Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Endliche Strukturen

4. bis 8. Juni 1963

Die in den letzten Jahren immer mehr sichtbar werdenden Verbindungen zwischen den endlichen Geometrien, den endlichen Gruppen und anderen endlichen Strukturen waren der Anlaß, zu einer Tagung über endliche Strukturen nach Oberwolfach einzuladen. Der Tagungsleiter war Herr Professor Dr. R. BAER (Frankfurt a.M.). Die Vorträge und die sich an diese anschließenden Diskussionen und Gespräche, die, wie verschiedene neue Ergebnisse zeigen, recht fruchtbar waren, erfüllten alle Erwartungen, die an diese Tagung gestellt worden waren.

Folgende Damen und Herren nahmen an der Tagung teil:

England:	D.A. FOULSER, Oxford
Italien:	A. BARLOTTI, Florenz
	Judita COFMAN, z.Zt. Rom
	V. CORBAS, Rom
	L.A. ROSATI, Florenz
	B. SEGRE, Rom
	G. ZAPPA, Florenz
Kanada:	W.J. JONSSON, Winnipeg
USA:	R.H. BRUCK, Madison
	D.G. HIGMAN, Ann Arbor
	D.R. HUGHES, Ann Arbor
	J.E. MC LAUGHLIN, Ann Arbor
	T.G. OSTROM, Pullman
Deutschland:	R. BAER, Frankfurt a.M.
	A. BRANDIS, Göttingen
	S. BREITSPRECHER, Gießen
	L. DANZER, Göttingen
	P. DEMBOWSKI, Frankfurt a.M.
	B. FISCHER, Frankfurt a.M.
	E. GLOCK, Stuttgart
	H. HEINEKEN, Frankfurt a.M.

Frau HEINEKEN, Frankfurt a.M.
Chr. HERING, Frankfurt a.M.
J. JOUSSEN, Hamburg
G. KALMBACH, Göttingen
W. KAPPE, Frankfurt a.M.
Frau L. KAPPE, Frankfurt a.M.
H. KARZEL, Hamburg
O.H. KEGEL, Frankfurt a.M.
H. LÜNEBURG, Frankfurt a.M.
H. SALZMANN, Frankfurt a.M.

Die Vorträge im einzelnen:

R.H. BRUCK: An application of the theory of loops to the theory of Steiner triple systems.

Let G be a finite commutative Moufang loop. Such a loop has order 3^n. For all $n \geqslant 4$, there exists a commutative Moufang loop of order 3^n which is not an abelian group. A Steiner triple system has the property that every triangle generates an S(9) if and only if the triples have the form $x, y, x^{-1}y^{-1}$, $x \neq y$, where the elements are chosen from a commutative Moufang loop G. The collineation group of the Steiner triple system is simply transitive - and is doubly transitive precisely when G is an abelian group. This sharpens a theorem of Marshall Hall. The paper considers the general problem of coordinatizing Steiner triple systems by loops, with special attention to collineation groups.

J.E. MC LAUGHLIN: Transitive subgroups of the unitary group.

Let $\mathbb{P}$ be a desarguesian projective space of dimension $d \geqslant 2$ and of order q^2 and suppose δ is a polarity of unitary type on $\mathbb{P}$. If G is a subgroup of the group $T(\delta)$ of unimodular collineations which commute with δ and if G is transitive on pairs of absolute points spanning totally singular lines then $G = T(\delta)$ in the following cases: $q \neq 2$ and $d \leq 8$; $q = 2$ and $d = 2,3,4,6,7$, I know of no case in which G (with above hypotheses) is not $T(\delta)$.

D.R. HUGHES: Some observations on inversive planes.

An inversion of an inversive plane is an automorphism fixing all the points of a circle. (1) A non-identity inversion has order two. (2) If there are inversions for each circle through a point P, then these inversions generate a group which contains a transitive

translation group on the affine plane with respect to P, so the inversive plane has prime-power order. If a plane of even order has inversions with respect to every circle, then the plane is Miquelian.

D. FOULSER: Solvable flag transitve affine groups.

Huppert's classification of solvable doubly transitve permutation-groups can be extended to solvable flag transitive collineation-groups of finite affine translation planes. In particular, the sharply flag transitive affine groups can be completely specified. As a result, every solvable flag transitive affine group occurs as a collineation-group of a Desarguesian affine plane or of the near-field plane of order 9. However, it is possible that such a group acts flag transitively on several non-isomorphic affine planes. E.g., $G = T\langle \omega^{12}, \omega^{3}\alpha \rangle$ is a flag transitive collineation-group both of the Desarguesian affine plane of order 25 and of a non-Desarguesian affine plane of the same order.

H. LÜNEBURG: Über endliche projektive Ebenen vom L-B-Typ I,6.

Es wurde gezeigt, daß es keine endlichen projektiven Ebenen ungerader Ordnung vom L-B-Typ I,6 gibt. Für Ebenen gerader Ordnung und für unendliche Ebenen ist die Frage der Existenz solcher Ebenen nach wie vor unbeantwortet.

B. FISCHER: Distributive Quasigruppen endlicher Ordnung.

Ist D eine Quasigruppe mit der Multiplikation "o" und den Eigenschaften $(aob)oc = (aoc)o(boc)$,

$ao(boc) = (aob)o(aoc)$ für alle $a,b,c \in D$,

so ist D eine distributive Quasigruppe.

Satz: Ist D eine endliche distributive Quasigruppe, so ist die von den Rechtsmultiplikationen erzeugte Automorphismengruppe von D auflösbar.

Chr. HERING: Eine Klassifizierung der Möbiusebenen.

Seien in einer Möbiusebene M (im engeren Sinne) A, B verschiedene Punkte, c ein Kreis durch A und B und d das Berührbüschel durch A an c. Eine Gruppe A von Automorphismen von M heiße (A,B)-transitiv, wenn die Untergruppe aller Automorphismen von A, die alle Kreise durch A und B festlassen, auf $c - \{A,B\}$ transitiv ist und (A,d)-transitiv, wenn die Untergruppe aller Automorphismen von A, die jeden Kreis aus d und keinen Punkt $\neq$ A fest lassen, auf $c - \{A\}$

transitiv ist. Es wurde untersucht, welche Struktur das System der Paare A,B und A,d haben kann, für die A (A,B)- bzw. (A,d)-transitiv ist. Dabei ergab sich eine Einteilung in 17 Typen. Für 13 Typen sind Beispiele bekannt. Definiert man den Typ einer Möbiusebene als den Typ ihrer vollen Automorphismengruppe, so erhält man eine Klassifizierung der Möbiusebenen.

J. COFMAN: Endliche nichtdesarguessche projektive Ebenen, die von vier Punkten erzeugt werden.

Herr Killgrove hat die Vermutung ausgesprochen, daß jede endliche, nichtdesarguessche projektive Ebene von vier Punkten erzeugt sei. Er hat die Richtigkeit seiner Vermutung für die nichtdesarguesschen Ebenen der Ordnung $n < 12$ bewiesen.

Hier werden drei Klassen von Translationsebenen angegeben, für die die Vermutung richtig ist.

(1) Die projektiven Ebenen der Ordnung p^{2n} über Hall-Quasikörpern.

(2) Die projektiven Ebenen über einem Fastkörper der Ordnung p^2.

(3) Die projektiven Ebenen der Ordnung p^2 über den "semi-nuclear division rings" von Hughes und Kleinfeld.

G. ZAPPA: Endliche projektive Ebenen mit einer Polarität.

Es wurde über ein kürzlich gefundenes Resultat von R. Magari (Florenz) referiert und einige damit zusammenhängende Probleme untersucht. Eine nicht leere Menge P heißt projektives Gruppoid, wenn in P eine Operation "o" mit den folgenden Eigenschaften erklärt ist:

(1) $x, y \in P$, $x \neq y$, daraus folgt $xoy \in P$.

(2) $xoy = yox$.

(3) $x \neq y \neq z$, $xoy = xoz$, daraus folgt $(xoy)o(xoz) = x$. R. Magari hat gezeigt, daß sich jeder projektiven Ebene $\mathbb{P}$, die eine Polarität p besitzt, ein projektives Gruppoid, welches aus den Punkten von $\mathbb{P}$ besteht, zuordnen läßt, indem man $xoy = p(xy)$ setzt, wenn $x \neq y$ zwei Punkte von $\mathbb{P}$ sind und xy ihre Verbindungsgerade ist und umgekehrt.

Die Automorphismen des projektiven Gruppoids werden durch die mit p vertauschbaren Kollineationen von $\mathbb{P}$ induziert. Mittels des Studiums der projektiven Gruppoide ist es möglich, zu einer Kennzeichnung gewisser endlicher projektiver Ebenen (desarguesscher Ebenen, Hughes-Ebenen etc.) zu gelangen, wenn man noch Eigenschaften der Gruppe der mit p vertauschbaren Kollineationen zu Hilfe nimmt.

H. KARZEL: Über endliche Inzidenzgruppen.

Eine Gruppe G, deren Elemente gleichzeitig Punkte eines projektiven Raumes der Dimension > 1 sind, heißt Inzidenzgruppe, wenn jede Linkstranslation $a^*: x \longrightarrow ax$ mit $a \in G$ eine Kollineation von G ist. Jeder desarguesschen Inzidenzgruppe G läßt sich ein normaler Fastkörper (F,K) (d.i. ein Fastkörper F, der einen Teilschiefkörper K enthält, so daß F hinsichtlich der Fastkörpermultiplikation ein Linksvektorraum über K und K^* ein Normalteiler von F^* ist) mit Rang $[F:K] > 2$ so zuordnen, daß G isomorph zur Faktorgruppe F^*/K^* ist. Mit Hilfe von Resultaten von Zassenhaus über endliche Fastkörper kann man alle endlichen normalen Fastkörper (F,K) mit Rang $[F:K] > 2$ bestimmen und somit auch alle endlichen desarguesschen Inzidenzgruppen.

B. SEGRE: On systems of subsets of a finite set and finite geometries.

A system of subsets of a finite set can be defined by its incidence matrix and possesses two dual structures having different degrees. The simplest structures pertain to specially important systems: the so-called tactical systems, which include balanced block designs as well as Steiner systems and are in many ways connected with finite geometries.

In particular, Galois' geometries can be used for constructing a number of those systems and solving some Kirkman problems also related to certain finite groups.

T.G. OSTROM: Semi-translation planes.

A semi-translation plane may be described as an affine plane of order q^2 admitting a group of translations transitive on a subplane of order q. The known semi-translation planes are either Hughes planes or are constructible from dual translation planes by a construction due to the author. The collineations and coordinate systems of these and related planes are investigated. Questions are raised as to the possible existence of other planes of this class.

A. BRANDIS: Endliche Gruppen mit einer Untergruppe, die gewisse Transformationsbedingungen erfüllt.

Ist G eine endliche Gruppe, H eine Untergruppe von G, die nicht Normalteiler ist in G, gilt ferner:

A) für $x \in G - H$, $h \in H - \{1\} \Longrightarrow xh \neq hx$

B) seien a, $z^{-1}az \in \bigcup_{x \in G} H^x - H$, dann gibt es ein Element $h \in H$, so daß $z^{-1}az = h^{-1}a\,h$,

dann ist G entweder isomorph zu einer Gruppe linearer Substitutionen $x \longrightarrow ax + b$, $a,b \in GF(q^k)$, $a \neq 0$ oder zu einer Gruppe gebrochen linearer Substitutionen $x \longrightarrow (ax+b)(cx+d)^{-1}$, $a,b,c,d \in GF(2^k)$, mit $ad - bc \neq 0$. Dabei ist H isomorph zu der Gruppe $x \longrightarrow ax$, bzw. $x \longrightarrow ax+b$. Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig, wie eine einfache Rechnung zeigt.

P. DEMBOWSKI: Finite inversive planes.

Theorem: A finite inversive plane (Möbiusebene im engeren Sinne; Benz, Jahresber. DMV 63 (1960) 1-27) is isomorphic to the system of points and plane sections of an ovoid (Tits, Rendiconti Math. e Appl. 21 (1962) 37-59) if, and only if, there is a relation "orthogonal", denoted by $\perp$, among the circles which satisfies the following axioms:

(I) $a \perp b \Longrightarrow b \perp a$

(II) $Q \neq P \; I \; c \Longrightarrow \exists! \, d \; I \; P,Q: \; d \perp c$

(III) $a,b \not\!\!I \; P,Q$, $a \neq b$, $P \neq Q$, $c \perp a,b \Rightarrow c \perp$ all $x \; I \; P,Q$.

For even order n, the following definition of orthogonality satisfies (I) - (III):

$$a \perp b \underset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} a = b \text{ or } |a \wedge b| = 1$$

Hence every inversive plane of even order is representable by an ovoid. Together with results of Tits (loc.cit.), this leads to a complete classification of even order inversive planes with doubly transitive automorphism groups.