

Tagungsbericht (6)

Fastperiodische Funktionen
7. bis 11. April 1963

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand vom 7. bis 11. April 1963 unter der Leitung von Professor Dr. W. MAAK (Göttingen) eine Arbeitsgemeinschaft über "Fastperiodische Funktionen" statt. Teilnehmer waren:

Mailand: L. AMERIO, G. PROUSE, M. RICCI, C. VAGHI, A. VASCONI,
S. ZAIDMAN

Kairo: R. DOSS

Wien: P. FLOR Mainz: G. HELMBERG

Göttingen: H.D. DOMBROWSKI, H. GÜNZLER, K. HORNEFFER, W. MAAK

Es wurden die nachfolgend referierten Vorträge gehalten.

P. FLOR: "Fastperiodische" Folgen mit endlichem Wertebereich.
Untersucht werden Struktureigenschaften folgender Klassen von Folgen mit endlichem Wertesystem: die rekurrenten Folgen von Morse und Hedlund (Bezeichnung R), die fastperiodischen Folgen von Morse und Hedlund (MH), die Folgen, deren Konstanzmengen fastperiodische Mengen im Sinne Knesers sind (K), weiter f.p. Folgen im Birkhoffschen Sinn (B): $\{\alpha_n\}$ sei eine Bohr-f.p.Folge, $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k$ Zahlen, die unter den α_n nicht vorkommen, c_0, \dots, c_k seien irgendwelche Objekte. Dann sei $a_n = c_0$ (für $\alpha_n < \beta_1$), $a_n = c_t$ (für $\beta_t < \alpha_n < \beta_{t+1}$), $a_n = c_k$ (für $\beta_k < \alpha_n$). Für alle vier Klassen spielt die Natur der Werte keine Rolle. Die Klassen umfassen die periodischen Folgen und sind gegenüber periodischer Auswahl von Teilfolgen abgeschlossen. Die Produktbildung, die den Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ die Folge $\{(a_n, b_n)\}$ zuordnet, ist innerhalb der Klassen B, MH und K stets ausführbar. Zwischen den Klassen bestehen die Inklusionen $R \supset B$ und $MH \supset K$, ob $MH \supset B$ gilt, ist nicht bekannt. Weitere Inklusionen bestehen nicht.

G. HELMBERG: Ein Zusammenhang zwischen Fourierreihen und Werteverteilungen fastperiodischer Funktionen.

Es sei $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i \alpha_k x}$ eine f.p. Funktion, $\{\beta_l : l \in L\}$ eine

Basis für den von den Fourierexponenten $\alpha_k (k=1, 2, \dots)$ aufgespannten Modul über dem rationalen Zahlkörper P und

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsberichte

Festperiodische Funktionen
V. d. d. d. April 1967

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand vom 7. bis
11. April 1967 unter der Leitung von Professor Dr. W. MAAS (Göt-
tingen) eine Arbeitstagung über "Festperiodische Funktionen"
statt. Teilnehmer waren:

- Teilnahme: L. AMERIO, G. BROUSE, M. KROG, C. VAGHI, A. VASSONI,
S. ZALDMAN
Katzen: R. DOSS
Wien: P. FLOR
Göttingen: H. D. GOMBROWSKI, H. GÜNTHER, K. HORNREITER, W. MAAS

Es wurden die nachfolgend referierten Vorträge gehalten.

P. FLOR: "Festperiodische" Folgen mit endlicher Wertebereich

Untersucht werden Strukturigenschaften folgender Klassen von
Folgen mit endlichem Wertebereich: die rekurrenten Folgen von Morse
und Hedlund (Bezeichnung R), die festperiodischen Folgen von
Morse und Hedlund (MH), die Folgen der beschränkten Konstantenfolgen fest-
periodische Mengen im Sinne Kneasers sind (K), weiter f.p. Folgen
im Birkhoff'schen Sinn (B) sei eine f.p. Folge.
 $a_n = o_f$ (für $a_n < \infty$), $a_n = o_f$ (für $a_n < \infty$)
 $a_n = o_f$ (für $a_n < \infty$), $a_n = o_f$ (für $a_n < \infty$)
Klassen spielt die Natur der Werte keine Rolle. Die Klassen un-
terschiedlicher periodischer Folgen sind gegenüber periodischer
Auswahl von Teilfolgen abgeschlossen. Die Produktbildung, die den
Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ die Folge $\{a_n b_n\}$ zugeordnet ist, innerhalb
der Klassen B, MH und K stets ausföhrbar. Zwischen den Klassen
bestehen die Inklusionen $R \supset B$ und $MH \supset K$, ob $MH \supset B$ gilt, ist
nicht bekannt. Weitere Inklusionen bestehen nicht.

G. HEIMBERG: Ein Zusammenhang zwischen Fortsetzbarkeit und Verteilungseigenschaften festperiodischer Funktionen

Es sei $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ eine f.p. Funktion, $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ eine
Basis für den von den Fortsetzungsexponenten $\alpha_k (k=1, 2, \dots)$ aufge-
spannten Modul über dem rationalen Zahlkörper \mathbb{Q} und



$$\alpha_k = \sum_{l \in L_k} b_{kl} \beta_l \quad (b_{kl} \in P, L_k \subset L, L_k \text{ endlich}) \text{ f\u00fcr } k=1,2,\dots$$

Ferner seien $\{\beta_l: l \in L\}$ und $\{\gamma_l: l \in L\}$ zwei Familien beliebiger reeller Zahlen, sowie $\alpha'_k = \sum_{l \in L_k} b_{kl} \beta_l$ und $\gamma'_k = \sum_{l \in L_k} b_{kl} \gamma_l$

f\u00fcr $k=1,2,\dots$. Der von den Funktionen $e^{i \alpha_k x}$ ($k=1,2,\dots$) aufgespannte (im Banachraum aller fp. Funktionen) abgeschlossene Modul fpr. Funktionen \u00fcber dem komplexen Zahlk\u00f6rper K sei mit M_f bezeichnet. F\u00fcr ein trigonometrisches Polynom

$$g(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i \alpha_k x} \in M_f \text{ sei } g'(x) \text{ definiert durch } g'(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^n c_k e^{i \alpha'_k x} e^{i \alpha_k x} . \text{ F\u00fcr jede gegen } f \text{ gleichm\u00e4\u00dfig konvergierende}$$

Folge trigonometrischer Polynome $f_n \in M_f$ konvergiert die Folge der trigonometrischen Polynome f'_n gleichm\u00e4\u00dfig gegen ein und dieselbe f.p. Funktion f' und es gilt $\|f'\| \leq \|f\|$. Sind alle β_l ($l \in L$) unabh\u00e4ngig \u00fcber P , dann haben f und f' die gleiche Werteverteilung

μ_f . Einer nicht konstanten Funktion f ist damit eine Klasse fpr. Funktionen f' mit gleicher Werteverteilung wie f zugeordnet, die die M\u00e4chtigkeit des Kontinuums hat. Die beliebige Wahl der Zahlen β_l und γ_l erlaubt es, mit Hilfe dieser S\u00e4tze auch (z.T. von BOHR und BOCHNER stammende) S\u00e4tze \u00fcber Existenz und Konvergenz von Fourierreihen zu beweisen.

L. AMERIO: Linear almost periodic equations in Hilbert spaces.

Let Y and X be two Hilbert spaces, X separable, dense in Y ; moreover let the immersion of X in Y be continuous. Consider the linear functional equation

$$(1) \int_J \{ (x'(t), h'(t))_Y + a(t, x(t), h(t)) + b(t, x'(t), h(t)) \} dt = \int_J (f(t), x(t))_Y dt$$

where $x(t), h(t), f(t)$ satisfy, for every compact Δ , the conditions:

$$\begin{aligned} x(t) &\in L^2(\Delta, X), \quad x'(t) \in L^2(\Delta, Y), \\ h(t) &\in L^2(\Delta, X), \quad h'(t) \in L^2(\Delta, Y), \quad h(t) \text{ has a compact support;} \\ f(t) &\in L^2(\Delta, Y). \end{aligned}$$

Equation (1) must be satisfied for any test function $h(t)$.

Moreover $a(t, u, v), b(t, u, v)$ are sesqui-linear forms defined on $X \times X, Y \times X$, uniformly bounded in any compact Δ .

$\alpha_k = \sum_{i \in I_k} \beta_{ki} \alpha_i$ (für $k=1, 2, \dots$)

Ferner seien $\{A_i: i \in I\}$ und $\{V_i: i \in I\}$ zwei Familien beliebiger reeller Zahlen, sowie $\alpha'_k = \sum_{i \in I_k} \beta_{ki} \alpha'_i$ und $\beta_{ki} = \sum_{i \in I_k} \beta_{ki} \alpha'_i$

für $k=1, 2, \dots$. Der von den Funktionen $e^{i \alpha_k x}$ ($k=1, 2, \dots$) aufgespannte

(im Besselsraum aller ip. Funktionen) abgeschlossene Modul für Funktionen über dem komplexen Zahlkörper K sei mit M bezeichnet. Für ein trigonometrisches Polynom

$$g(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i \alpha_k x} \in M_1 \text{ sei } g'(x) \text{ definiert durch } g'(x) = \sum_{k=1}^n c_k i \alpha_k e^{i \alpha_k x}$$

Polynome $f \in M_1$ konvergiert die Folge der trigonometrischen Polynome f_n gleichmäßig gegen ein und dasselbe

Polynom f gleichmäßig gegen ein und dasselbe Polynom f und es gilt $f_n' \rightarrow f'$ (sind alle $f_n \in M_1$)

unabhängig über P , dann haben f und f' die gleiche Wertverteilung. Einer nicht konstanten Funktion f ist damit eine Klasse für

Funktionen f' mit gleicher Wertverteilung wie f zugeordnet, die die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Die beliebige Wahl der Zahlen β_{ki} und α'_i erlaubt es, mit Hilfe dieser Sätze auch (s. 1. von

BOHR und BOHNER stammende) Sätze über Existenz und Konvergenz von Fourierreihen zu beweisen.

1. THEOREM: Linear almost periodic equations in Hilbert spaces

Let Y and X be two Hilbert spaces, X separable, dense in Y , moreover let the mapping of X in Y be continuous. Consider the

linear functional equation

$$(1) \int_0^t \{a(t-x)b'(x) + b(t-x)a'(x)\} dx = \int_0^t f(t-x)g(x) dx$$

where $a(t), b(t), f(t), g(t)$ satisfy, for every compact Δ , the conditions:

$$\begin{aligned} a(t) \in L^2(\Delta, X), \quad a'(t) \in L^2(\Delta, Y), \\ b(t) \in L^2(\Delta, X), \quad b'(t) \in L^2(\Delta, Y), \quad \text{has a compact support;} \\ f(t) \in L^2(\Delta, Y). \end{aligned}$$

Equation (1) must be satisfied for any test function $h(t)$. Moreover $a(t, u, v), b(t, u, v)$ are semi-linear forms defined on $X \times X, Y \times Y$, uniformly bounded in any compact Δ .



Let us consider now the Hilbert spaces:

$$L^2_0(X) = L^2(\Delta_0, X), \quad \Delta_0 = \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]; \quad L^2_0(Y);$$

$$W_0: w = \left\{ w(\eta); \eta \in \Delta_0, w(\eta) \in L^2_0(X), w'(\eta) \in L^2_0(Y) \right\}.$$

Then $x(t)$ (and $h(t)$) can be considered as a continuous vector valued function, from $J = (-\infty, \infty)$ to W_0 , with the norm:

$$\|x(t)\|_{W_0} = \left\{ \int_{\Delta_0} \|x(t+\eta)\|_X^2 d\eta + \int_{\Delta_0} \|x'(t+\eta)\|_Y^2 d\eta \right\}^{\frac{1}{2}}$$

In the same way, $f(t)$ can be considered as a continuous function from J to $L^2_0(Y)$.

Under a proper definition of almost periodicity for the forms $a(t, u, v)$, $b(t, u, v)$ and supposing, moreover, that $f(t)$ is $L^2_0(Y)$ - w.a.p. one obtains an extension of FAVARD's theorems (on ordinary differential a.p. equations) by proving the existence, uniqueness and W_0 -almost periodicity of a minimal solution.

G. PROUSE: Almost-periodic solutions of the Navier-Stokes equation in 2 dimensions.

Consider the Navier-Stokes system in the unknown functions $x_j(\xi_1, \xi_2, t)$ and $p(\xi_1, \xi_2, t)$

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 x_i \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} - \mu \Delta x_j = - \frac{\partial p}{\partial \xi_j} + \gamma_j \quad (j=1,2); \quad \sum_{j=1}^2 \frac{\partial x_j}{\partial \xi_j} = 0.$$

To the system is associated a "weak" system (Ω = open set in the ξ -plane):

$$\int_J \left\{ -(x(t), h'(t))_{L^2(\Omega)} + b(x(t), x(t), h(t)) + \mu(x(t), h(t))_{H'_0(\Omega)} - (\gamma(t), h(t))_{L^2(\Omega)} \right\} dt = 0.$$

If X is a Hilbert space, we put $L^2_0(X) = L^2(-1, 0, X)$. The following theorems can be proved.

Th.1: If $f(t)$ is L^2 -bounded in J , then there exists at least one weak solution $\tilde{x}(t)$ which is L^2 -bounded in J . If $f(t)$ is L^2 -a.p. according to Stepanov and the relation

$$\sup_{t \in J} \left[\|\tilde{x}(\eta)\|_{C^0(t-1, t, L^2)} \|\tilde{x}(t)\|_{L^2_0(H^1_0)}^{\frac{1}{2}} \right] < \Gamma'_{\mu, \Omega} \quad \text{holds,}$$

then $\tilde{x}(t)$ is the only L^2 -a.p. solution; $\tilde{x}(t)$ is then also H'_0 -a.p. according to Stepanov.

Th.2: If $f(t)$ is L^2 -a.p. according to Stepanov and $\sup_{t \in J} \|f(t)\|_{L^2} < \Gamma''_{\mu, \Omega}$ then there exists one, and only one,

Let us consider now the Hilbert space $L^2_0(X)$. Then $x(t)$ (and $h(t)$) can be considered as a continuous vector valued function, from $J = (-\infty, \infty)$ to W_0 , with the norm:

$$\|x(t)\|_{W_0} = \left\{ \int_X \|x(t+y)\|_Y^2 dy + \int_{\Delta} \|x'(t+y)\|_Y^2 dy \right\}^{1/2}$$

In the same way, $\tilde{x}(t)$ can be considered as a continuous function from J to $L^2_0(Y)$.

Under a proper definition of almost periodicity for the form $a(t, u, v), b(t, u, v)$ and supposing, moreover, that $\tilde{x}(t)$ is $L^2_0(Y)$ -w.a.p. one obtains an extension of PAVARD's theorem (on ordinary differential a.p. equations) by proving the existence, uniqueness and W_0 -almost periodicity of a minimal solution.

9. PROBLEME: Almost-periodic solutions of the Navier-Stokes system in 2 dimensions.

Consider the Navier-Stokes system in the unknown functions $x_1(\xi_1, \xi_2, t)$ and $p(\xi_1, \xi_2, t)$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} x_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} x_2 - \nu \Delta x_1 = -\frac{\partial p}{\partial \xi_1}$$

For the system, its associated a "weak" system $\Omega = \text{open set in the } \xi\text{-plane):}$

$$\left\{ \begin{aligned} & -(\dot{x}(t), h'(t)) \in L^2_0(\Omega) \\ & + b(x(t), x(t), h(t)) + c(x(t), h(t)) \\ & - (\dot{y}(t), h(t)) \in L^2_0(\Omega) \end{aligned} \right\} dt = 0$$

If X is a Hilbert space, we put $L^2_0(X) = L^2(-1, 0, X)$. The following theorem can be proved.

Th.1: If $\tilde{x}(t)$ is L^2 -bounded in J , then there exists at least one weak solution $\tilde{x}(t)$ which is L^2 -bounded in J . If $\tilde{x}(t)$ is L^2 -a.p.

according to Stepanov and the relation

$$\sup_{t \in J} \left[\|\tilde{x}(t)\|_{L^2_0(\Omega)} + \|\dot{\tilde{x}}(t)\|_{L^2_0(\Omega)} \right] < \infty$$

then $\tilde{x}(t)$ is the only L^2 -a.p. solution; $\tilde{x}(t)$ is then also H^1 -a.p. according to Stepanov.

Th.2: If $\tilde{x}(t)$ is L^2 -a.p. according to Stepanov and $\sup_{t \in J} \|\tilde{x}(t)\|_{L^2_0(\Omega)} < \infty$, then there exists one, and only one,



weak solution $\bar{x}(t)$ which is L^2 -a.p. and H'_0 -a.p. according to Stepanov.

M. RICCI: On differential equations with known term almost periodic according to Stepanov.

We extend Favard's second theorem to the equation

$x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$ where $x(t), f(t) \in X$ (uniformly convex space) and $A(t) \in \mathcal{A} = \mathcal{L}(X, X)$. We assume that $A(t)$ is \mathcal{A} -a.p. and $f(t)$ is X -a.p. according to Stepanov (a.p.S.). The following theorem can be proved:

Assume that a) $A(t)$ is \mathcal{A} -a.p., f is X -a.p.S.,

b) for every $A^{(e)}(t)$ there exists a constant δ_e such that, for every Eigensolution of the equation $u'(t) = A^{(e)}(t)u(t)$ the relation $\inf_{t \in J} \|u(t)\| \geq \delta_e \|u(0)\|$ holds;

c) for every bounded eigensolution $\inf_{t \in J} \|u(t)\| \geq \delta_e \sup_{t \in J} \|u(t)\|$;

d) a bounded solution exists.

Then there exists an a.p. solution.

We apply this theorem to the equations $z''(t) = -(I+K(t))z(t) + g(t)$ and $z''(t) = -(I+K)z(t) + g(t)$.

S. ZAIDMAN: Almost periodicity for the Poisson equation.

We consider the Poisson equation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t) \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

in the whole $(n+1)$ -dimensional space. It is supposed that $f(x,t)$ is defined for every $t \in J = (-\infty, \infty)$, with values in $L^2_x(\mathbb{R}^n)$, and is strongly continuous. Then one prove the following:

Theorem 1: There exists a function $u(x,t)$ belonging to the space H^2 in every "strip" $a \leq t \leq b, x \in \mathbb{R}^n$, which is a weak solution of the equation (1).

This function $u(x,t)$ will define a strongly continuous one $u(t) = \{u(x,t), t \in J\}$, from $t \in J$ to $L^2(\mathbb{R}^n)$, possessing also a strongly continuous L^2 -derivative.

If $f(x,t)$ is L^2 -bounded from $-\infty < t < +\infty$ to $L^2(\mathbb{R}^n)$, and if $u(x,t)$ is a L^2 -bounded solution of (1), then his first derivatives, $u_t(x,t), u_{x_i}(x,t)$ are also L^2 -bounded.

After, we assume that $f(x,t)$ is an L^2 -almost-periodic function in the sense of Bochner, and we prove the following main

weak solution $\tilde{x}(t)$ which is L^2 -a.p. and H^1 -a.p. according to Stepanov.

M. RIGOLI: On differential equations with known term almost periodic according to Stepanov.

We extend Favard's second theorem to the equation $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$ where $x(t), f(t) \in X$ (uniformly convex space) and $A(t) \in \mathcal{L}(X, X)$. We assume that $A(t)$ is L^2 -a.p. and $f(t)$ is X -a.p. according to Stepanov (a.p.S.). The following theorem can be proved:

- a) Assume that $A(t)$ is L^2 -a.p., f is X -a.p.S., then there exists a bounded solution $x(t)$.
- b) For every $A(t)$ there exists a constant δ , such that, for every eigenvalue λ of the equation $\lambda' = A(t)\lambda$, the relation $\text{Inf} \|\lambda(t)\| \geq \delta \|\lambda(0)\|$ holds.
- c) For every bounded eigenvalue λ , $\text{Inf} \|\lambda(t)\| \geq \delta \|\lambda(0)\|$.
- d) For every bounded eigenvalue λ , $\text{Inf} \|\lambda(t)\| \geq \delta \|\lambda(0)\|$.

We apply this theorem to the equations $x'(t) = -(I+K(t))x(t) + g(t)$ and $x'(t) = -(I+K(t))x(t) + g(t)$.

2. ZALDMAN: Almost periodicity for the Poisson equation.

We consider the Poisson equation

$$(1) \quad \Delta^2 u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

in the whole $(n+1)$ -dimensional space. It is supposed that $f(x,t)$ is defined for every $t \in \mathbb{R}$, with values in $L^2(\mathbb{R}^n)$, and is strongly continuous. Then one prove the following:

Theorem 1: There exists a function $u(x,t)$ belonging to the space H^2 in every "strip" $a < t < b, x \in \mathbb{R}^n$, which is a weak solution of the equation (1).

This function $u(x,t)$ will define a strongly continuous one $u(t) = \{u(x,t), t \in \mathbb{R}\}$, from L^2 to $L^2(\mathbb{R}^n)$, possessing also a strongly continuous L^2 -derivative.

If $f(x,t)$ is L^2 -bounded from $-\infty < t < +\infty$ to $L^2(\mathbb{R}^n)$, and if $u(x,t)$ is a L^2 -bounded solution of (1), then his first derivatives $u_t(x,t), u_x(x,t)$ are also L^2 -bounded. After, we assume that $f(x,t)$ is an L^2 -almost-periodic function in the sense of Bochner, and we prove the following main



Theorem 2: Every L^2 -bounded solution $u(x,t)$ of the equation (1) with L^2 -almost-periodic known term $f(x,t)$, is L^2 -almost periodic, and his first weak derivatives have the same property.

K. HORNEFFER: Fastautomorphe Funktionen und Formen.

Der Begriff einer analytischen fastperiodischen Funktion im Sinne H. Bohrs wird auf eigentlich diskontinuierliche Gruppen linearer Transformationen der Zahlenkugel übertragen. Es wird gezeigt, daß nichtkonstante analytische fastperiodische Funktionen nur für Funktionsgruppen existieren. Für solche Gruppen werden fastautomorphe Formen der Dimension $-2k$ (k ganz) und fastautomorphe Funktionen (d.i. $k=0$) definiert. Mit Hilfe einer Art Poincaré-scher Θ -Reihen wird zu beliebiger irreduzibler endlichdimensionaler beschränkter Darstellung der Funktionsgruppe ein aus fastautomorphen Funktionen bestehender Darstellungsmodul konstruiert. "Genügend viele" f.a. Funktionen existieren also genau für diejenigen Gruppen, die überhaupt nichtkonstante analytische f.p. Funktionen besitzen.

W. MAAK: Gitterpunktsätze.

Setzt man

$$\omega_1 = z\omega = \tau \vartheta_{00}^2(\tau), \quad \omega_2 = z\omega' = \omega_1 \tau$$

$$\eta = \zeta(\omega) \quad \eta' = \zeta(\omega')$$

so ist z.B.

$$F(\tau) = \log \sigma_{01}(\omega | \omega_1, \omega_2) - \eta \omega$$

und

$$G(\tau) = \log \sigma_{00}(\omega | \omega_1, \omega_2) - \eta \omega$$

eindeutige Funktionen von τ . Für $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$, $a \equiv 1(4)$ kann man $F(L\tau)$ und $G(L\tau)$ berechnen:

$$F(L\tau) = F(\tau) + i \varphi(L) \quad G(L\tau) = G(\tau) + i \psi(L).$$

Hierbei sind φ und ψ reelle additive Funktionen:

$$\varphi(LM) = \varphi(L) + \varphi(M) \quad \psi(LM) = \psi(L) + \psi(M).$$

Für die Erzeugenden

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ergibt sich}$$

$$\varphi(A) = -\varphi(A) \quad \psi(B) = -\psi(B).$$

Deshalb gilt allgemein:

$$\varphi(L) = -\varphi(L).$$

So erhält man einen Gitterpunktsatz, wenn man für φ und ψ die expliziten Ausdrücke einsetzt. Ähnlich erhält man weitere Sätze,

Theorem 2: Every L^2 -bounded solution $u(x,t)$ of the equation (1) with L^2 -almost-periodic known term $f(x,t)$, is L^2 -almost periodic and its first weak derivatives have the same property.

K. HORNEFFER: Fastautomorphe Funktionen und Formen.

Der Begriff einer analytischen fastperiodischen Funktion im Sinne H. Bohr wird auf eigentlich diskontinuierliche Gruppen linearer Transformationen der Zahlenkörper übertragen. Es wird gezeigt, daß nichtkonstante analytische fastperiodische Funktionen nur für Punktgruppen existieren. Für solche Gruppen werden fastautomorphe Formen der Dimension $2k$ (k ganz) und fastautomorphe Funktionen (d. h. $k=0$) definiert. Mit Hilfe einer Art Poincaré-scher Θ -Reihen wird zu beliebiger irreduzibler endlichdimensionaler beschränkter Darstellung der Punktgruppe ein aus fastautomorphen Funktionen bestehendes Darstellungsmodul konstruiert. "Genügend viele" f. a. Funktionen existieren also genau für diejenigen Gruppen, die überhaupt nichtkonstante analytische f. p. Funktionen besitzen.

W. MAAS: Gitterpunkte.

Setzt man so ist a. B.

$$f(\tau) = \log e_{\omega}(\omega | \omega, \omega) - \pi \omega$$

und

$$g(\tau) = \log e_{\omega}(\omega | \omega, \omega) - \pi \omega$$

einzigste Funktionen von τ . Für $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in T(2)$, $a \neq 1$ kann man $f(L)$ und $g(L)$ berechnen:

$$f(L) = f(\tau) + i R(L) \quad g(L) = g(\tau) + i R(L)$$

Hierbei sind ψ und χ reelle additive Funktionen:

$$\psi(M) = \psi(L) + \psi(N) \quad \chi(M) = \chi(L) + \chi(N)$$

Für die Erzeugenden

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ergibt sich}$$

$$\psi(A) = -\psi(B)$$

$$\psi(B) = -\psi(B)$$

Deshalb gilt allgemein:

$$\psi(L) = -\psi(L)$$

So erhält man einen Gitterpunkt, wenn man für ψ und χ die expliziten Ausdrücke einsetzt. Ähnlich erhält man weitere Sätze.



welche als Korrolar z.B. das quadratische Reziprozitätsgesetz und dasjenige für Dedekindsummen liefern.

Die Funktionen

$$\exp (F(\tau)) \quad \exp (G(\tau))$$

sind einfachste nichttriviale Beispiele fastautomorpher Funktionen.

H.D. DOMBROWSKI: Fastautomorphe Funktionen zweiten Grades.

Diejenigen fastautomorphen Funktionen, die in zweidimensionalen Darstellungsmoduln der Modulgruppe liegen, lassen sich mit Hilfe der Riemannschen P-Funktion beschreiben. Während man die mit Poincaréreihen konstruierten Darstellungsmoduln nur über die Darstellungen kennt, kann man aus der P-Funktion wichtige Informationen über die Darstellungen erhalten. Insbesondere kann die Poincaréreihe der P-Funktion angegeben werden.

H. GÜNZLER: Einige Anwendungen der Dualitätssätze.

Ist G eine lokalkompakte abelsche Gruppe, \hat{G} die Dualgruppe, Ω eine beliebige Teilmenge von G , $\{\Omega\}$ die von Ω in \hat{G} erzeugte Untergruppe, so ist die Abschließung von $\{\Omega\}$ in \hat{G} , d.h. die Menge aller der Charaktere aus \hat{G} , die mittels solcher aus Ω lokal auf G beliebig genau approximiert werden können, gegeben durch Ω_{\perp}^{\perp} , das sind diejenigen Charaktere $\epsilon \in \hat{G}$, für die immer dann $\psi(x) = 1$, wenn $\psi(x) = 1$ für alle $\psi \in \Omega$. Trennt speziell Ω die Punkte von G , so lassen sich also alle Charaktere von G mittels Ω approximieren, in diesem Sinn liefert eine treue Darstellung von G schon ganz \hat{G} . Die erste der obigen Aussagen liefert für $G = \mathbb{Z}^k$ eine Verallgemeinerung des Kroneckerschen Approximationsatzes. Auch andere Approximationssätze lassen sich folgern.

Weiter wird die Faltungsalgebra $F(G)$ der fastperiodischen stetigen komplexwertigen Funktionen f auf einer lokalkompakten Gruppe betrachtet; die Abschließung $\overline{F}(G)$ bezüglich der Norm $\|f\| := \sqrt{M_x(|f(x)|^2)}$ liefert eine kommutative H^* -Algebra im Sinne von Ambrose, die isomorph zu $L^2(\overline{G})$ ist, wo \overline{G} die fastperiodische Kompaktifizierung von G bedeutet. Umgekehrt folgt mittels der Dualitätssätze, daß jede kommutative H^* -Algebra als eine Algebra $\overline{F}(G) = L^2(G)$ mit kompaktem abelschen G aufgefaßt werden kann.

K. HORNEFFER (Göttingen)

Wegche als Korollar z.B. das quadratische Reziprozitätsgesetz
und dasjenige für Determinanten liefern.

Die Funktionen

$$\exp(\tau(t)) \quad \exp(G(\tau))$$

sind einfache nichttriviale Beispiele fastperiodischer Funktionen.

H. D. DOMBROWSKI: Fastperiodische Funktionen zweiten Grades.

Diejenigen fastperiodischen Funktionen, die in zweidimensionalen
Darstellungsmodulen der Modulgruppe liegen, lassen sich mit Hilfe
der Riemannschen P-Funktion beschreiben. Während man die mit
Poincaréreihen konstruierten Darstellungsmodule nur über die Dar-
stellungen kennt, kann man aus der P-Funktion wichtige Informa-
tionen über die Darstellungen erhalten. Insbesondere kann die
Poincaréreihe der P-Funktion angegeben werden.

H. GÜNTHER: Einige Anwendungen der Dualitätstheorie.

Ist G eine lokal kompakte abelsche Gruppe, Ω die Umkehrgruppe, Ω
eine beliebige Teilmenge von G , Ω^* die von Ω in Ω erzeugte Unter-
gruppe, so ist die Abschließung von Ω^* in G , d.h. die Menge aller
der Charaktere aus \hat{G} , die vermittels solcher aus Ω lokal auf G
beliebig genau approximiert werden können, gegeben durch Ω^*_{\perp} , das
sind diejenigen Charaktere $\chi \in \hat{G}$, für die immer dann $\chi(x) = 1$,
wenn $\psi(x) = 1$ für alle $\psi \in \Omega^*$. Trennt speziell Ω die Punkte von G ,
so lassen sich also alle Charaktere von G vermittels Ω approximie-
ren. In diesem Sinn liefert eine trenne Darstellung von G einen
genau \hat{G} . Die erste der obigen Aussagen liefert für $G = \mathbb{Z}^k$ eine Ver-
allgemeinerung des Kronecker'schen Approximationssatzes. Auch an-
dere Approximationssätze lassen sich folgern.

Weiter wird die Potenzalgebra $\tilde{P}(G)$ der fastperiodischen stati-
gen komplexwertigen Funktionen f auf einer lokal kompakten Gruppe
betrachtet; die Abschließung $\tilde{P}(G)$ bezüglich der Norm
 $\|f\| = \sqrt{M_x(|f(x)|^2)}$ liefert eine kommutative H^* -Algebra im Sinne
von Ambrose, die isomorph zu $L^2(\hat{G})$ ist, wo \hat{G} die fastperiodische
Kompaktifizierung von G bedeutet. Umgekehrt folgt mittels der
Dualitätssätze, daß jede kommutative H^* -Algebra als eine Algebra
 $\tilde{P}(G) = L^2(\hat{G})$ mit kompaktem abelschen G aufgefächert werden kann.

K. GÜNTHER (Gießen)

