J. If f(t) is L^2-a.p. according to Stepanov and the relation

$$\sup_{t \in J} \left[\|\tilde{x}(\eta)\|^{1/2}_{C^o(t-1, t, L^2)} \|\tilde{x}(t)\|^{1/2}_{L^2(H_o^1)} \right] < \Gamma'_{\mu\Omega}$$ holds,

then $\tilde{x}(t)$ is the only L^2-a.p. solution; $\tilde{x}(t)$ is then also H_o'-a.p. according to Stepanov.

<u>Th.2</u>: If f(t) is L^2-a.p. according to Stepanov and $\sup_{t \in J} \|f(t)\|_{L^2} < \Gamma'_{\mu\Omega}$ then there exists one, and only one,

weak solution $\tilde{x}(t)$ which is L^2-a.p. and H_0^1-a.p. according to Stepanov.

M. RICCI: On differential equations with known term almost periodic according to Stepanov.

We extend Favard's second theorem to the equation $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$ where $x(t), f(t) \in X$ (uniformly convex space) and $A(t) \in \mathcal{A} = \mathcal{L}(X,X)$. We assume that $A(t)$ is $\mathcal{A}$-a.p. and $f(t)$ is X-a.p. according to Stepanov (a.p.S.). The following theorem can be proved:

Assume that a) $A(t)$ is $\mathcal{A}$-a.p., f is X-a.p.S.,

b) for every $A^{(e)}(t)$ there exists a constant σ_e such that, for every Eigensolution of the equation $u'(t) = A^{(e)}(t)u(t)$ the relation $\operatorname{Inf}_{t\in J} \|u(t)\| \geq \sigma_e \|u(o)\|$ holds;

c) for every bounded eigensolution $\operatorname{Inf}_{t\in J} \|u(t)\| \geq$ $\geq \sigma_e \sup_{t\in J} \|u(t)\|$;

d) a bounded solution exists.

Then there exists an a.p. solution.

We apply this theorem to the equations $z''(t)=-(I+K(t))z(t)+g(t)$ and $z''(t)=-(I+K)z(t)+g(t)$.

S. ZAIDMAN: Almost periodicity for the Poisson equation.

We consider the Poisson equation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \sum_{1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t) \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$

in the whole (n+1)-dimensional space. It is supposed that $f(x,t)$ is defined for every $t \in J=(-\infty, \infty)$, with values in $L^2_x(R^n)$, and is strongly continuous. Then one prove the following:

Theorem 1: There exists a function $u(x,t)$ belonging to the space H^2 in every "strip" $a \leq t \leq b$, $x \in R^n$, which is a weak solution of the equation (1).

This function $u(x,t)$ will define a strongly continuous one $u(t) = \{u(x,t),\ t \in J\}$, from $t \in J$ to $L^2(R^n)$, possessing also a strongly continuous L^2-derivative.

If $f(x,t)$ is L^2-bounded from $-\infty < t < +\infty$ to $L^2(R^n)$, and if $u(x,t)$ is a L^2-bounded solution of (1), then his first derivatives, $u_t(x,t)$, $u_{x_i}(x,t)$ are also L^2-bounded.

After, we assume that $f(x,t)$ is an L^2-almost-periodic function in the sense of Bochner, and we prove the following main

<u>Theorem 2</u>: Every L^2-bounded solution $u(x,t)$ of the equation (1) with L^2-almost-periodic known term $f(x,t)$, is L^2-almost periodic, and his first weak derivatives have the same property.

K. HORNEFFER: <u>Fastautomorphe Funktionen und Formen</u>.
Der Begriff einer analytischen fastperiodischen Funktion im Sinne H. Bohrs wird auf eigentlich diskontinuierliche Gruppen linearer Transformationen der Zahlenkugel übertragen. Es wird gezeigt, daß nichtkonstante analytische fastperiodische Funktionen nur für Funktionsgruppen existieren. Für solche Gruppen werden fastautomorphe Formen der Dimension $-2k$ (k ganz) und fastautomorphe Funktionen (d.i. $k=o$) definiert. Mit Hilfe einer Art Poincaréscher Θ-Reihen wird zu beliebiger irreduzibler endlichdimensionaler beschränkter Darstellung der Funktionsgruppe ein aus fastautomorphen Funktionen bestehender Darstellungsmodul konstruiert. "Genügend viele" f.a. Funktionen existieren also genau für diejenigen Gruppen, die überhaupt nichtkonstante analytische f.p. Funktionen besitzen.

W. MAAK: <u>Gitterpunktsätze</u>.

Setzt man $\omega_1 = 2\omega = \tau\vartheta^2_{00}(\tau)$, $\quad \omega_2 = 2\omega' = \omega_1\tau$

so ist z.B. $\eta = \zeta(\omega)$, $\quad \eta' = \zeta(\omega')$

$$F(\tau) = \log \sigma_{01}(\omega \mid \omega_1, \omega_2) - \eta\omega$$

und

$$G(\tau) = \log \sigma_{00}(\omega \mid \omega_1, \omega_2) - \eta\omega$$

eindeutige Funktionen von τ. Für $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$, $a \equiv 1(4)$ kann man $F(L_\tau)$ und $G(L_\tau)$ berechnen:

$$F(L_\tau) = F(\tau) + i\varphi(L) \qquad G(L_\tau) = G(\tau) + i\psi(L)$$

Hierbei sind φ und ψ reelle additive Funktionen:

$$\varphi(LM) = \varphi(L) + \varphi(M) \qquad \psi(LM) = \psi(L) + \psi(M).$$

Für die Erzeugenden $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\varphi(A) = -\psi(A) \qquad \varphi(B) = -\psi(B).$$

Deshalb gilt allgemein:

$$\varphi(L) = -\psi(L).$$

So erhält man einen Gitterpunktsatz, wenn man für φ und ψ die expliziten Ausdrücke einsetzt. Ähnlich erhält man weitere Sätze,

welche als Korrolar z.B. das quadratische Reziprozitätsgesetz und dasjenige für Dedekindsummen liefern.
Die Funktionen

$$\exp(F(\tau)) \qquad \exp(G(\tau))$$

sind einfachste nichttriviale Beispiele fastautomorpher Funktionen.

H.D. DOMBROWSKI: Fastautomorphe Funktionen zweiten Grades.
Diejenigen fastautomorphen Funktionen, die in zweidimensionalen Darstellungsmoduln der Modulgruppe liegen, lassen sich mit Hilfe der Riemannschen P-Funktion beschreiben. Während man die mit Poincaréreihen konstruierten Darstellungsmoduln nur über die Darstellungen kennt, kann man aus der P-Funktion wichtige Informationen über die Darstellungen erhalten. Insbesondere kann die Poincaréreihe der P-Funktion angegeben werden.

H. GÜNZLER: Einige Anwendungen der Dualitätssätze.
Ist G eine lokalkompakte abelsche Gruppe, $\hat{G}$ die Dualgruppe, Ω eine beliebige Teilmenge von G, $\{\Omega\}$ die von Ω in $\hat{G}$ erzeugte Untergruppe, so ist die Abschließung von $\{\Omega\}$ in $\hat{G}$, d.h. die Menge aller der Charaktere aus $\hat{G}$, die vermittels solcher aus Ω lokal auf G beliebig genau approximiert werden können, gegeben durch $\Omega_{\perp}^{\perp}$, das sind diejenigen Charaktere $\in \hat{G}$, für die immer dann $\psi(x) = 1$, wenn $\varphi(x) = 1$ für alle $\varphi \in \Omega$. Trennt speziell Ω die Punkte von G, so lassen sich also alle Charaktere von G vermittels Ω approximieren, in diesem Sinn liefert eine treue Darstellung von G schon ganz $\hat{G}$. Die erste der obigen Aussagen liefert für $G = Z^k$ eine Verallgemeinerung des Kroneckerschen Approximationssatzes. Auch andere Approximationssätze lassen sich folgern.

Weiter wird die Faltungsalgebra F(G) der fastperiodischen stetigen komplexwertigen Funktionen f auf einer lokalkompakten Gruppe betrachtet; die Abschließung $\bar{F}(G)$ bezüglich der Norm $\|f\| := \sqrt{M_x(|f(x)|^2)}$ liefert eine kommutative H*-Algebra im Sinne von Ambrose, die isomorph zu $L^2(\bar{G})$ ist, wo $\bar{G}$ die fastperiodische Kompaktifizierung von G bedeutet. Umgekehrt folgt mittels der Dualitätssätze, daß jede kommutative H*-Algebra als eine Algebra $\bar{F}(G) = L^2(G)$ mit kompaktem abelschen G aufgefaßt werden kann.

K. HORNEFFER (Göttingen)