Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht (7)

Grundlagen der Geometrie

22. bis 26. April 1963

Alljährlich findet im Herbst in Oberwolfach die große Geometrietagung statt. Obwohl es sich als sehr fruchtbar erwies, daß sich dort die Vertreter aller Zweige der Geometrie begegnen konnten, wurde der Kreis der Teilnehmer schließlich so groß, daß die so geschätzte Eigenart der Oberwolfacher Veranstaltungen, nämlich die Aussprachemöglichkeit von jedem mit jedem, nicht mehr gegeben war. So entschloß man sich im Jahre 1958, im Frühjahr eine besondere Tagung für die sogenannten "Grundlagen der Geometrie" einzurichten. (Diese Disziplin wird aus historischen Gründen so genannt. Besser würde man vielleicht von "Theorien geometrischer Strukturen" sprechen.)

Inzwischen ist diese Tagung bereits zur Tradition geworden. Sie stand diesmal unter der Leitung der Professoren Dr. F. BACHMANN (Kiel), Dr. R. BAER (Frankfurt a.M.) und Dr. E. SPERNER (Hamburg). Sie vereinigte 4o Mathematiker aus dem In- und Ausland.

Bulgarien:	PETKANTSCHIN, Prof.Dr.B., Sofia
Finnland:	LEHTI, Dr.R., Helsinki
Italien:	BARLOTTI, Dr.A., Florenz
	BURMESTER, M.V.D., Rom
	DICUONZO, Dr.V., Rom
Jugoslawien:	PAVLOVIĆ, S.V., Belgrad
Niederlande:	van DALEN, Dr.D., Utrecht
	FREUDENTHAL, Prof.Dr.H., Utrecht
	SPRINGER, Prof.Dr.T.A., Utrecht
Österreich:	ROHAČEK, Prof.Dr.H., Wien
Polen:	SZMIELEW, Prof.Dr.W., Warschau
USA:	HIGMAN, Prof.D.G., Ann Arbor
	HUGHES, Prof. Dr.R., Ann Arbor
Deutschland:	ARNOLD, Dr.H.J., Hamburg
	ARTMANN, B. Gießen
	BACHMANN, Prof. Dr.F., Kiel
	BAER, Prof.Dr.R., Frankfurt a.M.

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Grundlagen der Geometrie

22. bis 25. April 1963

Alljährlich findet im Herbst in Oberwolfach die große Geometrietagung statt. Obwohl es sich als sehr fruchtbar erwies, daß sich dort die Vertreter aller Zweige der Geometrie begegnen konnten, wurde der Kreis der Teilnehmer schließlich so groß, daß die so geschätzte Eigenart der Oberwolfacher Veranstaltungen, nämlich die Aussprachemöglichkeit von jedem mit jedem, nicht mehr gegeben war. So entschloß man sich im Jahre 1958, im Frühjahr eine besondere Tagung für die sogenannten "Grundlagen der Geometrie" einzurichten. (Diese Disziplin wird aus historischen Gründen so genannt. Besser würde man vielleicht von "Theorien geometrischer Strukturen" sprechen.)

Inzwischen ist diese Tagung bereits zur Tradition geworden. Sie stand diesmal unter der Leitung der Professoren Dr. F. BACHMANN (Kiel), Dr. R. BAER (Frankfurt a.M.) und Dr. E. SPERNER (Hamburg). Sie vereinigte 40 Mathematiker aus dem In- und Ausland.

<u>Bulgarien</u>: PETKANTSCHIN, Prof.Dr.B., Sofia

<u>Finnland</u>: LEHTI, Dr.R., Helsinki

<u>Italien</u>: BARLOTTI, Dr.A., Florenz
BUEKENHOUT?

BURMESTER, M.V.D., Rom
DICUONZO, Dr.V., Rom

<u>Jugoslawien</u>: PAVIOVIĆ, S.V., Belgrad

<u>Niederlande</u>: van DALEN, Dr.D., Utrecht
FREUDENTHAL, Prof.Dr.H., Utrecht
SPRINGER, Prof.Dr.T.A., Utrecht

<u>Österreich</u>: ROHAČEK, Prof.Dr.H., Wien

<u>Polen</u>: SZMIELEW, Prof.Dr.W., Warschau

<u>USA</u>: HIGMAN, Prof.D.G., Ann Arbor
HUGHES, Prof. Dr.D., Ann Arbor

<u>Deutschland</u>: ARNOLD, Dr.H.J., Hamburg
ARTMANN, B. Gießen
BACHMANN, Prof. Dr.F., Kiel
BAER, Prof.Dr.R., Frankfurt a.M.

BENZ, Dr. W. Frankfurt a.M.
BERGAU, Dr.P. Braunschweig
BIALLAS, Dr.D., Braunschweig
DILLER, J., Kiel
DRESS, Dr.A., Kiel
EWALD, Dr.G., Mainz
GLOCK, Dr.E., Stuttgart
GÖTZKY, M., Kiel
HERING, Dr.Ch., Frankfurt a.M.
JOUSSEN, Dr.J., Hamburg
JUNKERS, W., Hamburg
KARZEL, Prof.Dr.H., Hamburg
KEGEL, Dr.O.H., Frankfurt a.M.
KLINGENBERG, Prof.Dr.W., Göttingen
LENZ, Prof.Dr.H., München
LINGENBERG, Dr.R., Hannover
LÜNEBURG, Dr.H., Frankfurt a.M.
MENNICKE, Dr.J., Braunschweig
PEJAS, Dr.W., Kiel
SALZMANN, Dr.H., Frankfurt a.M.
SPERNER, Prof. Dr.E., Hamburg
WÖLK, D., Frankfurt a.M.
WOLFF, Dr.H., Kiel

Im Hauptprogramm wurden 22 Vorträge gehalten, auf die unten im einzelnen eingegangen wird. Die Themen waren so mannigfaltig, daß es nicht möglich ist, diese einigen wenigen Generalthemen unterzuordnen. Die meisten Vorträge fanden ein lebhaftes Echo, was in der stets sehr angeregten Diskussion zum Ausdruck kam. Diese Diskussionen wurden auch oft noch bei Spaziergängen in der Umgebung des Hauses oder am späten Abend in einer Ecke der Bibliothek weitergeführt. Gerade dies wird am Oberwolfacher Institut geschätzt, daß die Tagungsteilnehmer, weil sie alle unter einem Dach und etwas abgeschieden wohnen, in dauerndem Kontakt miteinander stehen, und daß auchjunge Nachwuchskräfte mit weltbekannten Wissenschaftlern ins Gespräch kommen können. Welche Früchte diese Atmosphäre tragen kann, wurde in manchen Vorträgen ausdrücklich hervorgehoben: Herr BARLOTTI (Florenz) erzielte seine Ergebnisse mit Hilfsmitteln, die ihm vor einem Jahr Herr JOUSSEN (Hamburg) in Oberwolfach mitgeteilt hatte; Herr EWALD (Mainz) brachte in

BENZ, Dr. W. Frankfurt a.M.
BERGAU, Dr.P. Braunschweig
BIALLAS, Dr.D., Braunschweig
DILLER, J., Kiel
DRESS, Dr.A., Kiel
EWALD, Dr.G., Mainz
GLOCK, Dr.E., Stuttgart
GÖTZKY, M., Kiel
HERING, Dr.Ch., Frankfurt a.M.
JOUSSEN, Dr.J., Hamburg
JUNKERS, W., Hamburg
KARZEL, Prof.Dr.H., Hamburg
KEGEL, Dr.O.H., Frankfurt a.M.
KLINGENBERG, Prof.Dr.W., Göttingen
LENZ, Prof.Dr.H., München
LINGENBERG, Dr.R., Hannover
LÜNEBURG, Dr.H., Frankfurt a.M.
MENNICKE, Dr.J., Braunschweig
PEJAS, Dr.W., Kiel
SALZMANN, Dr.H., Frankfurt a.M.
SPERNER, Prof. Dr.E., Hamburg
WÖLK, D., Frankfurt a.M.
WOLFF, Dr.H., Kiel

Im Hauptprogramm wurden 22 Vorträge gehalten, auf die unten im einzelnen eingegangen wird. Die Themen waren so mannigfaltig, daß es nicht möglich ist, diese einigen wenigen Generalthemen unterzuordnen. Die meisten Vorträge fanden ein lebhaftes Echo, was in der stets sehr angeregten Diskussion zum Ausdruck kam. Diese Diskussionen wurden auch oft noch bei Spaziergängen in der Umgebung des Hauses oder am späten Abend in einer Ecke der Bibliothek weitergeführt. Gerade dies wird am Oberwolfacher Institut geschätzt, daß die Tagungsteilnehmer, weil sie alle unter einem Dach und etwas abgeschieden wohnen, in dauerndem Kontakt miteinander stehen, und daß auch junge Nachwuchskräfte mit weltbekannten Wissenschaftlern ins Gespräch kommen können. Welche Früchte diese Atmosphäre tragen kann, wurde in manchen Vorträgen ausdrücklich hervorgehoben: Herr BARLOTTI (Florenz) erzielte seine Ergebnisse mit Hilfsmitteln, die ihm vor einem Jahr Herr JOUSSEN (Hamburg) in Oberwolfach mitgeteilt hatte; Herr EWALD (Mainz) brachte in seinem Vortrag einen Satz, den er am Abend vorher mit Herrn SPRINGER (Utrecht) gemeinsam gefunden hatte; Herr LÜNEBURG (Frankfurt) konnte sich in seinem Vortrag auf Ergebnisse beziehen, die ihm Herr SUZUKI (Urbana / Ill.) bei der Oberwolfacher Gruppentheorietagung erzählt hatte.

Neben dem Hauptprogramm gab es noch drei Abendveranstaltungen, bei denen im Frankfurter Mathematischen Seminar erzielte Ergebnisse über die LENZ-BARLOTTI-Klassifikation der projektiven Ebenen mitgeteilt wurden. Es handelt sich um ein recht anschauliches Einteilungsprinzip nach der Konfiguration derjenigen Punkt-Geraden-Paare, bezüglich denen Gruppen zentraler Kollineationen mit gewissen Transitivitätseigenschaften existieren. Diese Einteilung stammt von LENZ (1954) und wurde von A. BARLOTTI (1957) verfeinert. Herr LÜNEBURG und Herr SALZMANN teilten einige Ergebnisse ihrer Untersuchungen mit, welche Typen bei endlichen bzw. bei topologischen Ebenen vorkommen können.

Im einzelnen wurden die folgenden Vorträge gehalten:

SPRINGER, T.A.: <u>Polaritäten 2. Art in Moufangebenen.</u>

Zu einer Polarität in einer Moufangebene $\mathfrak{P}$ über dem Oktavenkörper C gehört ein Automorphismus der Periode 2 des Zentrums K von C. Bei einer Polarität 2. Art ist dieser Automorphismus von der Identität verschieden. Es wurde darüber berichtet, wie man diese Polaritäten algebraisch untersuchen kann. Bei "anständigen" Körpern K (z.B. Zahlkörpern) kann man sie ziemlich einfach mit Hilfe von Jordanalgebren beschreiben. Die Polaritäten 2. Art zugehörigen Untergruppen der kleinen projektiven Gruppe von $\mathfrak{P}$ sind gewisse Formen der einfachen algebraischen Gruppen vom Typus E_6.

FREUDENTHAL, H.: <u>Metasymplektische Geometrien.</u>

Die metasymplektischen Geometrien über den 4 Hurwitz-Algebren wurden nahegelegt als 4. Zeile des magischen Quadrats

$$\begin{array}{llll} B_1 & A_2 & C_3 & E_4 \\ A_2 & A_2\times A_2 & A_5 & E_6 \\ C_3 & A_5 & D_6 & E_7 \\ E_4 & E_6 & E_7 & E_8 , \end{array}$$

außerdem auch als Titssche Geometrie mit dem Graph $- \Rightarrow -$.

In der Lie-Algebra R_4 wird $\langle \phi,\phi \rangle$ als Endomorphismus definiert:

$\langle\phi,\phi\rangle\,\phi_1 = \tilde{\phi}^2\phi - \alpha(\mathrm{sp}\;\phi\phi_1)\,\phi - \beta(\mathrm{sp}\;\phi\phi)\,\phi_1$. $\langle\phi,\phi^*\rangle$ ist eine symmetrische Bilinearform. $\langle\phi,\phi\rangle = 0$ definiert die Mannigfaltigkeit W_4 der "Symplekta". Die lineare Hülle der $\langle\phi,\phi^*\rangle$ ist R_1. In R_1 wird die Mannigfaltigkeit W_1 der Punkte als die der $\langle\phi,\phi^*\rangle$ mit $[\phi,\phi^*] = 0$ erklärt. Für Symplekta ϕ,ϕ^* bzw. Punkte A, B wird definiert: scharnierend $\Longleftrightarrow$ sp $\phi\phi^* = 0$ bzw. sp AB = 0, verflochten $\Longleftrightarrow [\phi,\phi^*] = 0$ bzw. AB = BA, verbunden $\Longleftrightarrow \langle\phi,\phi^*\rangle = 0$ bzw. AB = 0, Inzidenz von ϕ und A $\Longleftrightarrow (\exists\,\phi^*)A\phi^* = \phi$, Halbinzidenz von ϕ und A $\Longleftrightarrow A\phi = 0$. Mit der Verbundenheitsrelation bilden die mit einem Symplekton inzidenten Punkte eine symplektische Geometrie der 3. Zeile, dagegen die mit einem Punkt inzidenten Symplekta eine Quadrik.

MENNICKE, J.: Einheitengruppen ternärer quadratischer Formen mit rationalen Koeffizienten.

Der Vortrag brachte eine geometrische Theorie der Einheitengruppen der ternären indefiniten nullteiligen quadratischen Formen mit rationalen Koeffizienten. Diese Gruppen sind spezielle diskrete hyperbolische Bewegungsgruppen (F-Gruppen im Sinne von J. NIELSEN). Innerhalb der F-Gruppen lassen sich die Einheitengruppen arithmetisch kennzeichnen. Aus dieser Kenntnis läßt sich mit elementargeometrischen Hilfsmitteln folgender Struktursatz beweisen: Der Verband der obigen Einheitengruppen hat endlich viele maximale Elemente, nämlich drei.

PEJAS, W.: Zwischenrelationen in Teilbereichen von affinen Ebenen.

$\mathfrak{J}$ sei eine nichtkollineare Punktmenge einer affinen Ebene $\mathfrak{a}$ über einem Körper K. Es wurden 2 Möglichkeiten betrachtet, in $\mathfrak{a}$ eine 3-stellige ("Zwischen-") Relation ζ zu definieren: (A) mit Hilfe einer Anordnung von K wie üblich, (B) mit Hilfe eines nichttrivialen Bewertungsringes R von K wie folgt. Der Punkt B liegt zwischen den Punkten A und C, wenn A,B,C kollinear und paarweise verschieden sind und das Streckenverhältnis AB/AC in R liegt. Es werden Bedingungen angegeben, denen die Restriktion ζ' von ζ auf $\mathfrak{J}$ in dem Fall genügt, daß $\mathfrak{J}$ konvex bezüglich ζ ist, und die umgekehrt hinreichend dafür sind, daß ζ' eine in diesem Sinne durch eine Anordnung oder einen Bewertungsring in $\mathfrak{J}$ gegebene Zwischenrelation ist.

DILLER, J.: Die metrischen Ebenen mit freier Beweglichkeit.

Der Vortrag gab eine algebraische Beschreibung der Cosinusmengen nicht metrisch-euklidischer, nicht elliptischer metrischer Ebenen mit freier Beweglichkeit (sog. FB-Ebenen). Dieses Problem wird zurückgeführt auf die Charakterisierung angeordneter metrischer Ebenen. Denn jede FB-Ebene E besitzt zu passenden Anordnungen ihres pythagoreischen Koordinatenkörpers konvexe Hüllen in ihrer Idealebene, die angeordnete metrische Ebenen sind, und E ist der Durchschnitt dieser sämtlichen konvexen Hüllen. Da die Cosinusmengen angeordneter Ebenen von PEJAS angegeben worden sind, lassen sich auch die der FB-Ebenen durch gewisse Teilringe des Koordinatenkörpers beschreiben.

BARLOTTI, A.: Projektivitäten in offenen Ebenen.

In einer offenen (lokal freien) projektiven Ebene hat die Gruppe G_r der Projektivitäten einer Geraden auf sich folgende Eigenschaften.

I. Die Identität läßt sich nicht als nicht leeres unverkürzbares Produkt von Perspektivitäten darstellen. Folgerungen: a) Jede Projektivität kann auf genau eine Weise als unverkürzbares Produkt von Perspektivitäten dargestellt werden. - b) Wenn $1 \neq \omega \in G_r$, so ist $\omega^k \neq 1$ für jede ganze Zahl $k \neq 0$. - c) Wenn $\omega_1, \omega_2 \in G_r$, so ist $\omega_1 \omega_2 = \omega_2 \omega_1$ dann und nur dann, wenn ω_1 und ω_2 in einer zyklischen Untergruppe liegen.

II. Für die Gruppe G_r läßt sich ein System von Erzeugenden und Relationen angeben, aus dessen Form unmittelbar die Existenz freier Untergruppen mit unendlich vielen Erzeugenden folgt.

III. G_r ist 3-fach transitiv auf den Punkten von r, und nur die Identität läßt 6 verschiedene Punkte fest. Ist die Ebene frei, so ist G_r nicht 4-fach transitiv.

LÜNEBURG, H.: Über eine Klasse endlicher Möbiusebenen.

Es werden verschiedene Kennzeichnungen der bisher (April 1963) bekannten endlichen Möbiusebenen gegeben. Als typisches Beispiel für diese Kennzeichnungen sei der folgende Satz zitiert: Eine endliche Möbiusebene $\mathfrak{M}$, die eine Gruppe von Kreisverwandtschaften besitzt, die auf den Punkten von $\mathfrak{M}$ zweifach transitiv ist und in der die Identität die einzige Kreisverwandtschaft ist, die 3 verschiedene Fixpunkte besitzt, ist entweder miquelsch oder aber $\mathfrak{M}$ ist eine Möbiusebene, die mit Hilfe einer der neuen einfachen Gruppen von

DILLER, J.: <u>Die metrischen Ebenen mit freier Beweglichkeit.</u>

Der Vortrag gab eine algebraische Beschreibung der Cosinusmengen nicht metrisch-euklidischer, nicht elliptischer metrischer Ebenen mit freier Beweglichkeit (sog. FB-Ebenen). Dieses Problem wird zurückgeführt auf die Charakterisierung angeordneter metrischer Ebenen. Denn jede FB-Ebene E besitzt zu passenden Anordnungen ihres pythagoreischen Koordinatenkörpers konvexe Hüllen in ihrer Idealebene, die angeordnete metrische Ebenen sind, und E ist der Durchschnitt dieser sämtlichen konvexen Hüllen. Da die Cosinusmengen angeordneter Ebenen von PEJAS angegeben worden sind, lassen sich auch die der FB-Ebenen durch gewisse Teilringe des Koordinatenkörpers beschreiben.

BARLOTTI, A.: <u>Projektivitäten in offenen Ebenen.</u>

In einer offenen (lokal freien) projektiven Ebene hat die Gruppe G_r der Projektivitäten einer Geraden auf sich folgende Eigenschaften.

I. Die Identität läßt sich nicht als nicht leeres unverkürzbares Produkt von Perspektivitäten darstellen. Folgerungen: a) Jede Projektivität kann auf genau eine Weise als unverkürzbares Produkt von Perspektivitäten dargestellt werden. - b) Wenn $1 \neq \omega \in G_r$, so ist $\omega^k \neq 1$ für jede ganze Zahl $k \neq 0$. - c) Wenn $\omega_1, \omega_2 \in G_r$, so ist $\omega_1 \omega_2 = \omega_2 \omega_1$ dann und nur dann, wenn ω_1 und ω_2 in einer zyklischen Untergruppe liegen.

II. Für die Gruppe G_r läßt sich ein System von Erzeugenden und Relationen angeben, aus dessen Form unmittelbar die Existenz freier Untergruppen mit unendlich vielen Erzeugenden folgt.

III. G_r ist 3-fach transitiv auf den Punkten von r, und nur die Identität läßt 6 verschiedene Punkte fest. Ist die Ebene frei, so ist G_r nicht 4-fach transitiv.

LÜNEBURG, H.: <u>Über eine Klasse endlicher Möbiusebenen.</u>

Es werden verschiedene Kennzeichnungen der bisher (April 1963) bekannten endlichen Möbiusebenen gegeben. Als typisches Beispiel für diese Kennzeichnungen sei der folgende Satz zitiert: Eine endliche Möbiusebene $\mathfrak{M}$, die eine Gruppe von Kreisverwandtschaften besitzt, die auf den Punkten von $\mathfrak{M}$ zweifach transitiv ist und in der die Identität die einzige Kreisverwandtschaft ist, die 3 verschiedene Fixpunkte besitzt, ist entweder miquelsch oder aber $\mathfrak{M}$ ist eine Möbiusebene, die mit Hilfe einer der neuen einfachen Gruppen von

SUZUKI konstruiert wurde. Umgekehrt besitzt jede solche Möbiusebene eine Gruppe von Kreisverwandtschaften der oben beschriebenen Art.

EWALD, G.: Über räumliche Möbiusgeometrien.

Gegeben sei ein dreidimensionaler affiner Raum über einem Schiefkörper mit involutorischem Antiautomorphismus und Charakteristik $\neq 2$. Der Vortrag berichtete über eine Klasse schwach konvexer Quadriken dieses Raumes, die eine verallgemeinerte Kugelgeometrie liefern. Eigenschaften dieser Geometrie, insbesondere Schnitteigenschaften von Quadriken, wurden hergeleitet.

DICUONZO, V.: Über verallgemeinerte metrische Räume.

Es wurden Gruppen mit einem invarianten System von involutorischen Erzeugenden (Ebenenspiegelungen) und deren Gruppenräume betrachtet. Als Axiome nimmt man den "dreidimensionalen" Satz von den 3 Spiegelungen und 2 weitere Axiome über die Existenz gewisser Punkte und Ebenen im Gruppenraum. Es gilt dann: 1. Es gibt 4 nichtkomplanare "eigentliche" Punkte. 2. Die Gruppe ist zweispiegelig. 3. Das Zentrum besteht entweder aus dem Einselement oder aus dem Einselement und einer Erzeugenden.

LEHTI, R.: Baryzentrischer Kalkül und affine Abbildungen.

Es wurde ein Axiomensystem für einen durch eine baryzentrischen Kalkül definierten Punktraum gegeben und gezeigt, daß man auf Grund dieser Axiome einen mit dem Punktraum verknüpften Vektorraum konstruieren kann. Affine Abbildungen werden als Abbildungen definiert, die mit der Grundoperation des baryzentrischen Kalküls kommutieren. Wenn in dem ursprünglichen Punktraum der Satz von PAPPOS gilt, kann man auch für die affinen Abbildungen einen baryzentrischen Kalkül definieren. Die Verwendbarkeit dieser Begriffe wurde durch einige Beispiele erleuchtet.

SZMIELEW, W.: Mehrstellige Äquivalenzrelationen und ihre Anwendung auf die affine Geometrie.

Der Begriff der 3-stelligen Äquivalenzrelation in einer Menge S kann zu dem Begriff einer Äquivalenzfolge $R_2, R_3, \ldots, R_n, \ldots$ in S erweitert werden: $R_n \subset S^n$, R_2 ist die Identität,

$$\bigvee_{i=1}^{n} R_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \Longrightarrow R_n(x_1, \ldots, x_n) \text{ für } n > 2,$$

$$\sim R_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} R_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_i) \Longrightarrow R_n(x_1, \ldots, x_n) \text{ für}$$

$n > 2$. Auf übliche Weise werden Äquivalenzklassen erklärt, Der Durchschnitt zweier Äquivalenzklassen bez. R_n ist entweder leer oder eine Äquivalenzklasse bez einem R_k ($k \leqq n$). - In der affinen Geometrie hat man in $=$, L, $L_4, \ldots, L_m, \ldots$ eine Äquivalenzfolge, wo L Kollinearität bedeutet, und $L_m(a_1, \ldots a_m) \Longleftrightarrow$

$$\bigvee_{1 \leq k < l \leq m} \exists_x \left\{ L(\pi_k a_l x) \wedge L_{m-1}(a_1 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_{l-1} a_{l+1} \ldots a_m x) \right\} \text{ für}$$

$m > 3$. Die Dimension n ist gekennzeichnet durch

$$\exists_{a_1, \ldots, a_{n+1}} \sim L_{n+1}(a_1 \ldots a_{n+1}) \text{ und } \bigvee_{a_1, \ldots, a_{n+2}} L_{n+2}(a_1 \ldots a_{n+2}) \}.$$

Die k-dimensionalen Unterräume werden gerade von den Äquivalenzklassen bez. L_{k+2} gebildet.

BURMESTER, M.V.D.: <u>Über eine verallgemeinerte Isotopie von (planaren) ternären Ringen und über die Nichteinzigkeit von distributiven V-W-Systemen.</u>

Zwei ternäre Ringe T, T' sind isotop, falls es 3 eineindeutige Abbildungen S, P, Q derart gibt:

$$(x,m,b)T = ((xQ, mP, bS)T')S^{-1}, \quad OS = OQ = OP = O.$$

Bei V-W-Systemen und Divisions-Algebren fällt diese Isotopie mit der von Skornjakov bzw. Albert zusammen und kann geometrisch so beschrieben werden: Sind T, T' Skornjakov-Ternare bezüglich Dreiecken der Ebenen π bzw. π', dann ist T genau dann isotop zu T', wenn es einen Isomorphismus von π auf π' gibt, der das Grunddreieck von T in das von T' überführt. Für Dickson-Divisions-Algebren $D(k;j)$ ($k = 0, \ldots, n-1$) der Ordnung p^{2n} gilt: $D(k;j)$ ist zu $D(k';j)$ genau dann isotop, wenn $k = k'$ oder $k' + k = n$ ist. Deshalb kann man für $n > 2$ stets nicht-isotope Dickson-Algebren finden. Diese definieren nach A.A.Albert nicht isomorphe Ebenen.

PETKANTSCHIN, B.: <u>Über das Kleinsche Modell der hyperbolischen Geometrie.</u>

Es werden die Kongruenzaxiome im Kleinschen Modell der hyperbolischen Geometrie in der euklidischen Geometrie bewiesen, ohne Heranziehen der automorphen Kollineationen der Grundkugel S. Einer hyp. Strecke AB ordnet man das Doppelverhältnis $(UVU'V') > 1$ zu; R, R' mit $AR|BR'$ sind die auf der Geraden AB liegenden Punkte von S. Einem hyp. Winkel UOV ordnet man das Doppelverhältnis $(UVU'V') > 1$ zu; U, V bzw. U', V' sind die auf den Schenkeln bzw. auf den Geraden OU, OV liegenden Punkte von S. Mit Hilfe der ebenen euklidischen analytischen Geometrie findet man, daß die den Seiten und Winkeln eines hyp. Dreiecks zugeordneten Zahlen f, g, h, F, G, H sich durch 3 Zahlen L, M, N vermittels der Formeln

$$f = (L + \sqrt{L^2-1}) : (L - \sqrt{L^2-1}), \quad F = \frac{2\sqrt{M^2-1}\sqrt{N^2-1}}{\sqrt{M^2-1}\sqrt{N^2-1} + MN - L}, \ldots \text{(zyklisch)}$$

ausdrücken lassen. Daraus folgt gleich das letzte Kongruenzaxiom. Die übrigen Kongruenzaxiome beweist man viel leichter.

BIALLAS, D.: <u>Fortsetzung von Ordnungsfunktionen auf Paare komplementärer Räume eines n-dimensionalen projektiven Raumes</u>.

Der von SPERNER in die Geometrie eingeführte Begriff der Ordnungsfunktionen für Punkte und Hyperebenen wird erweitert auf komplementäre Raumpaare. Im wesentlichen lassen sich alle Ergebnisse auch auf diesen Fall übertragen. Ordnungsfunktionen für komplementäre Räume gibt es stets dann, wenn man solche für Punkte und Hyperebenen angeben kann, die der Hyperebenenrelation genügen. Für den 3-dimensionalen projektiven Raum erhält man: Eine Konfiguration aus 4 Geraden mit wenigstens 2 windschiefen Paaren trennt sich genau dann, wenn die Tangentialebenen an die Plückerquadrik in 2 Punkten dieser Konfiguration die beiden übrigen Punkte der Konfiguration im P^5 trennt. Zum Beweise aller Ergebnisse wird wesentlich das verallgemeinerte Doppelverhältnis nach A. FUHRMANN benutzt.

BERGAU, P.: <u>Über eine Klasse irreflexibler "regular maps"</u>.

Für den Begriff "regular map" nach COXETER und MOSER wird eine rein gruppentheoretische Definition gegeben. Außerdem wird bewiesen: Ein auf einer orientierbaren Fläche gelegenes regular map mit n Ecken, von denen je zwei durch eine eindeutig bestimmte Kante verbunden sind, ist reflexibel für $n = 3$ und $n = 4$, jedoch irreflexibel für $n > 4$. Die Existenz eines solchen regular map ist gesichert, sofern n eine Primzahlpotenz ist.

SALZMANN, H.: <u>Klassifikation topologischer projektiver Ebenen</u>.

Betrachtet werden nur lokal kompakte, zweidimensionale projektive Ebenen. Ihre Kollineationsgruppe Γ ist in der Topologie der punktweisen Konvergenz eine höchstens 8-dimensionale Lie-Gruppe. Alle Ebenen, in denen sich wenigstens eine Fahne lokal frei bewegen läßt, d.h. für die $\dim \Gamma \geqq 3$ ist, lassen sich vollständig angeben. Die einzigen Ebenen mit $\dim \Gamma \geqq 4$ sind die Moulton-Ebenen. Es gibt 3 Familien von Ebenen mit $\dim \Gamma = 3$, bei denen Γ genau 2 Punkte und 2 Geraden bzw. eine Fahne bzw. keinen Punkt und keine Gerade fest läßt; sie hängen von 3 bzw. 2 bzw. 1 reellen Parametern ab. -

$$f = (L + \sqrt{L^2-1}):(L-\sqrt{L^2-1}), \quad F = \frac{2\sqrt{M^2-1}\sqrt{N^2-1}}{\sqrt{M^2-1}\sqrt{N^2-1} + MN-L}, \ldots, (\text{zyklisch})$$

ausdrücken lassen. Daraus folgt gleich das letzte Kongruenzaxiom. Die übrigen Kongruenzaxiome beweist man viel leichter.

BIALLAS, D.: Fortsetzung von Ordnungsfunktionen auf Paare komplementärer Räume eines n-dimensionalen projektiven Raumes.

Der von SPERNER in die Geometrie eingeführte Begriff der Ordnungsfunktionen für Punkte und Hyperebenen wird erweitert auf komplementäre Raumpaare. Im wesentlichen lassen sich alle Ergebnisse auch auf diesen Fall übertragen. Ordnungsfunktionen für komplementäre Räume gibt es stets dann, wenn man solche für Punkte und Hyperebenen angeben kann, die der Hyperebenenrelation genügen. Für den 3-dimensionalen projektiven Raum erhält man: Eine Konfiguration aus 4 Geraden mit wenigstens 2 windschiefen Paaren trennt sich genau dann, wenn die Tangentialebenen an die Plückerquadrik in 2 Punkten dieser Konfiguration die beiden übrigen Punkte der Konfiguration im P^5 trennt. Zum Beweise aller Ergebnisse wird wesentlich das verallgemeinerte Doppelverhältnis nach A. FUHRMANN benutzt.

BERGAU, P.: Über eine Klasse irreflexibler "regular maps".

Für den Begriff "regular map" nach COXETER und MOSER wird eine rein gruppentheoretische Definition gegeben. Außerdem wird bewiesen: Die auf einer orientierbaren Fläche gelegenen regulär map mit n Ecken, von denen je zwei durch eine eindeutig bestimmte Kante verbunden sind, ist reflexibel für n = 3 und n = 4, jedoch irreflexibel für $n > 4$. Die Existenz einer solchen regular map ist gesichert, sofern n eine Primzahlpotenz ist.

SALZMANN, H.: Klassifikation topologischer projektiver Ebenen.

Betrachtet werden nur lokal kompakte, zweidimensionale projektive Ebenen. Ihre Kollineationsgruppe Γ ist in der Topologie der punktweisen Konvergenz eine höchstens 8-dimensionale Lie-Gruppe. Alle Ebenen, in denen sich wenigstens eine Fahne lokal frei bewegen läßt, d.h. für die $\dim \Gamma \geq 3$ ist, lassen sich vollständig angeben. Die einzigen Ebenen mit $\dim \Gamma \geq 4$ sind die Moulton-Ebenen. Es gibt 3 Familien von Ebenen mit $\dim \Gamma = 3$, bei denen Γ genau 2 Punkte und 2 Geraden bzw. eine Fahne bzw. keinen Punkt und keine Gerade fest läßt; sie hängen von 3 bzw. 2 bzw. 1 reellen Parametern ab. -

Eine Ebene mit einer nicht einfach zusammenhängenden, 3-dimensionalen Untergruppe Δ von Γ, die keinen Punkt fest läßt, ist die euklidische oder elliptische Ebene oder enthält die hyperbolische Ebene als Unterstruktur.

JUNKERS, W.: <u>Beziehungen zwischen mehrwertigen Ordnungsfunktionen und Inhaltsfunktionen auf Räumen endlicher Dimension.</u>

Unter Zugrundelegung eines affinen oder projektiven Raumes $\mathfrak{R}$ endlicher Dimension und einer kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$ werden einerseits diejenigen "$\mathfrak{A}$-Ordnungsfunktionen" (d.i. eine Verallgemeinerung des Begriffs der Ordnungsfunktion nach SPERNER auf den Wertebereich $\mathfrak{A}$) auf $\mathfrak{R}$ betrachtet, die der "Geradenrelation" genügen und andererseits diejenigen "$\mathfrak{A}$-Inhaltsfunktionen" (d.i. eine entsprechende Verallgemeinerung des Begriffs der Orientierungsfunktion nach GLOCK) auf $\mathfrak{R}$, für welche die "Hyperebenenrelation" gilt. Jene bilden eine Gruppe $\mathfrak{h}$, diese eine Gruppe $\mathfrak{h}^*$. Es werden anschaulich-konstruktive Verfahren angegeben, die einen Isomorphismus von $\mathfrak{h}$ auf $\mathfrak{h}^*$ vermitteln, indem man 2 beliebige Simplexe durch eine "Kette" von Paaren von in gewissem Sinne benachbarten Simplexen verbindet. Wesentlich ist, daß man zeigen kann, daß dabei die spezielle Wahl der Kette keine Rolle spielt.

DRESS, A.M.: <u>Lotschnittebenen über algebraischen Zahlkörpern.</u>

Es werden metrische Ebenen mit Zusatzaxiomen untersucht und vollständig algebraisch beschrieben. Die Zusatzaxiome lauten: 1. Je 2 auf zu einander senkrechten Geraden errichtete Lote schneiden sich (Lotschnittaxiom). 2. Der Koordinatenkörper der Ebene ist ein algebraischer Zahlkörper K. - Aus früherem ist bekannt, daß alle metrischen Ebenen über den verschiedenen perfekten Erweiterungen K_γ von K das Lotschnittaxiom erfüllen. Es wird gezeigt, daß alle Lotschnittebenen über K sich aus diesen durch Schnittbildung gewinnen lassen.

Van DALEN, D.: <u>Erweiterungsprobleme in der intuitionistischen Geometrie.</u>

Versucht man wie üblich die affine Ebene auf natürliche Weise in eine projektive Ebene einzubetten, so reichen dazu Parallelenbüschel nicht aus, weil man im allgemeinen nicht behaupten kann: $P \in l$ oder $P \notin l$. Also definiert man neue Punkte und Geraden auf homogene Weise. Bisher ist es noch nicht gelungen, alle Axiome der projektiven Ebene zu beweisen. Allerdings ist bewiesen, daß

Eine Ebene mit einer nicht einfach zusammenhängenden, 3-dimensionalen Untergruppe Δ von Γ, die keinen Punkt fest läßt, ist die euklidische oder elliptische Ebene oder enthält die hyperbolische Ebene als Unterstruktur.

JUNKERS, W.: <u>Beziehungen zwischen mehrwertigen Ordnungsfunktionen und Inhaltsfunktionen auf Räumen endlicher Dimension.</u>

Unter Zugrundelegung eines affinen oder projektiven Raumes $\mathfrak{R}$ endlicher Dimension und einer kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$ werden einerseits diejenigen "$\mathfrak{A}$-Ordnungsfunktionen" (d.i. eine Verallgemeinerung des Begriffs der Ordnungsfunktion nach SPERNER auf den Wertebereich $\mathfrak{A}$) auf $\mathfrak{R}$ betrachtet, die der "Geradenrelation" genügen und andererseits diejenigen "$\mathfrak{A}$-Inhaltsfunktionen" (d.i. eine entsprechende Verallgemeinerung des Begriffs der Orientierungsfunktion nach GLOCK) auf $\mathfrak{R}$, für welche die "Hyperebenenrelation" gilt. Jene bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$, diese eine Gruppe $\mathcal{G}^*$. Es werden anschaulich-konstruktive Verfahren angegeben, die einen Isomorphismus von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{G}^*$ vermitteln, indem man 2 beliebige Simplexe durch eine "Kette" von Paaren von in gewissem Sinne benachbarten Simplexen verbindet. Wesentlich ist, daß man zeigen kann, daß dabei die spezielle Wahl der Kette keine Rolle spielt.

DRESS, A.M.: <u>Lotschnittebenen über algebraischen Zahlkörpern.</u>

Es werden metrische Ebenen mit Zusatzaxiomen untersucht und vollständig algebraisch beschrieben. Die Zusatzaxiome lauten: 1. Je 2 auf zu einander senkrechten Geraden errichtete Lote schneiden sich (Lotschnittaxiom). 2. Der Koordinatenkörper der Ebene ist ein algebraischer Zahlkörper K. - Aus früherem ist bekannt, daß alle metrischen Ebenen über den verschiedenen perfekten Erweiterungen K von K das Lotschnittaxiom erfüllen. Es wird gezeigt, daß alle Lotschnittebenen über K sich aus diesen durch Schnittbildung gewinnen lassen.

Van DALEN, D.: <u>Erweiterungsprobleme in der intuitionistischen Geometrie.</u>

Versucht man wie üblich die affine Ebene auf natürliche Weise in eine projektive Ebene einzubetten, so reichen dazu Parallelenbüschel nicht aus, weil man im allgemeinen nicht behaupten kann: $P \in l$ oder $P \notin l$. Also definiert man neue Punkte und Geraden auf homogene Weise. Bisher ist es noch nicht gelungen, alle Axiome der projektiven Ebene zu beweisen. Allerdings ist bewiesen, daß die projektive Erweiterung, falls sie existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. - Die Konstruktion einer affinen Ebene über einem Ternärkörper ist schwieriger. Man weiß nur, daß eine solche Ebene, falls sie existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.- Die Übertragung der Anordnung eines Ternärkörpers einer projektiven Ebene auf die Ebene ist gelungen. Die in titutionistischen Schwierigkeiten in diesen Problemen stammen meistens von Disjunktionen in der klassischen Theorie, also von der inhomogenen Behandlungsweise.

ARNOLD, H.J.: Axiomatische Betrachtungen zum Austauschsatz.

Gegeben sei eine Menge $\mathfrak{M} = \{A, B, \ldots\}$ und eine "Hüllenoperation" auf $\mathfrak{M}$. Wir verstehen darunter eine Abbildung der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ in sich. Das Bild von $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ bei dieser Abbildung werde mit $\overline{\mathfrak{A}}$ bezeichnet. Gefordert werden die 3 üblichen Hüllenaxiome: 1. $\mathfrak{A} \subset \overline{\mathfrak{A}}$, 2. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}$, 3. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \Longrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \subset \overline{\mathfrak{B}}$. $\mathfrak{B}$ heißt unabhängig, wenn $\overline{\mathfrak{B} - \{B\}} \neq \overline{\mathfrak{B}}$ für alle $B \in \mathfrak{B}$. Es werden verschiedene hinreichende Bedingungen angegeben für die Gültigkeit des Austauschsatzes: "Ist $\mathfrak{B}$ unabhängig und $\mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{A}}$, so gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, welche zu $\mathfrak{B}$ gleichmächtig ist, derart daß $\overline{(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}') \cup \mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}}$ gilt." - Die Tragweite des Austauschsatzes wird sodann mit der des Basissatzes verglichen. Beziehungen zwischen unseren Hüllensystemen mit Austauschsatz und solchen, wie sie in der Algebra und Geometrie auftreten, werden erörtert.

GÖTZKY, M.: Eine Kennzeichnung der unitären Gruppen.

(K,V) sei eine lineare Mannigfaltigkeit, wobei man unter K einen Schiefkörper von Charakteristik $\neq 2$ und unter V einen n-dimensionalen Linksvektorraum über K zu verstehen hat. f sei eine nichtausgeartete α-symmetrische Semibilinearform auf V mit involutorischem Antiautomorphismus α auf K. Das Tripel (K,V;f) heißt unitärer Raum, und die Gruppe derjenigen linearen Abbildungen von V auf sich, die f invariant lassen, heißt unitäre Gruppe. Eine unitäre Gruppe $U_n(K,f)$ wird nach DIEUDONNÉ durch diejenigen linearen Abbildungen erzeugt, die eine Hyperebene von (K,V) vektorweise fest lassen. Es wurde ein Axiomensystem angegeben, das alle unitären Gruppen $U_n(K,f)$ mit $n > 3$ kennzeichnet, in denen es zu jeder Hyperebene von (K,V) eine unitäre Abbildung gibt, die diese Hyperebene vektorweise fest läßt. Damit sind bis auf die orthogonalen, nicht elliptische Gruppen alle unitären Gruppen erfaßt.

KARZEL, H.: Kommutative Inzidenzgruppen.

Eine Menge G, die mit 2 Strukturen versehen ist, nämlich mit einer Gruppenstruktur und der Struktur eines projektiven Raumes, nennen wir Inzidenzgruppe, wenn jede Linkstranslation $x \longrightarrow ax$ $(a, x \in G)$ von G auf sich eine Projektivität des projektiven Raumes ist. Für jede kommutative desarguessche Inzidenzgruppe G mit $2 \leqq \dim G < \infty$ gilt: G ist isomorph zu einer Faktorgruppe F^*/K^*, wobei F ein kommutativer Körper und K ein Teilkörper von F ist mit $2 < [F : K] < \infty$.

- - - - - - - - - - - - - - - - -

Im Sonderprogramm des Frankfurter Seminars hörte man folgende Vorträge:

LÜNEBURG, H.: Über endliche projektive Ebenen vom Lenz-Barlotti-Typ III-1 und III-2.

Es werden verschiedene Kennzeichnungen endlicher desarguesscher Ebenen bewiesen, die vermuten lassen, daß es keine endlichen Ebenen vom L-B-Typ III-1 und III-2 gibt. (Im Unendlichen liefern die verallgemeinerten Moulton-Ebenen Beispiele für beide Typen.) Mit Hilfe dieser Kennzeichnungen läßt sich bisher jedoch nur folgendes beweisen:

1. Es gibt keine endlichen Ebenen gerader Ordnung vom L-B-Typ III-2
2. Eine endliche Ebene gerader Ordnung vom L-B-Typ III-1 hat quadratische Ordnung.
3. Eine endliche Ebene vom L-B-Typ III-2 hat ungerade Ordnung, und die große projektive Gruppe einer solchen Ebene operiert nicht speziell.

Hilfsmittel für den Beweis dieser Sätze sind einige recht tiefliegende Resultate von SUZUKI, FEIT und ITO über zweifach transitive Permutationsgruppen.

SALZMANN, H.: Topologische Ebenen vom Lenz-Typ III.

Sei $\mathbb{P}$ eine lokal kompakte, zweidimensionale topologische projektive Ebene und Γ ihre Kollineationsgruppe in der Topologie der punktweisen Konvergenz. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(1) $\mathbb{P}$ ist eine echte Moulton Ebene.

(2) $\mathbb{P}$ hat den Lenz-Typ III.

(3) $\mathbb{P}$ hat den Barlotti-Typ III-2.

(4) Γ ist vierdimensional.

(5) $\mathbb{P}$ besitzt eine zusammenhängende, 3-dimensionale Gruppe von Kollineationen, die ein nicht-inzidentes Punkt-Geraden-Paar als einzige Fixelemente hat.

(6) Γ hat eine Untergruppe Λ isomorph zur einfach zusammenhängenden Überlagerungsgruppe $\tilde{\Omega}$ von $PSL_2(R)$.

(7) Die kleine projektive Gruppe Λ ist isomorph zu $\tilde{\Omega}$.

E. Glock (Stuttgart)