Einführung einer Obersekunda in die

Gruppentheorie

6. - 9.7.63

Herbert Eggs
Studienreferendar
Freiburg/Brsg.
Rotteck-Gymnasium

(Darstellung nach einem in Oberwolfach gehaltenen Vortrag)

VORWORT

Die vorliegende Darstellung gibt eine Zusammenfassung eines Vortrages, der in etwa zweimal zwei Stunden in dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach am 6./7. Juli 1963 gehalten wurde. Anlass dazu war das Arbeitstreffen der Studienreferendare für Mathematik des Studienseminares Freiburg.

Der Vortrag stellt einen Bericht dar, wie an dem naturwissenschaftlichen Rotteck-Gymnasium in Freiburg eine Obersekunda in die Gruppentheorie eingeführt wurde. Die Klasse hatte keine Ahnung von dem mathematischen Begriff "Gruppe". Deshalb wurde der Unterricht wie auch der Vortrag folgendermassen gegliedert:

1. Vorbereitung
2. Kommutative Gruppe
3. Allgemeine Gruppe
4. Allgemeine Aussagen über Gruppen

Bei dem Vortrag wurde das Gewicht auf die Einführung der kommutativen Gruppe, die Entwicklung eines Beispieles einer nicht kommutativen Grüppe und einige einfache allgemeine Aussagen der Gruppentheorie gelegt.

1. Vorbereitung

1.1 Mengen

Als grundlegender Begriff der Gruppentheorie wird im Unterricht an Hand vieler Beispiele aus der Mathematik wie aus dem Alltag zuerst die Menge eingeführt, dazu die Bezeichnungen "Element" und "enthalten in". Dann werden Untermengen betrachtet, Vereinigungen und Durchschnitte gebildet. Dabei werden immer die üblichen Symbole verwendet.

1.2 Abgeschlossene Mengen

Als nächstes untersuchen wir Mengen mit Verknüpfungen. Dazu wird folgendes Tafelbild erarbeitet

1) $n_1, n_2 \in \{n\} \Longrightarrow n_1+n_2 \in \{n\}$

2) $2n_1, 2n_2 \in \{2n\} \Longrightarrow 2n_1 + 2n_2 = 2(n_1+n_2) \in \{2n\}$

3) $2n_1+1, 2n_2+1 \in \{2n+1\} \Longrightarrow (2n_1+1)+(2n_2+1) = 2(n_1+n_2+1) \notin \{2n+1\}$

4) $p_1, p_2 \in \{p\} \Longrightarrow p_1+p_2 \notin \{p\}$

1) $n_1, n_2 \in \{n\} \Longrightarrow n_1 \circ n_2 \in \{n\}$

2) $2n_1, 2n_2 \in \{2n\} \Longrightarrow 2n_1 \circ 2n_2 = 2(2n_1 \circ n_2) \in \{2n\}$

3) $2n_1+1, 2n_2+1 \in \{2n+1\} \Longrightarrow (2n_1+1)\circ(2n_2+1) = 2(n_1n_2+n_1+n_2)+1 \in \{2n+1\}$

4) $p_1, p_2 \in \{p\} \Longrightarrow p_1 \circ p_2 \notin \{p\}$

Dabei ist $\{n\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\{2n\}$ die Menge der positiven geraden Zahlen, $\{2n+1\}$ die Menge der positiven ungeraden Zahlen und $\{p\}$ die Menge der Primzahlen. Besonders interessant ist hier die Menge der positiven ungeraden Zahlen. Verknüpfen wir zwei beliebige Elemente aus ihr durch Addition, dann liegt das Ergebnis nicht mehr in dieser Menge, verknüpfen wir aber zwei beliebige Elemente durch die Multiplikation, dann liegt das Ergebnis immer in unserer Ausgangsmenge.

Wir schreiben folgende Definition auf

Definition: Wir nennen eine Menge bezüglich einer gegebenen Verknüpfung abgeschlossen, wenn die Verknüpfung zweier beliebiger Elemente der Menge wieder ein Element der Menge ergibt.

1.3 Assoziative und kommutative Mengen

Die Begriffe "assoziativ" und "kommutativ" sind den Schülern bekannt. Deshalb entwickeln die Schüler selbst, dass z.B. die Menge der natürlichen Zahlen bezüglich der Verknüpfung

$$a \circ b = \frac{a + b}{2}$$

zwar kommutativ ist aber nicht assoziativ, bezüglich der Verknüpfung

$$a \circ b = a^b$$

weder kommutativ noch assoziativ ist.
Wir definieren

Definition: Wir nennen eine Menge bezüglich einer gegebenen Verknüpfung assoziativ, wenn für drei beliebige Elemente der Menge immer gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) .$$

Definition: Wir nennen eine Menge bezüglich einer gegebenen Verknüpfung kommutativ, wenn für zwei beliebige Elemente der enge immer gilt

$$a \circ b = b \circ a .$$

Zum Abschluss dieses ersten Abschnittes stellen wir folgende Tabelle zusammen:

	Menge	Verknüpfung	abgeschl.	assoz.	kommut.
1)	$\mathfrak{N}$	$a + b$	ja	ja	ja
2)			ja	ja	nein
3)	$\mathfrak{N}$	$(a + b)^2$	ja	nein	ja
4)	$\mathfrak{U}$	$a + b$	nein	ja	ja
5)	$\mathfrak{N}$	a^b	ja	nein	nein
6)			nein	ja	nein
7)	$\mathfrak{N}$	ab	nein	nein	ja
8)	$\mathfrak{N}$	$\frac{a}{b}$	nein	nein	nein

Für 2) und 6) können wir bei diesem Stand noch keine Beispiele angeben. Später können wir aber für zwei jede nicht kommutative Gruppe nehmen, für 6) jede nicht kommutative Untermenge einer Gruppe, wobei diese Untermenge selbst nur keine Gruppe sein darf.
$\mathfrak{N}$ stellt hier wieder die Menge der natürlichen Zahlen dar und $\mathfrak{U}$ die Menge der ungeraden Zahlen.

2. Kommuatative Gruppe

2.1 Restzahlen

Die kommutative Gruppe soll über Restzshlen eingeführt werden. Dazu teilen wir die Menge der ganzen Zahlen in Restklassen mod. 3 ein. Es sei $\{m\}$ die Menge der ganzen Zahlen, für die einzelnen Restklassem schreiben wir

$$\bar{0} = \{3m\} \quad , \quad \bar{1} = \{3m + 1\} \quad , \quad \bar{2} = \{3m + 2\} \ .$$

Bei der Addition beliebiger Zahlen aus diesen Restklassen fällt folgendes auf:

1. Ist

$$a = 3m_1 \in \bar{0} \quad \text{und} \quad b = 3m_2 \in \bar{0} \ ,$$

dann ist immer

$$a + b = 3(m_1 + m_2) \in \bar{0} \ .$$

2. Ist

$$a = 3m_1 + 1 \in \bar{1} \quad \text{und} \quad b = 3m_2 + 2 \in \bar{2} \ ,$$

dann gilt jetzt immer

$$a + b = 3(m_1 + m_2 + 1) \in \bar{0} \ .$$

Für die Ergebnisse aus 1. und 2. schreiben wir kurz

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \quad \text{bzw.} \quad \bar{1} + \bar{2} = \bar{0}$$

Entsprechend bekommt man noch z. B.

$$\bar{1} + \bar{1} = \bar{2} \quad \text{oder} \quad \bar{2} + \bar{2} = \bar{1} \ .$$

Dadurch ist eine Addition für Restklassen eingeführt. Wir fassen jetzt unsere Restklassen mod. 3 zu einer Menge

$$\overline{\mathfrak{R}}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

zusammen und fragen uns, ob diese Menge bezüglich der auf ihr definierten Addition abgeschlossen, assoziativ und kommutativ ist. Zur Beantwortung dieser Frage stellen wir die Verknüpfungstabelle auf. Diese hat die Gestalt

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Aus dieser Verknüpfungstabelle folgt sofort

Die Menge der Restklassen mod. 3 ist bezüglich der Addition abgeschlossen.

Mit unserer Tabelle können wir alle 27 möglichen Gleichungen der Gestalt

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) \qquad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \overline{\mathfrak{R}}_3$$

nachprüfen und bekommem dabei als Ergebnis

Die Menge der Restklassen mod. 3 ist bezüglich der Addition assoziativ.

Diese Aussage können wir auch beweisen, indem wir die Assoziativität der Restzahlen auf die der ganzen Zahlen zurückführen.

Die Verknüpfungstabelle ist symmetrisch zu der Diadonalen von links oben nach rechts unten. Daraus folgt:

Die Menge der Restklassen mod. 3 ist bezüglich der Addition kommutativ.

2.2 Lineare Bestimmungsgleichungen

Mit unserer in 2.1 entwickelten Verknüpfungstabelle können wir nicht nur jede lineare Bestimmungsgleichung der Gestalt

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{x}$$

in $\overline{\mathfrak{R}}_3$ lösen sondern finden auch für jede Bestimmungsgleichung der Form

$$\bar{a} + \bar{x} = \bar{b} \quad \text{bzw.} \quad \bar{y} + \bar{a} = \bar{b}$$

eine Lösung in $\overline{\mathfrak{R}}_3$.

Um in diese Lösbarkeitsfrage einen besseren Einblick zu bekommen, definieren wir zuerst mal entsprechend der Addition eine Multiplikation über $\overline{\mathfrak{R}}_3$ und stellen dazu die Verknüpfungstabelle auf. Genau so stellen wir uns eine Verknüpfungstabelle jeweils für die Addition und für die Multiplikation über der Menge der Restklassen mod. 4 zusammen.

Wir haben somit die Tabellen

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

I

$\circ$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

II

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

III

$\circ$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

IV

In der Tabelle I und III kommt in jeder Zeile und in jeder Spalte jeweils jedes Element der zugrunde gelegten Menge genau einmal vor. Daraus folgt, dass jede lineare Bestimmungsgleichung der Gestalt

$$\overline{a} \circ \overline{x} = \overline{b}$$

von genau einem Element der jeweiligen Menge glöst wird. Für II gilt das erst, wenn wir zuerst die Zeile und Spalte streichen, die nur das Ele ent $\overline{0}$ enthält. Wenn wir jetzt auch in IV die Zeile und Spalte löschen, die nur das Element $\overline{0}$ enthält, dann ist trotzdem nicht jede lineare Bestimmungsgleichung in IV lösbar.

$$\overline{2} \circ \overline{x} = \overline{2}$$

hat

$$\overline{x}_1 = \overline{1} \text{ und } \overline{x}_2 = \overline{2}$$

als Lösungen. Dagegen sind die Gleichungen

$$\overline{2} \circ \overline{x} = \overline{1} \quad \text{und} \quad \overline{2} \circ \overline{x} = \overline{3}$$

nicht lösbar.

Diese Betrachtungen zeigen uns, dass es sinnvoll ist zu fragen, ob bei einer Menge mit einer Verknüpfung jede lineare Bestimmungsgleichung über dieser Menge bezüglich der gegebenen Verknüpfung Lösungen in dieser Menge hat.

2.3 Definition der kommutativen Gruppe

Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen: Haben wir eine Menge mit einer Verknüpfung, dann können wir untersuchen, ob diese Menge bezüglich der gegebenen Verknüpfung 1. abgeschlossen, 2. assoziativ, 3. kommutativ ist und ob jede lineare Bestimmungsgleichung über dieser Menge eine Lösung in ihr hat?

Diese vier Eigenschaften werden erfüllt von der Menge der ganzen Zahlen bezüglich der Addition, von der Menge der positiven rationalen Zahlen bezüglich der Multiplikation. Betrachten wir noch die Menge der Drehungen in einer Ebene an einem Punkt. Es seien a und b zwei beliebige Drehungen dieser Menge. Eine beliebige Figur F werde durch a in F' und F' durch b in F" übergeführt. Als Verknüpfung

$$a \circ b$$

definieren wir die Abbildung, die F direkt in F" überführt. Die Verknüpfung geben wir an durch den Befehl "dann". Die Menge dieser Drehungen erfüllt bezüglich der so auf ihr definierten Verknüpfung ebenfalls obige vier Eigenschaften.

Wir definieren

Definition: Gegeben ist eine Menge $\mathfrak{M}$ mit einer Verknüpfung. Wir nennen diese Menge $\mathfrak{M}$ bezüglich der gegebenen Verknüpfung eine kommutative Gruppe, wenn folgende vier Eigenschaften erfüllt sind:

1) Die Menge $\mathfrak{M}$ ist bezüglich der gegebenen Verknüpfung abgeschlossen.
2) Die Menge $\mathfrak{M}$ ist bezüglich der gegebenen Verknüpfung kommutativ.
3) Die Menge $\mathfrak{M}$ ist bezüglich der gegebenen Verknüpfung assoziativ.
4) Jede lineare Bestimmungsgleichung $a \circ x = b$ ist lösbar in $\mathfrak{M}$ für beliebiges $a, b \in \mathfrak{M}$.

Wegen 2) folgt aus 4), dass mit $a \circ x = b$ auch immer $y \circ a = b$ mindestens $x = y$ als Lösung hat.

3. Allgemeine Gruppe

3.1 Definition der allgemeinen Gruppe

Wir können eine Gruppe definieren, bei der das Kommutativgesetz nicht gilt. Die Frage wird dann nur sein, ob es soetwas überhaupt gibt.

Zu dieser Definition gehen wir wieder aus von einer Menge mit einer Verknüpfung, verlangen aber jetzt nicht mehr, dass diese Menge bezüglich der gegebenen Verknüpfung kommutativ sei; dagegen soll sie bezüglich der zugrunde gelegten Verknüpfung abgeschlossen und assoziativ sein. Es soll auch jede lineare Bestimmungsgleichung Lösungen in der betrachteten Menge haben. Weil die Kommutativität nicht mehr erfüllt zu sein braucht, folgt aus der Lösbarkeit von $a \circ x = b$ nicht mehr die von $y \circ a = b$. Die Lösbarkeit dieser zweiten Gleichungsart werden wir zusätzlich noch fordern.

So bekommen wir folgende Definition:

Definition: Gegeben ist eine Menge $\mathfrak{G}$ mit einer Verknüpfung. Wir nennen diese Menge $\mathfrak{G}$ bezüglich der gegebenen Verknüpfung eine allgemeine Gruppe, oder kurz eine Gruppe, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

1) Die Menge $\mathfrak{G}$ ist bezüglich der gegebenen Verknüpfung abgeschlossen.
2) Die Menge $\mathfrak{G}$ ist bezüglich der gegebenen Verknüpfung assoziativ.
3) Jede lineare Bestimmungsgleichung

$$a \circ x = b \quad \text{und} \quad y \circ a = b \quad \text{mit} \quad a,b \in \mathfrak{G}$$

hat mindestens eine Lösung $x,y \in \mathfrak{G}$.

3.2 Konstruktion einer nicht kommutativen Gruppe

Wir müssen jetzt die Existenz einer nicht kommutativen Gruppe zeigen. Wir stellen uns die Aufgabe, eine nicht kommutative Gruppe mit möglichst wenig Elementen zu finden. Dazu gehen wir aus von zwei sich in einem Punkt D schneidenden Geraden, der Schnittwinkel sei α mit $0^\circ < \alpha \leqq 90^\circ$. Die ganzen folgenden Betrachtungen spielen sich in der von den beiden Geraden aufgespannten Ebenen ab. Es seien s_1 und s_2 die Spiegelungen, die die beiden Geraden als Spiegelachsen haben. Diese Spiegelungen sollen Elemente der gesuchten Gruppe sein. Wegen der Abgeschlossenheit muss dann auch

1) $s_1 \circ s_1 = s_2 \circ s_2 = f$

2) $s_1 \circ s_2 = d_{2\alpha}$

3) $s_2 \circ s_1 = d_{-2\alpha}$

Element unserer Gruppe sein. Dabei ist $d_{2\alpha}$ eine Drehung an D um 2α, und $d_{-2\alpha}$ eine Drehung an D um -2α.
Unsere gesuchte Gruppe muss also notwendig die Elemente

$$f, s_1, s_2, d_{2\alpha}, d_{-2\alpha}$$

erthalten.
Nun müssen wir folgendes beachten:
1) Es soll

$$s_1 \circ s_2 \neq s_2 \circ s_1 \qquad d_{2\alpha} \neq d_{-2\alpha}$$

sein. Daraus folgt für α

$$0° < \alpha < 90° \quad .$$

2) Wieder wegen der Abgeschlossenheit muss

$$d_{2\alpha} \circ d_{2\alpha} = d_{4\alpha}$$

Element unserer Gruppe sein. Das ist nur möglich für

$$d_{4\alpha} = d_{-2\alpha} \quad .$$

Es ist

$$d_{-2\alpha} = d_{360°-2\alpha} \quad ,$$

somit

$$d_{4\alpha} = d_{360°-2} \quad ,$$

woraus folgt $(0° < \alpha < 90°!)$

$$\alpha = 60° \quad .$$

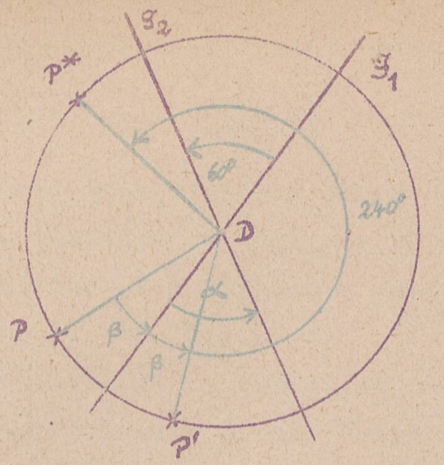
Die gesuchte Gruppe enthält somit notwendig die Elemente

$$f, s_1, s_2, d_{120°}, d_{240°} \quad .$$

3) Schliesslich muss nocheinmal wegen der Abgeschlossenheit auch

$$s_1 \circ d_{240°}$$

Element unserer Gruppe sein. Dieses Element ist eine Spiegelung. Wir nennen sie s_3. Wir müssen jetzt die Lage der zugehörenden Spiegelachse bestimmen. Dazu folgende Skizze:



Die Spiegelung s_1 führt P in P' über

$$P \xrightarrow[s_1]{} P' \quad ,$$

die Drehung $d_{240°}$ führt dann P' in P^* über

$$P' \xrightarrow[d_{240}]{} P^* \quad .$$

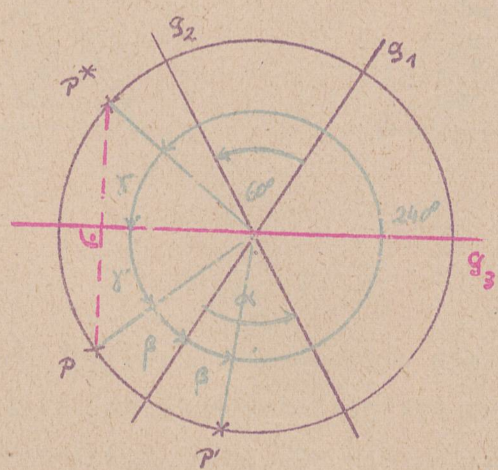
Somit gilt

$$P \xrightarrow[s_1 \circ d_{240°} = s_3]{} P^* \quad .$$

Es ist g_3 das Mittellot von $\overline{PP^*}$ und wegen

$$\overline{PD} = \overline{P^*D}$$

geht g_3 durch D. Damit kann man obige Skizze zu folgender ergänzen



Nun ist g_3 festgelegt, wenn wir noch den Winkel zwischen g_3 und g_1 kennen. Aus unserer zweiten Skizze folgt

1) $\sphericalangle (g_3, g_1) = \beta + \gamma$

2) $2\beta + 240° + 2\gamma = 360°$.

Daraus folgt:

$$\beta + \gamma = 60^\circ = \measuredangle(g_3, g_1) \quad .$$

Unsere gesuchte Gruppe enthält jetzt notwendig die Elemente

$$f,\ d_{120},\ d_{240},\ s_1,\ s_2,\ s_3 \quad .$$

Dabei gehen die drei Spiegelachsen durch einen Punkt und benachbarte Achsen bilden jeweils einen Winkel von 60°.
Allein zur sprachlichen Vereinfachung nennen wir diese Menge "die Spiegel-Menge drei" im Symbol "S_3".
Stellt die so gefundene Menge bezüglich der Verknüpfung dann eine Gruppe dar? Zur Beantwortung dieser Frage kann man sich folgendes überlegen: Betrachten wir ein gleichseitiges Dreieck, das g_1, g_2 und g_3 als Symmetrieachsen hat, dann stellen die Elemente von S_3 genau die Abbildungen dar, die dieses Dreieck in sich überführen. Somit ist die Frage, ob S_3 eine Gruppe darstelle, gleichwertig mit der Frage, ob die Menge der Abbildungen, die ein gleichseitiges Dreieck in sich überführen, eine Gruppe darstelle. Zur Beantwortung dieser Frage haben wir drei gleichgrosse, gleichseitige Dreiecke ausgesägt, die Ecken numeriert und Vorder- und Rückseite markiert. (Siehe Bild 1)

Bild 1

Mit zwei solchen Dreiecken lassen sich die einzelnen Bewegungen aus S_3 folgendermassen leicht darstellen: Wir bringen die zwei Dreiecke in die Ausgangsstellung, d.h., wir hängen sie so auf, dass beide dasselbe Bild geben; z.B. wir sehen von beiden Dreiecken die Vorderseite mit der 1 unten links oder wir sehen von beiden Dreiecken die Rückseite mit der 3 rechts unten. Dann wenden wir auf das zweite Dreieck eine Abbildung aus S_3 an. Dabei legen wir fest, dass g_2 senkrecht zum unteren Blattrand steht, g_1 von links unten nach rechts oben und

S_3 von links oben nach rechts unten verläuft. So hat zum Beispiel die Abbildung s_3 die Darstellung

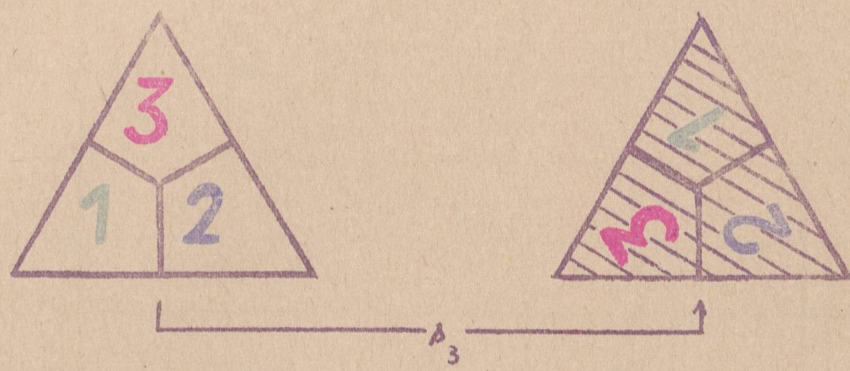


Bild 2

Die Verknüpfung zweier Abbildungen aus S_3 lässt sich nach folgendem Schema ermitteln:

1. Wir bringen alle Dreiecke in die Ausgangsstellung.
2. Wir wenden auf das zweite Dreieck die erste Abbildung an.
3. Wir bringen das dritte Dreieck in die neue Stellung des zweiten Dreieckes. Wir bringen also das dritte Dreieck in die A usgangsstellung gegenüber dem zweiten.
4. Wir wenden auf das dritte Dreieck die zweite Abbildung an.

Die Abbildung aus S_3, die das erste Dreieck direkt in die Endstellung des dritten überfführt, ist dann gleich der Verknüpfung der zwei Abbildungen.

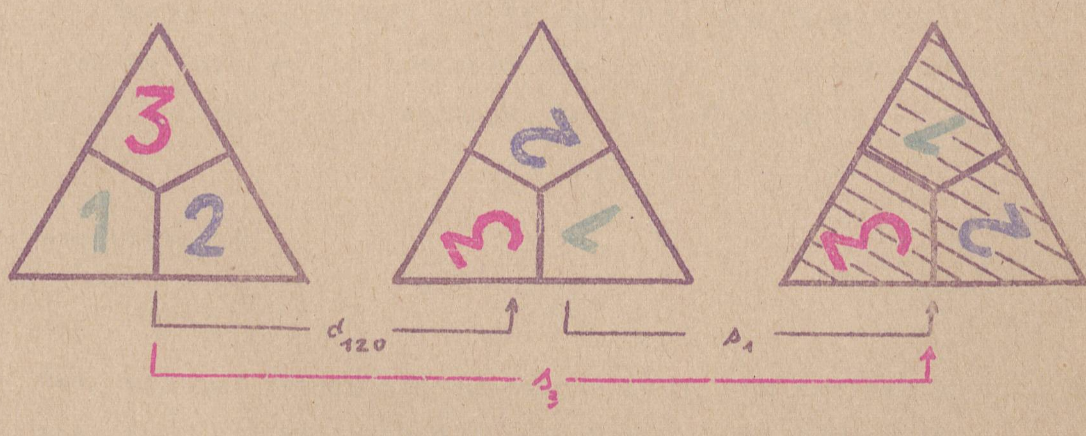


Bild 3

Bild 3 dient also zu ermittlung der Verknüpfung

$$d_{120} \circ s_1 \quad .$$

Mit diesem Schema bekommen wir die Verknüpfungstabelle

$\circ$	f	d_{120}	d_{240}	s_1	s_2	s_3
f	f	d_{120}	d_{240}	s_1	s_2	s_3
d_{120}	d_{120}	d_{240}	f	s_3	s_1	s_2
d_{240}	d_{240}	f	d_{120}	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	f	d_{120}	d_{240}
s_2	s_2	s_3	s_1	d_{240}	f	d_{120}
s_3	s_3	s_1	s_2	d_{120}	d_{240}	f

Aus dieser Verknüpfung sehen wir:

Die Menge S_3 ist bezüglich der Verknüpfung "dann" abgeschlossen.

Da in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element von S_3 einmal vorkommt, ist jede lineare Bestimmungsgleichung

$$a \circ x = b \qquad \text{bzw.} \qquad y \circ a = b$$

in S_3 lösbar, ja sogar eindeutig lösbar.

In S_3 ist jede lineare Bestimmungsgleichung lösbar.

Den Nachweis,

S_3 ist bezüglich der Verknüpfung dann assoziativ,

führen wir folgendermassen: Wir gehen aus von dem Geradenbüschel, das den Punkt D als Träger hat. Es sei $\{s\}$ die Menge aller Spiegelungen, die die Geraden des Büschels als Spiegelachse haben. Dazu betrachten wir die Menge aller Drehungen an D, $\{\varphi\}$. Es sei

$$\{s\} \cup \{\varphi\} = S \quad .$$

Dann ist

$$S_3 \subset S \quad .$$

Wenn wir nun zeigen können, dass S bezüglich der Verknüpfung dann assoziativ ist, dann gilt das auch für S_3. Den Beweis, dass S assoziativ ist führen wir nach folgender Überlegung:

Wir nehmen zwei beliebige Drehungen

$$\varphi_1, \varphi_2 \subset S$$

und eine beliebige Spiegelung

$$s \subset S .$$

F sei irgend eine Figur unserer Ebene. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ F \xrightarrow[\varphi_1]{} F' \\ \quad F' \xrightarrow[\varphi_2]{} F'' \\ \quad F'' \xrightarrow[s]{} F''' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2)\ F \xrightarrow[\varphi_1 \circ \varphi_2]{} F'' \\ \quad F'' \xrightarrow[s]{} F''' \end{array}\right\} \Rightarrow F \xrightarrow[(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ s]{} F''' \\ \left.\begin{array}{l} 3)\ F \xrightarrow[\varphi_1]{} F' \\ \quad F' \xrightarrow[\varphi_2 \circ s]{} F''' \end{array}\right\} \Rightarrow F \xrightarrow[\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ s)]{} F''' \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}}\right\} \Rightarrow (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ s_1 = \varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ s_1)$$

Entsprechend bekommt man auch die Assoziativität für die übrigen 7 Möglichkeiten.

So haben wir den schönen Satz

> <u>Satz: Die Menge der Abbildungen, die ein gleichseitiges Dreieck in sich überführen, stellt bezüglich der Verknüpfung "dann" eine nicht kommutative Gruppe dar.</u>

Somit war unsere Verallgemeinerung des Begriffes der kommutativen Gruppe zu dem der nicht kommutativen sinnvoll.

3.3 Beispiele von Gruppen

Nach der Entwicklung in 3.2 ist es nun leicht, weitere Beispiele von Gruppen zu finden.

1. Wir können ausgehen von n Spiegelachsen, die sich alle in einem Punkt schneiden und bei denen benachbarte Achsen immer denselben Winkel bilden. Für n=2 bekommen wir die Kleinsche Vierergruppe $\mathfrak{V}_4$.
2. Wir betrachten die Menge der Abbildungen, die eine ebene oder räumliche Figur in sich überführen.
3. Wir betrachten die Menge der Abbildungen, die ein Ornament in sich überführen.
4. Die Abbildungen aus S_3 stellen alle möglich Permutationen dreier Dinge dar. Somit haben wir einen Einstieg in die Permutationsgruppen .

4. Allgemeine Aussagen über Gruppen

4.1 Untergruppen

Eine Untergruppe einzuführen ist sehr leicht. Ich darf mich deshalb hier auf die Definition und zwei Sätze beschränken.

Definition: Die Menge $\mathcal{G}$ stelle bezüglich einer gegebenen Verknüpfung eine Gruppe dar. Die Untermenge $\bar{\mathcal{G}}$ von $\mathcal{G}$ sei bezüglich der in $\mathcal{G}$ gegebenen Verknüpfung ebenfalls eine Gruppe. Dann nennen wir $\bar{\mathcal{G}}$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}$.

Satz 1: Ist $\bar{\mathcal{G}}$ eine Untermenge von der Gruppe $\mathcal{G}$, dann ist $\bar{\mathcal{G}}$ bezüglich der in $\mathcal{G}$ gegebenen Verknüpfung assoziativ.

Aus diesem Satz 1 folgt unmittelbar:

Satz 2: Die Untermenge $\bar{\mathcal{G}}$ der Gruppe $\mathcal{G}$ stelle bezüglich der in $\mathcal{G}$ gegebenen Verknüpfung eine Untergruppe dar, wenn $\bar{\mathcal{G}}$ bezüglich dieser Verknüpfung abgeschlossen ist und jede lineare Bestimmungsgleichung

$$a \circ x = b \quad \text{bzw.} \quad y \circ a = b \qquad a, b \in \bar{\mathcal{G}}$$

Lösungen in $\bar{\mathcal{G}}$ hat.

4.2 Isomorphe Gruppen

Die Isomorphie führen wir folgendermassen ein: Wir schreiben die additive Gruppe der Restzahlen mod. 4 an. Daneben die Gruppe, die zu den Drehungen an einem Punkt um 0°, 90°, 180°, 270° gehört.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

I

$\cdot$	d_0	d_{90}	d_{180}	d_{270}
d_0	d_0	d_{90}	d_{180}	d_{270}
d_{90}	d_{90}	d_{180}	d_{270}	d_0
d_{180}	d_{180}	d_{270}	d_0	d_{90}
d_{270}	d_{270}	d_0	d_{90}	d_{180}

II

Wir können in diesen Tabellen die Elemente, die in entsprechenden Feldern der oberen, äusseren Zeile stehen einander eineindeutig zuordnen. Dann stehen in allen übrigen, sich entsprechenden Feldern immer einander zugeordnete Elemente. Gruppen, die sich so einander zuordnen lassen, nennen wir isomorph.

Wir haben also immer zwei einander eineindeutig zugeordnete Gruppen $\mathfrak{g} \longleftrightarrow \mathfrak{g}^*$. Wenn diese Gruppen strukurgleich -wie wir für isomorph auch sagen wollen- sind, gilt:

Aus $a \longleftrightarrow a^*$ und $b \longleftrightarrow b^*$ folgt $a \circ b \longleftrightarrow a^* \circ b^*$.

Wenn umgekehrt diese Eigenschaft gilt, dann sind auch $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^*$ isomorph. Diese Eigenschaft erheben wir zur Definition für die Isomorphie, da wir somit auch Gruppen mit unendlich vielen Elementen erfassen

Definition: Gegeben sind zwei einander eineindeutig zugeordnete Gruppen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^*$. Wenn aus

$$a \longleftrightarrow a^*,\ b \longleftrightarrow b^* \text{ folgt } a \circ b \longleftrightarrow a^* \circ b^*,$$

dann nennen wir $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ isomorph, im Symbol

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^* .$$

Ein schönes Beispiel zu dem Begriff Untergruppe wie auch zur Isomorphie ist folgendes:

Wir betrachten einen Würfel. a, b und c seien die Verbindungsgeraden der Mitten gegenüberliegender Quadrate. $a^\times$, $b^\times$ und $c^\times$ seien Drehungen um 180°, die a, b und c als Achse haben. Die Menge

$$\{f, a^\times, b^\times, c^\times\} = Q$$

ist bezüglich der Verknüpfung dann eine Untergruppe der Gruppe der Abbildungen, die einen Würfel in sich überführen. Weiter gilt

$$Q \cong \mathfrak{V}_4 ,$$

wobei $\mathfrak{V}_4$ die Kleinsche Vierergruppe ist.

Jetzt betrachten wir einen Tetraeder. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ seien die Verbindungsgeraden der Mitten gegenüberliegender Kanten. $\bar{a}^\times$, $\bar{b}^\times$, $\bar{c}^\times$ seien die Drehungen um 180°, die $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ als Achsen haben. Die Menge

$$\{f, \bar{a}^\times, \bar{b}^\times, \bar{c}^\times\} = T$$

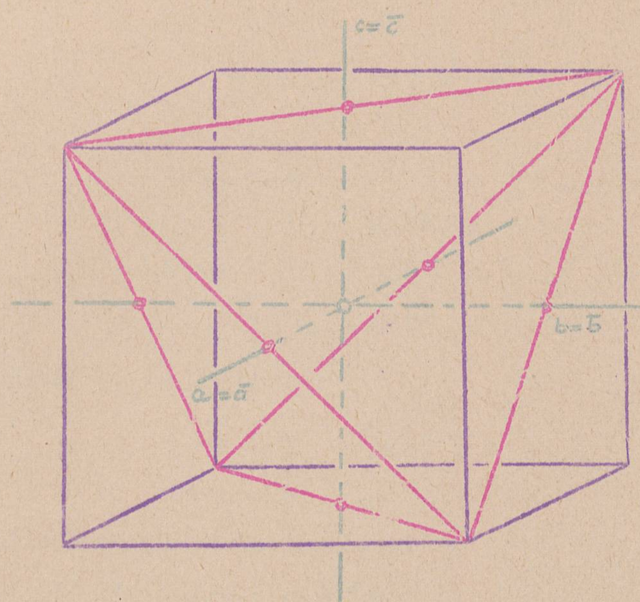
ist bezüglich der Verknüpfung dann eine Untergruppe der Gruppe der Abbildungen, die einen Tetraeder in sich überführen. Auch hier gilt

$$T \cong \mathfrak{V}_4 ,$$

woraus folgt, dass

$$Q \cong T$$

ist. Was steckt hinter dieser Isomorphie? Die Antwort gibt folgendes Bild



4.3 Abgeleitete Eigenschaften einer Gruppe

In jeder betrachteten endlichen Gruppe gelten folgende Eigenschaften, die wir als allgemein gültig beweisen wollen und deshalb in Form von Sätzen angeben können.

Satz 1: Existenz und Eindeutigkeit des neutralen Elementes.
In jeder Gruppe gibt es genau ein Element, das, verknüpft mit einem beliebigen zweiten Element, immer dieses Element ergibt.

Satz 2: Inverses Element.
Zu jedem Element einer Gruppe gibt es genau ein zweites Element derart, dass die Verknüpfung beider Elemente das neutrale Element ergibt. Diese Aussage ist von der Reihenfolge der verknüpften Elemente unabhängig.

Satz 3: Jede lineare Bestimmungsgleichung hat genau eine Lösung.

Wir beweisen zuerst die Existenzaussage des Satzes 1 und 2. Damit zeigen wir die Richtigkeit von Satz 3. Daraus folgt unmittelbar die Eindeutigkeitsaussage der Sätze 1 und 2.

Beweis der Existenzaussage des Satzes 1:

Man nennt das Element mit der in Satz 1 angegebenen Eigenschaft das neutrale Element und verwendet dafür gern das Symbol f.

Als Voraussetzung nehmen wir allein die Gruppeneigenschaften.

Behauptung: Es gibt ein $f \in \mathfrak{G}$, so dass für jedes beliebige Element $a \in \mathfrak{G}$ gilt

$$a \circ f = f \circ a = a \,.$$

Beweis:

I)	$a \circ x = a$	gibt	$x = a_r$	nach 3. Gruppeneigensch.
II)	$y \circ a = a$	gibt	$y = a_l$	" " "
III)	$b \circ x = b$	gibt	$x = b_r$	" " "
IV)	$y \circ b = b$	gibt	$y = b_l$	" " ".

Wir betrachten I) und III).

$y \circ a = b$ gibt $y = c$ wie oben

V) $c \circ a = b$.

Wir multiplizieren I) von links mit c

$$c \circ (a \circ a_r) = c \circ a$$

$$(c \circ a) \circ a_r = c \circ a \quad \text{nach 2. Gruppeneigenschaft}$$

$$b \circ a_r = b \quad \text{nach V)} \,.$$

Somit können wir setzen

$$\underline{a_r = b_r = f_r} \,.$$

Ganz entsprechend bekommt man

$$\underline{a_l = b_l = f_l} \,.$$

Wir haben unser Ziel erreicht, wenn wir noch zeigen können, dass

$$f_r = f_l$$

ist. Das lässt sich einfach erreichen. Wir setzen

$$f_l \circ x = f_l \quad , \quad y \circ f_r = f_r \,.$$

Nach den obigen Ergebnissen hat die erste der Gleichungen f_r als eine Lösung, die zweite f_l. Setzen wir das ein, dann bekommen wir

$$f_l = f_l \circ f_r = f_r \,.$$

Existenzbeweis des Inversen Elementes

Wir nennen das Element, das verknüpft mit a das neutrale Element ergibt, das zu a inverse Element.

Voraussetzung : Gruppeneigenschaften und die Existenzaussage des Satzes 1.

Behauptung: Zu jedem $a \in \mathfrak{G}$ gibt es ein $\bar{a} \in \mathfrak{G}$, so dass gilt

$$a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = f \,,$$

Beweis: $a \circ x = f \quad , \text{gilt} \quad x = \bar{a} \qquad\qquad a \circ \bar{a} = f$

$y \circ a = f \quad , \text{gilt} \quad y = \bar{\bar{a}} \qquad\qquad a \circ \bar{\bar{a}} = f$

$\bar{\bar{a}} \circ \,|\; a \circ \bar{a} = f \qquad\qquad \bar{\bar{a}} \circ (a \circ \bar{a}) = \bar{\bar{a}} \circ f$

$$(\bar{\bar{a}} \circ a) \circ \bar{a} = \bar{\bar{a}} \circ f$$

$$f \circ \bar{a} = \bar{\bar{a}} \circ f$$

$$\underline{\bar{a} = \bar{\bar{a}}}$$

Eindeutigkeitsbeweis der Lösung einer linearen Bestimmungsgleichung

Voraussetzung: Gruppeneigenschaften und die eben bewiesenen Existensaussagen

Behauptung: $\quad a \circ x_1 = b \,,\; a \circ x_2 = b \,, \quad x_1, x_2 \in \mathcal{G} \qquad x_1 = x_2 \;!$

Beweis: $\quad a \circ x = b \;\; \text{gibt} \;\; x = x_1 \qquad \text{mit} \;\; a \circ x_1 = b$

$\text{gibt} \;\; x = x_2 \qquad \text{mit} \;\; a \circ x_2 = b$

$\bar{a} \circ \,|\; a \circ x_1 = b \qquad \bar{a} \circ (a \circ x_1) = \bar{a} \circ b$

$$(\bar{a} \circ a) \circ x_1 = \bar{a} \circ b$$

$$x_1 = \bar{a} \circ b$$

entsprechend bekommen wir

$$x_2 = \bar{a} \circ b \,,$$

woraus sofort die Behauptung folgt.