Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Bericht

(10)

Arbeitstagung Professor Baer
21. bis 24. Juni 1963

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand eine Arbeitstagung unter Leitung von Herrn Professor Dr. R. BAER statt, an der außer seinen Frankfurter Mitarbeitern und Schülern auch Herr Professor Dr. W.J. JONSSON (Winnipeg, Canada) teilnahm. Die zwölf Vorträge während der Tagung behandelten Themen, die diesen Kreis besonders interessieren.

Folgende Damen und Herren nahmen teil:

R. BAER, W. BENZ, H.-H. BRUNGS, B. FISCHER, P. GROSSE, H. HEINEKEN, D. HELD, Chr. HERING, W. KAPPE, Frau L. KAPPE, O.H. KEGEL, W. LIEBERT, H. LÜNEBURG, H. MÄURER, H. MERTES, G. MICHLER, M. NEWELL, P. PLAUMANN, J. RUST, H. SALZMANN, Fräulein A. SCHLETTE, K. STRAMBACH, J. WALBAUM, H. WALTER, I. WEIDIG, R. WILLE, D. WÖLK (alle Frankfurt am Main) und W.J. JONSSON (Winnipeg, Canada).

Es folgen Kurzberichte über die Vorträge, die von den einzelnen Herren selbst verfaßt wurden.

H. WALTER: Reellwertige Funktionenringe.

Sei X ein vollständig regulärer T_1-Raum. Sei C(X) der Ring aller reellwertigen Funktionen auf X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

I
(1) X ist zusammenhängend
(2) Die 1 hat genau 2 Quadratwurzeln
(3) 0 und 1 sind die einzigen Idempotenten
(4) C(X) ist direkt unzerlegbar.

II
(1) X ist endlich
(2) In C(X) gilt die Minimalbedingung für Ideale
(3) In C(X) gilt die Maximalbedingung für Ideale
(4) Jedes maximale Ideal ist Hauptideal.

III
(1) Jedes $M^p = \{f,\ f(p) = 0\}$ ist Hauptideal.
(2) X ist diskret.

IV
(1) Jedes endlich erzeugte Ideal ist Hauptideal
(2) Positiv- und Negativbereich jeder Funktion sind vollständig getrennt
(3) Jede beschränkte Funktion auf $Z^c(f)$ ist stetig fortsetzbar
(4) $(f,g) = (|f| + |g|)\ ,\ \bigwedge f,g \in C\,C(X)$.

P. PLAUMANN: <u>Über einen Satz von Hsin Chu.</u>

Eine Untergruppe H einer topologischen Gruppe G heißt syndetisch, wenn es eine kompakte Teilmenge K von G gibt, so daß G = HK ist. In DUKE MATHEMATICAL JOURNAL Vol. 28, 1961, pp. 125-132 bewies Hsin Chu folgenden Satz:
Sei G eine lokal kompakte Gruppe ohne kompakte Untergruppen $\neq 1$. Wenn G eine zyklische syndetische Untergruppe besitzt, dann ist entweder G diskret und es ist G isomorph zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen, oder G ist zusammenhängend und es ist G isomorph und homöomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen mit der üblichen Topologie.
Für diesen Satz wurde ein vereinfachter Beweis gegeben.

P. GROSSE: <u>Homomorphismen abelscher Gruppen</u>.

A und W seien abelsche Gruppen, Hom (A,W) die Gesamtheit aller Homomorphismen σ von A in W. Durch die Verknüpfung $a(\sigma_1 + \sigma_2) = a\sigma_1 + a\sigma_2$, $a \in A$, wird Hom (A,W) eine abelsche Gruppe. Es sei $H_o = A$ und $H_i = \mathrm{Hom}(H_{i-1}, W)$ gesetzt. Voraussetzung:
(1) $H_n \simeq H_{n+j}$ mit $j > o$
(2) zu $a \in A$ existiert $\tau \in$ Hom (A,W) mit $a\tau \neq o$.

Satz 1: Aus (1), (2) und W nicht reduziert folgt $A = T \oplus D$, wobei T eine endliche Gruppe und D eine direkte Summe endlich vieler zu den rationalen Zahlen isomorpher Gruppen ist und D=o falls die Torsionsuntergruppe von W nicht reduziert ist; weiterhin gilt $H_i \simeq H_{i+1}$ für alle $i > o$.

Satz 2: Aus (1), (2) und W eine Torsionsgruppe oder $W_p \neq o$ für alle Primzahlen p folgt $H_1 \simeq H_3$ und $H_2 \simeq H_4$.

I. WEIDIG: Über Partitionen endlicher p-Gruppen.

Eine Menge σ von Untergruppen ($\neq 1$) heiße Partition, wenn σ die Gruppe überdeckt und wenn aus $U \cap V \neq 1$ mit $U, V \in \sigma$ folgt $U = V$. Sei α ein Epimorphismus der Gruppe. Unter σ^{α} verstehe man die Menge von Untergruppen $A^{\alpha} \neq 1$ mit A aus σ und $A^{\alpha} \subsetneqq B^{\alpha} \longrightarrow B \notin \sigma$. Für endliche p-Gruppen G erhält man dann folgende Aussagen:

1. σ sei eine normale Partition von G (d.h. $A \in \sigma \rightarrow A^{g} \sigma$). Genau dann bilden die σ^{α} für alle möglichen Epimorphismen α eine Partition, wenn σ aus einem Normalteiler und zyklischen Untergruppen der Ordnung p besteht.
2. Sei $G^{p} = 1$, sei α der Epimorphismus $G \Rightarrow G/K$, es existiere eine Untergruppe U von G mit a) $o(U^{\alpha}) \geqslant p^{3}$, b) $U' \subseteq \zeta U$, c) $K \neq 1 \rightarrow U \cap K \neq 1$.

Genau dann ist α ein Isomorphismus, wenn σ^{α} für alle möglichen Partitionen σ wieder eine Partition ist.

W. LIEBERT: Die minimalen Ideale im Endomorphismenring einer endlichen abelschen Gruppe.

Es wurde eine umkehrbar eindeutige Beziehung aufgezeigt zwischen allen minimalen Rechts- bzw. Linksidealen im Endomorphismenring und allen maximalen bzw. minimalen Untergruppen der zugrundegelegten endlichen abelschen Gruppe.

G. MICHLER: Zum Radikal von Fuchs.

Sei P ein assoziativer Ring und F sein Fuchs'sches Radikal. Ein potentes Rechtsideal ist ein Rechtsideal, in dem nicht alle Elemente Nilelemente sind. Es ist eine offene Frage, ob in allen Ringen P mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale P/F F-halbeinfach ist. (Vgl. F. Szasz Acta Sci. Math. Hung. 1961). Ein Beitrag hierzu ist der folgende

Satz: Es gelte im Ringe P die Minimalbedingung für potente Hauptrechtsideale. Wenn im Ringe P linksreguläre Elemente existieren, die nicht rechtsregulär sind, dann existiere unter ihnen ein a so, daß $Pa \geq aP$. Dann ist P/F halbeinfach im Sinne von Fuchs.

W.J. JONSSON: (C, γ, μ) Homogenität.

Eine Ebene heißt (C, γ, μ) homogen, wenn sie (C, γ) transitiv ist und außerdem eine Korrelation die C und γ vertauscht, deren Quadrat eine zentrale Kollineation ist, besitzt. Falls C I γ dann folgt die Existenz einer Polarität.

H. SALZMANN: Kennzeichnung der klassischen ebenen Geometrien.

Ist $\mathbb{P}$ eine lokal kompakte, zweidimensionale projektive Ebene und Δ eine (in der Topologie der punktweisen Konvergenz) dreidimensionale, zusammenhängende Gruppe von Kollineationen von $\mathbb{P}$, die keinen Punkt fest läßt, und ist Δ nicht einfach zusammenhängend und nicht die volle Kollineationsgruppe, so ist $\mathbb{P}$ desarguessch und Δ die euklidische, hyperbolische oder elliptische Bewegungsgruppe.

H. MÄURER: Involutionen in der Laguerregeometrie.

Es wurden an Hand des Zylindermodells, in dem die Speere und Zykel eineindeutig auf die Punkte und die nicht zur Zylinderachse parallelen ebenen Schnitte abgebildet sind, alle involutorischen Zykelverwandtschaften der Laguerregeometrie über dem reellen Zahlenkörper bestimmt.

1. Zykelspiegelungen (involutorische Abbn., die einen Zykel speerweise festlassen)
2. Laguerrespiegelungen (harm.Homologien mit einem nicht dem Zylinder angehörenden Punkt als Zentrum und der polaren Ebene als Achse.
3. Reihenspiegelungen (harm.Involutionen an polaren windschiefen Geraden.

Ferner wurden im Hinblick auf einen spiegelungsgeometrischen Aufbau der Laguerregeometrie, die einfachsten Eigenschaften dieser Involutionen angegeben.

H. HEINEKEN: Normierung von Kommutatoren.

Die Kommutatoren der Form (...((goa)ob)o...oy) heißen links normiert, die der Form (ao...o(uo(vow))...) rechts normiert. Man ist gewohnt, gleiche Ergebnisse zu erwarten, wenn zwei Bedingungen sich nur durch die Normierung unterscheiden. Von den Bedingungen D und der entsprechenden linksnormierten D' ist dies jedoch falsch, wenn es sich um die Bedingung handelt (D) Zu jedem a und b aus G gibt es ein c, so daß (ao(bog)) = cog für alle g aus G.

D-Gruppen und D'-Gruppen sind metabelsch; endlich erzeugte D-Gruppen sind nilpotent, aber endliche D'-Gruppen sind nicht unbedingt nilpotent. Vielmehr sind endliche D'-Gruppen direkte Produkte von A und B, wobei die Ordnung von B teilerfremd zu 6 ist und die Ordnung von A nur durch 2 und 3 teilbar ist. Außerdem liegt A^2 in der Fittinggruppe von A.

H. SALZMANN: Kennzeichnung der klassischen ebenen Geometrien.

Ist $\mathfrak{P}$ eine lokal kompakte, zweidimensionale projektive Ebene und Δ eine (in der Topologie der punktweisen Konvergenz) dreidimensionale, zusammenhängende Gruppe von Kollineationen von $\mathfrak{P}$, die keinen Punkt fest läßt, und ist Δ nicht einfach zusammenhängend und nicht die volle Kollineationsgruppe, so ist $\mathfrak{P}$ desarguesch und Δ die euklidische, hyperbolische oder elliptische Bewegungsgruppe.

H. MÄURER: Involutionen in der Laguerregeometrie.

Es wurden an Hand des Zylindermodells, in dem die Speere und Zykel eineindeutig auf die Punkte und die nicht zur Zylinderachse parallelen ebenen Schnitte abgebildet sind, alle involutorischen Zykelverwandtschaften der Laguerregeometrie über dem reellen Zahlenkörper bestimmt.

1. Zykelspiegelungen (involutorische Abbn., die einen Zykel speerweise festlassen)
2. Laguerrespiegelungen (harm.Homologien mit einem nicht dem Zylinder angehörenden Punkt als Zentrum und der polaren Ebene als Achse.
3. Reihenspiegelungen (harm.Involutionen an polaren windschiefen Geraden.

Ferner wurden im Hinblick auf einen spiegelungsgeometrischen Aufbau der Laguerregeometrie; die einfachsten Eigenschaften dieser Involutionen angegeben.

H. HEINEKEN: Normierung von Kommutatoren.

Die Kommutatoren der Form (..((gca)cb)c..cy) heißen links normiert, die der Form (ac..c(uc(vcw))..) rechts normiert. Man ist gewohnt, gleiche Ergebnisse zu erwarten, wenn zwei Bedingungen sich nur durch die Normierung unterscheiden. Von den Bedingungen D und der entsprechenden linksnormierten D' ist dies jedoch falsch, wenn es sich um die Bedingung handelt (D) Zu jedem a und b aus G gibt es ein c, so daß (ac(bcg)) = ccg für alle g aus G.
D-Gruppen und D'-Gruppen sind metabelsch; endlich erzeugte D-Gruppen sind nilpotent, aber endliche D'-Gruppen sind nicht unbedingt nilpotent. Vielmehr sind endliche D'-Gruppen direkte Produkte von A und B, wobei die Ordnung von B teilerfremd zu 6 ist und die Ordnung von A nur durch 2 und 3 teilbar ist. Außerdem liegt A^2 in der Fittinggruppe von A.

D. HELD: $\mathfrak{P}$ -Abgeschlossenheit und Engelbedingung in Gruppen.

Neben anderen Resultaten wurde der folgende Satz bewiesen:
Satz: Ist σ eine Halbordnung der Primzahlmenge $\mathfrak{P}$, so sind die folgenden Eigenschaften der Gruppe G mit lokaler Doppelkettenbedingung äquivalent:

(a) Die Menge der $\mathfrak{P}$-Elemente von G ist eine lokalendliche $(\mathfrak{P}, \sigma)$-verstreute $\mathfrak{P}$-Untergruppe von G.

(b) 1. Ist U ein $\mathfrak{P}$-Faktor von G, so ist U eine lokalendliche $(\mathfrak{P}, \sigma)$-verstreute Gruppe.

2. Sind p und q Primzahlen mit $p \in \mathfrak{P}$ und $q \notin \mathfrak{P}$, ist a ein p-Element und b ein q-Element von G, so kommen in fast allen $o(a^{(i)} \circ b)$ nur Primzahlen r mit $r \, \sigma \, p$ vor.

3. Ist F ein nicht lokalendlicher von $\mathfrak{P}$-Elementen erzeugbarer Faktor von G, so gilt in σ für die Primzahlen p von F mit $p \in \mathfrak{P}$ die absteigende Kettenbedingung.

W. KAPPE: Über einen Satz von Eugene Schenkman.

Es sei M die Klasse der untergruppenerblichen Eigenschaften E endlicher p-Gruppen ($p \neq 2$), für die $N(G,E) \subseteq Z_2(G)$ für alle endlichen p-Gruppen G. N(G,E) bezeichnet dabei die E-Norm von G, d.i. der Durchschnitt der Normalisatoren aller bzgl. E maximalen Untergruppen von G. Die Eigenschaft E heißt unwesentlich, wenn die nichtzyklischen E-Gruppen vom Exponenten p sind.
Satz: M enthält nur unwesentliche Eigenschaften.

H. Heineken (Frankfurt a.M.)